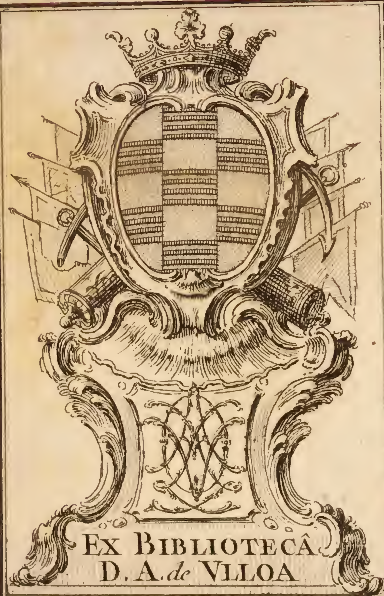

EX BIBLIOTECÂ
D. A. de VLLOA



NEWTONI

PRINCIPIA PHILOSOPHIÆ,

CUM COMMENTARIO PERPETUO.

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, EQ. AURATO.

Perpetuis Commentariis illustrata, communi studio

PP. THOMÆ LE SEUR & FRANCISCI JACQUIER

Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ,

Matheseos Professorum.

TOMUS PRIMUS.



GENEVÆ,

Typis BARRILLOT & FILII Bibliop. & Typogr.

MDCCXXXIX.

RERUM MATHEMATICARUM STUDIOSIS,

PHILOSOPHIÆ NEWTONIANÆ INTERPRETES.

QUàm recondita ſint ſimùl & utilia *Philoſophiæ Naturalis Principia Mathematica*, norunt ii omnes qui vel ipſum Clariſſimi Authoris nomen audierunt. Tanta eſt rerum dignitas atque ſublimitas, tanta ſermonis pluſquàm Geometrica brevitas, ut præſtantiſſimum illud opus pauciſſimis duntaxat Geometris factum videatur. Eas ob cauſas viris Matheſeos cultioriſque Phyſices ſtudioſis gratiſſimam fore putavimus, eo modo comparatam interpretationem, ut omnes tam utilis Philoſophiæ propoſitiones, corollaria omnia atquè ſcholia inoffenſo pede poſſint decurrere, qui vel ipſis Geometriæ & vulgaris Algebræ elemen-

mentis probè imbuti ſunt. Quod ut præſtaremus, Mechanices & Calculi infinitorum principia, quantùm inſtituti noſtri ratio poſtulat, *Newtoni* veſtigiis inſiſtentes demonſtravimus; perbrevem, ſed theorematum fæcunditate plenum noſtris Commentariis inſeruimus tractatum Sectionum Conicarum; Quæ vel minimùm, nimiâ obſcuritate Lectori negotium parere poſſent, ea omnia exponere & in bono Lumine collocare conati ſumus; quæ in ſcholiis, corollariis, propoſitionumque ſerie, prætermiſſâ demonſtratione, pronuntiat *Newtonus*, præmiſſis vel interjectis Lemmatis ſcrupulosè demonſtrata invenient, qui in ſola doctiſſimi Authoris verba jurare nolunt; eximia quæ in *Newtoni* propoſitionibus latent inventa, deteximus atque evolvimus; tandem cùm præſtantiſſima illa ſummi viri principia non ſolùm intelligere, ſed & illam quam ſibi aperuit ad inventionem viam explorare plurimùm delectationis habeat & utilitatis, diſperſa huc & illuc generalia quædam problemata Lector repe-

reperiet. Hæc ſunt quæ facere voluimus, quo exitu, penès benevolum Lectorem eſto judicium. Ex brevi illo commentariorum noſtrorum proſpectu ſatis patet quos nobis lectores poſtulemus; nec præſtantiſſimis Mathematicis nec imperito Philoſophorum vulgo nos ſcribere profitemur; ad hujuſce operis lectionem eos duntaxat admittimus qui ea quæ jam diximus elementa in promptu habent, & tali inſuper pollent mentis acie, ut longioris demonſtrationis vim atque ſeriem ſtudiosè perſequi & animo comprehendere poſſint.

De noſtris Commentariis hæc ſatis dicta ſint. Verùm naturalis æquitas & mathematicus candor poſtulant, ut nos plurimùm debere fateamur Doctiſſimis Viris, DAVIDI GREGORIO, VARIGNONIO, JACOBO HERMANNO, JOANNI KEILLIO, aliiſque multis, qui varias *Newtonianæ Philoſophiæ* partes luculentis ſcriptis illuſtrarunt. Eâdem æquitatis atque ingenuitatis lege à nobis religiosè factum eſt, ut eos omnes quorum ſpoliis aliquandò diteſcimus,

mus, in Commentariorum noſtrorum decurſu honoris causâ nominemus. Publicum quoque grati animi teſtimonium deeſſe nolumus Clariſſ. D^{no}. J. L. Calandrino in Academiâ Genevenſi Profeſſore in rebus Mathematicis verſatiſſimo, qui hanc noſtram *Newtoni* principiorum editionem adornari curavit ad normam elegantiſſimæ illius editionis, quæ additionibus multis locupletata *Londini* prodiit anno 1726. Deindè id ſibi laboris aſſumpſit vir doctiſſimus non ſolum ut ſchemata incidi, ſuis locis diſponi, typographica menda corrigi ſedulò invigilaret, ſed etiam ea quæ jam laudavimus Sectionum Conicarum elementa compoſuit, & quæ à nobis non ſatis perſpicuè videbantur expoſita propriis notis aliquandò illuſtravit.

Hoc noſtro labore fruantur rerum mathematicarum Cultores.

Romæ *in Regio Conventu SS^{æ}. Trinitatis,*
An. 1739.

I L-

ILLUSTRISSIMÆ
SOCIETATI REGALI
A
SERENISSIMO REGE
CAROLO II
AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM
FUNDATÆ,
ET
AUSPICIIS
SERENISSIMI REGIS
GEORGII
FLORENTI

TRCTATUM HUNC D. D. D.

IS. NEWTON.

AUCTORIS PRÆFATIO AD LECTOREM.

CUM *veteres* mechanicam (*uti auctor est* Pappus) *in rerum naturalium investigatione maximi fecerint; & recentiores, missis formis substantialibus & qualitatibus occultis, phænomena naturæ ad leges mathematicas revocare aggressi sint: Visum est in hoc tractatu* mathesim *excolere, quâtenus ea ad* philosophiam *spectat.* Mechanicam *verò duplicem veteres constituerunt:* rationalem, *quæ per demonstrationes accuratè procedit, &* practicam. *Ad practicam spectant artes omnes manuales, à quibus utique* mechanica *nomen mutuata est. Cum autem artifices parùm accuratè operari soleant, fit ut* mechanica *omnis à* geometriâ *ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad* geometriam *referatur, quicquid minùs accuratum ad* mechanicam. *Attamen errores non sunt artis, sed artificum. Qui minùs accuratè operatur, imperfectior est mechanicus, & si quis accuratissimè operari posset, hic foret mechanicus omnium perfectissimus. Nam & linearum rectarum & circulorum descriptiones, in quibus* geometria *fundatur, ad* mechanicam *pertinent. Has lineas describere* geometria *non docet, sed postulat. Postulat enim ut tyro easdem accuratè describere prius didicerit, quam limen attingat* geometriæ; *dein quomodo per has operationes problemata solvantur, docet; rectas & circulos describere problemata sunt, sed non geometrica. Ex* mechanica *postulatur horum solutio, in* geometria *docetur solutorum usus. Ac gloriatur* geometria *quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præstet. Fundatur igitur* geometria *in praxi mechanica, & nihil aliud est quam* mechanicæ universalis *pars illa, quæ artem mensurandi accuratè*

curatè proponit ac demonstrat. Cum autem artes manuales in corporibus movendis præcipuè versentur, fit ut geometria *ad magnitudinem*, mechanica *ad motum vulgo referatur. Quo sensu* mechanica rationalis *erit scientia motuum, qui ex viribus quibuscunque resultant, & virium quæ ad motus quoscunque requiruntur, accuratè proposita ac demonstrata. Pars hæc* mechanicæ *à veteribus in* potentiis quinque *ad artes manuales spectantibus exculta fuit, qui gravitatem (cum potentia manualis non sit) vix aliter quam in ponderibus per potentias illas movendis considerarunt. Nos autem non artibus sed philosophiæ consulentes, deque potentiis non manualibus sed naturalibus scribentes, ea maximè tractamus, quæ ad gravitatem, levitatem, vim elasticam, resistentiam fluidorum & ejusmodi vires seu attractivas seu impulsivas spectant: Et eâ propter, hæc nostra tanquam philosophiæ principia mathematica proponimus. Omnis enim philosophiæ difficultas in eo versari videtur, ut à phænomenis motuum investigemus vires naturæ, deinde ab his viribus demonstremus phænomena reliqua. Et huc spectant propositiones generales, quas libro primo & secundo pertractavimus. In libro autem tertio exemplum hujus rei proposuimus per explicationem systematis mundani. Ibi enim, ex phænomenis cœlestibus, per propositiones in libris prioribus mathematicè demonstratas, derivantur vires gravitatis, quibus corpora ad solem & planetas singulos tendunt. Deinde ex his viribus per propositiones etiam mathematicas, deducuntur motus planetarum, cometarum, lunæ & maris. Utinam cætera naturæ phænomena ex principiis mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent, ut nonnihil suspicer ea omnia ex viribus quibusdam pendere posse, quibus corporum particulæ per causas nondum cognitas vel in se mutuò impelluntur & secundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, philosophi hactenus naturam frustrà tentarunt. Spero autem quod vel huic philosophandi modo, vel veriori alicui, principia hîc posita lucem aliquam præbebunt.*

In his edendis, vir acutissimus & in omni literarum genere eruditissimus Edmundus Halleius *operam navavit, nec solum typothetarum sphalmata correxit & schemata incidi curavit sed etiam auctor fuit, ut horum editionem aggrederer. Quippe cum demonstratam a*

me

me figuram orbium cœlestium impetraverat, rogare non destitit, ut eandem cum Societate Regali *communicarem, quæ deinde hortatibus & benignis suis auspiciis effecit, ut de eâdem in lucem emittendâ cogitare inciperem. At postquam motuum lunarium inæqualitates aggressus essem, deinde etiam alia tentare cœpissem, quæ ad leges & mensuras gravitatis & aliarum virium, & figuras à corporibus secundum datas quascunque leges attractis describendas, ad motus corporum plurium inter se, ad motus corporum in mediis resistentibus, ad vires, densitates & motus mediorum, ad orbes cometarum & similia spectant, editionem in aliud tempus differendam esse putavi, ut cætera rimarer & unà in publicum darem. Quæ ad motus lunares spectant (imperfecta cum sint) in corollariis propositionis* LXVI. *simul complexus sum, ne singula methodo prolixiore quam pro rei dignitate proponere, & sigillatim demonstrare tenerer, & seriem reliquarum propositionum interrumpere. Nonnulla serò inventa locis minùs idoneis inserere malui, quam numerum propositionum & citationes mutare. Ut omnia candidè legantur & defectus in materiâ tam difficili non tam reprehendatur, quam novis lectorum conatibus investigentur, & benignè suppleantur, enixè rogo.*

Dabam *Cantabrigiæ*, e Collegio
S. Trinitatis, Maii 8. 1686.

IS. NEWTON.

AUCTORIS PRÆFATIO IN EDITIONEM SECUNDAM.

IN hâc ſecundâ Principiorum editione multa ſparſim emandantur, & nonnulla adjiciuntur. In libri primi ſectione II. *inventio virium, quibus corpora in orbibus datis revolvi poſſint, facilior redditur & amplior. In libri ſecundi ſectione* VII. *theoria reſiſtentiæ fluidorum accuratiùs inveſtigatur, & novis experimentis confirmatur. In libro tertio theoria lunæ & præceſſio æquinoctiorum ex principiis ſuis pleniùs deducuntur, & theoria cometarum pluribus & accuratiùs computatis orbium exemplis confirmatur.*

Dabam *Londini*,
Mar. 28. 1713.

IS. NEWTON.

EDI-

EDITORIS PRÆFATIO
IN
EDITIONEM SECUNDAM.

NEWTONIANÆ philosophiæ novam tibi, lector benevole, diuque desideratam editionem, plurimùm nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potissimum contineantur in hoc opere celeberrimo, intelligere potes ex indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipsa te ferè docebit auctoris præfatio. Reliquum est, ut adjiciantur nonnulla de methodo hujus philosophiæ.

Qui physicam tractandam susceperunt, ad tres ferè classes revocari possunt. Extiterunt enim, qui singulis rerum speciebus qualitates specificas & occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum singulorum operationes, ignotâ quâdam ratione, pendere voluerunt. In hoc posita est summa doctrinæ scholasticæ, ab *Aristotele* & Peripateticis derivatæ: Affirmant utique singulos effectus ex corporum singularibus naturis oriri; at unde sint illæ naturæ non docent; nihil itaque docent. Cumque toti sint in rerum nominibus, non in ipsis rebus; sermonem quendam philosophicum censendi sunt adinvenisse, philosophiam tradidisse non sunt censendi.

Alii ergo melioris diligentiæ laudem consequi sperarunt rejecta vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque materiam universam homogeneam esse, omnem verò formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium simplicissimis quibusdam & intellectu facillimis affectionibus oriri. Et rectè quidem progressio instituitur à simplicioribus ad magis composita, si particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam quos ipsa tribuit natura. Verùm ubi licentiam sibi assumunt, ponendi quascunque libet ignotas partium figuras & magnitudines, incertosque situs & motus; quin & fingendi fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrimè permeent, omnipotente prædita

ta subtilitate, motibusque occultis agitata; jam ad somnia delabuntur, neglectâ rerum constitutione verâ: quæ sanè frustra petenda est ex fallacibus conjecturis, cum vix etiam per certissimas observationes investigari possit. Qui speculationum suarum fundamentum desumunt ab hypothesibus; etiamsi deinde secundum leges mechanicas accuratissimè procedant; fabulam quidem elegantem fortè & venustam, fabulam tamen concinnare dicendi sunt.

Relinquitur adeo tertium genus, qui philosophiam scilicet experimentalem profitentur. Hi quidem ex simplicissimis quibus possunt principiis rerum omnium causas derivandas esse volunt: nihil autem principii loco assumunt, quod nondum ex phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheses non comminiscuntur, neque in physicam recipiunt, nisi ut quæstiones de quarum veritate disputetur. Duplici itaque methodo incedunt, analyticâ & syntheticâ. Naturæ vires legesque virium simpliciores ex selectis quibusdam phænomenis per analysin deducunt, ex quibus deinde per synthesin reliquorum constitutionem tradunt. Hæc illa est philosophandi ratio longè optima, quam præ cæteris meritò amplectendum censuit celeberrimus auctor noster. Hanc solam utique dignam judicavit, in quâ excolendâ atque adornandâ operam suam collocaret. Hujus igitur illustrissimum dedit exemplum, mundani nempe systematis explicationem è theoriâ gravitatis felicissimè deductam. Gravitatis virtutem universis corporibus inesse, suspicati sunt vel finxerunt alii: primus ille & solus ex apparentiis demonstrare potuit, & speculationibus egregiis firmissimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis viros, præjudiciis quibusdam plus æquo occupatos, huic novo principio ægrè assentiri potuisse, & certis incerta identidem prætulisse. Horum famam vellicare non est animus: tibi potius, benevole lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus tute ipse judicium non iniquum feras.

Igitur ut argumenti sumatur exordium à simplicissimis & proximis; dispiciamus paulisper qualis sit in terrestribus natura gravitatis, ut deinde tutiùs progrediamur ubi ad corpora cælestia, longissimè à sedibus nostris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes philosophos, corpora universa circumterrestria gravitare in terram. Nulla dari corpora verè levia, jamdudum confirmavit experientia

rientia multiplex. Quæ dicitur levitas relativa, non eſt vera levitas, ſed apparens ſolummodo; & oritur à præpollente gravitate corporum contiguorum.

Porrò, ut corpora univerſa gravitent in terram, ita terra viciſſim in corpora æqualiter gravitat; gravitatis enim actionem eſſe mutuam & utrinque æqualem, ſic oſtenditur. Diſtinguatur terræ totius moles in binas quaſcunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam ſi pondera partium non eſſent in ſe mutuò æqualia; cederet pondus minus majori, & partes conjunctæ pergerent rectâ moveri ad infinitum, verſus plagam in quam tendit pondus majus: omninò contra experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio eſſe conſtituta: hoc eſt, gravitatis actionem eſſe mutuam & utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter à centro terræ diſtantium, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, è quiete per ponderum vires cadentium: nam vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent eſſe proportionales quantitatibus materiæ movendæ. Jam verò corpora univerſa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quod in vacuo *Boyliano* temporibus æqualibus æqualia ſpatia cadendo deſcribunt, ſublata ſcilicet aëris reſiſtentia: accuratiùs autem comprobatur per experimenta pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cum corpora in terram & terra viciſſim in corpora momentis æqualibus gravitent; terræ pondus in unumquodque corpus, ſeu vis qua corpus terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejuſdem in terram. Hoc autem pondus erit ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis qua corpus unumquodque terram attrahit, ſive corporis vis abſoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo & componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: ſiquidem aucta vel diminuta mole materiæ, oſtenſum eſt, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque telluris ex conjunctis partium actionibus conflari cenſenda erit; atque adeò corpora omnia terreſtria ſe mutuò trahere oportet viribus abſolutis, quæ ſint in ratione materiæ tra-

hentis. Hæc eſt natura gravitatis apud terram: videamus jam qualis ſit in cœlis.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus à viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare; naturæ lex eſt ab omnibus recepta philoſophis. Inde verò ſequitur, corpora quæ in curvis moventur, atque adeò de lineis rectis orbitas ſuas tangentibus jugiter abeunt, vi aliqua perpetuò agente retineri in itinere curvilineo. Planetis igitur in orbibus curvis revolventibus neceſſariò aderit vis aliqua, per cujus actiones repetitas indeſinenter à tangentibus deflectantur.

Jam illud concedi æquum eſt, quod mathematicis rationibus colligitur & certiſſimè demonſtratur; corpora nempe omnia, quæ moventur in lineâ aliquâ curvâ in plano deſcriptâ, quæque radio ducto ad punctum vel quieſcens vel utcumque motum deſcribunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri à viribus quæ ad idem punctum tendent. Cum igitur in confeſſo ſit apud aſtronomos, planetas primarios circùm ſolem, ſecundarios verò circum ſuos primarios, areas deſcribere temporibus proportionales; conſequens eſt ut vis illa, quâ perpetuò detorquentur à tangentibus rectilineis & in orbitis curvilineis revolvi coguntur, verſus corpora dirigatur quæ ſita ſunt in orbitarum centris. Hæc itaque vis non ineptè vocari poteſt, reſpectu quidem corporis revolventis, centripeta; reſpectu autem corporis centralis, attractiva; à quacunque demùm causâ oriri fingatur.

Quin & hæc quoque concedenda ſunt, & mathematicè demonſtrantur: Si corpora plura motu æquabili revolvantur in circulis concentricis, & quadratura temporum periodicorum ſint ut cubi diſtantiarum à centro communi; vires centripetas revolventium fore reciprocè ut quadrata diſtantiarum. Vel, ſi corpora revolvantur in orbitis quæ ſunt circulis finitimæ, & quieſcant orbitarum apſides; vires centripetas revolventium fore reciprocè ut quadrata diſtantiarum. Obtinere caſum alterutrum in planetis univerſis conſentiunt aſtronomi. Itaque vires centripetæ planetarum omnium ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum ab orbium centris. Si quis objiciat planetarum, & lunæ præſertim, apſides non penitùs quieſcere; ſed motu quodam lento ferri in conſequentia: reſponderi

poteſt

poteſt, etiamſi concedamus hunc motum tardiſſimum exinde profectum eſſe quod vis centripetæ proportio aberret aliquantùm à duplicata; aberrationem illam per computum mathematicum inveniri poſſe & planè inſenſibilem eſſe. Ipſa enim ratio vis centripetæ lunaris, quæ omnium maximè turbari debet, paululum quidem duplicatam ſuperabit; ad hanc vero ſexaginta ferè vicibus propiùs accedet quàm ad triplicatam. Sed verior erit reſponſio, ſi dicamus hanc apſidum progreſſionem, non ex aberratione à duplicatâ proportione, ſed ex aliâ prorſus diversâ causâ oriri, quemadmodum egregiè commonſtratur in hac philoſophia. Reſtat ergo ut vires centripetæ, quibus planetæ primarii tendunt versùs ſolem & ſecundarii versùs primarios ſuos, ſint accuratè ut quadrata diſtantiarum reciprocè.

Ex iis quæ hactenus dicta ſunt, conſtat planetas in orbitis ſuis retineri per vim aliquam in ipſos perpetuò agentem: conſtat vim illam dirigi ſemper versùs orbitarum centra: conſtat hujus efficaciam augeri in acceſſu ad centrum, diminui in receſſu ob eodem: & augeri quidem in eadem proportione qua diminuitur quadratum diſtantiæ, diminui in eadem proportione quâ diſtantiæ quadratum augetur. Videamus jam, comparatione inſtitutâ inter planetarum vires centripetas & vim gravitatis, annon ejuſdem fortè ſint generis. Ejuſdem verò generis erunt, ſi deprehendantur hinc & inde leges eædem, eædemque affectiones. Primò itaque lunæ, quæ nobis proxima eſt, vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ à corporibus è quiete demiſſis dato tempore ſub ipſo motus initio deſcribuntur, ubi à viribus quibuſcunque urgentur, proportionalia ſunt ipſis viribus: hoc utique conſequitur ex ratiociniis mathematicis. Erit igitur vis centripeta lunæ in orbitâ ſuâ revolventis, ad vim gravitatis in ſuperficie terræ, ut ſpatium quod tempore quàm minimo deſcriberet luna deſcendendo per vim centripetam versùs terram, ſi circulari omni motu privari fingeretur ad ſpatium quod eodem tempore quàm minimo deſcribit grave corpus in vicinia terræ, per vim gravitatis ſuæ cadendo. Horum ſpatiorum prius æquale eſt arcûs à luna per idem tempus deſcripti ſinui verſo, quippe qui lunæ tranſlationem de tangente, factam à vi centripeta, metitur; atque adeò computari poteſt ex datis tùm lunæ

tempore periodico, tùm diſtantia ejus a centro terræ. Spatium poſterius invenitur per experimenta pendulorum, quamadmodùm docuit *Hugenius*. Inito itaque calculo, ſpatium prius ad ſpatium poſterius, ſeu vis centripeta lunæ in orbita ſua revolventis ad vim gravitatis in ſuperficie terræ, erit ut quadratum ſemidiametri terræ ad orbitæ ſemidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ ſuperiùs oſtenduntur, vis centripeta lunæ in orbita ſua revolventis ad vim lunæ centripetam propè terræ ſuperficiem. Vis itaque centripeta propè terræ ſuperficiem æqualis eſt vi gravitatis. Non ergo diverſæ ſunt vires, ſed una atque eadem, ſi enim diverſæ eſſent, corpora viribus conjunctis duplò celeriùs in terram caderent quàm ex vi ſolâ gravitatis. Conſtat igitur vim illam centripetam, quâ luna perpetuò de tangente vel trahitur vel impellitur & in orbita retinetur, ipſam eſſe vim gravitatis terreſtris ad lunam uſque pertingentem. Et rationi quidem conſentaneum eſt ut ad ingentes diſtantias illa ſeſe virtus extendat, cum nullam ejus ſenſibilem imminutionem, vel in altiſſimis montium cacuminibus, obſervare licet. Gravitat itaque luna in terram: quin & actione mutua, terra viciſſim in lunam æqualiter gravitat: id quod abundè quidem confirmatur in hac philoſophiâ, ubi agitur de maris æſtu & æquinoctiorum præceſſione, ab actione tum lunæ tum ſolis in terram oriundus. Hinc & illud tandem edocemur, quâ nimirùm lege vis gravitatis decreſcat in majoribus à tellure diſtantiis. Nam cùm gravitas non diverſa ſit à vi centripeta lunari; hæc verò ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ; diminuetur & gravitas in eadem ratione.

Progrediamur jam ad planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa ſolem & ſecundariorum circa jovem & ſaturnum ſunt phænomena generis ejuſdem ac revolutio lunæ circa terram, quoniam porrò demonſtratum eſt vires centripetas primariorum dirigi versùs centrum ſolis, ſecundariorum versùs centra jovis & ſaturni, quemadmodum lunæ vis centripeta versùs terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centris, quemadmodum vis lunæ eſt ut quadratum diſtantiæ à terra: concludendum erit eandem eſſe naturam univerſis. Itaque ut luna gravitat in terram, & terra viciſſim in lunam; ſic etiam gravitabunt omnes ſecundarii in primarios ſuos, & primarii viciſſim

in

in ſecundarios; ſic & omnes primarii in ſolem, & ſol viciſſim in primarios.

Igitur ſol in planetas univerſos gravitat & univerſi in ſolem. Nam ſecundarii dum primarios ſuos comitantur, revolvuntur intereà circùm ſolem unà cum primariis. Eodem itaque argumento, utriuſque generis planetæ gravitant in ſolem, & ſol in ipſos. Secundarios verò planetas in ſolem gravitare abundè inſuper conſtat ex inæqualitatibus lunaribus; quarum accuratiſſimam theoriam, admiranda ſagacitate patefactam, in tertio hujus operis libro expoſitam habemus.

Solis virtutem attractivam quoquoverſum propagari ad ingentes uſque diſtantias, & ſeſe diffundere ad ſingulas circumjecti ſpatii partes, apertiſſimè colligi poteſt ex motu cometarum; qui ab immenſis intervallis profecti feruntur in viciniam ſolis, & nonnunquam adeò ad ipſum proximè accedunt ut globum ejus, in periheliis ſuis verſantes, tantùm non contingere videantur. Horum theoriam ab aſtronomis antehac fruſtrà quæſitam, noſtro tandem ſæculo faciliter inventam & per obſervationes certiſſimè demonſtratam, præſtantiſſimo noſtro auctori debemus. Patet igitur cometas in ſectionibus conicis umbilicos in centro ſolis habentibus moveri, & radiis ad ſolem ductis areas temporibus proportionales deſcribere. Ex hiſce verò phænomenis manifeſtum eſt & mathematicè comprobatur, vires illas, quibus cometæ retinentur in orbitis ſuis, reſpicere ſolem & eſſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro. Gravitant itaque cometæ in ſolem: atque adeò ſolis vis attractiva non tantùm ad corpora planetarum in datis diſtantiis & in eodem ferè plano collocata, ſed etiam ad cometas in diverſiſſimis cœlorum regionibus & in diverſiſſimis diſtantiis poſitos pertingit. Hæc igitur eſt natura corporum gravitantium, ut vires ſuas edant ad omnes diſtantias in omnia corpora gravitantia. Inde verò ſequitur, planetas & cometas univerſos ſe mutuò trahere, & in ſe mutuò graves eſſe: quod etiam confirmatur ex perturbatione jovis & ſaturni, aſtronomis non incognita, & ab actionibus horum planetarum in ſe invicem oriunda; quin & ex motu illo lentiſſimo apſidum, qui ſuprà memoratus eſt, quique à causâ conſimili proficiſcitur.

Eo demùm pervenimus ut dicendum ſit, & terram & ſolem & corpora omnia cœleſtia, quæ ſolem comitantur, ſe mutuò attrahere. Sin-

gulorum ergo particulæ, quæque minimæ, vires ſuas attractivas habebunt, pro quantitate materiæ pollentes; quamadmodum ſuprà de terreſtribus oſtenſum eſt. In diverſis autem diſtantiis, erunt & harum vires in duplicata ratione diſtantiarum reciprocè: nam ex particulis hac lege trahentibus componi debere globos eadem lege trahentes, mathematicè demonſtratur.

Concluſiones præcedentes huic innituntur Axiomati, quod à nullis non recipitur philoſophis; effectuum ſcilicet ejuſdem generis, quorum nempe quæ cognoſcuntur proprietates eædem ſunt, eaſdem eſſe cauſas & eaſdem eſſe proprietates quæ nondùm cognoſcuntur. Quis enim dubitat, ſi gravitas ſit cauſa deſcenſûs lapidis in *Europa*, quin eadem ſit cauſa deſcenſus in *America*? Si gravitas mutua fuerit inter lapidem & terram in *Europa*; quis negabit mutuam eſſe in *America*? Si vis attractiva lapidis & terræ componatur, in *Europa*, ex viribus attractivis partium; quis negabit ſimilem eſſe compoſitionem in *America*? Si attractio terræ ad omnia corporum genera & ad omnes diſtantias propagetur in *Europa*; quidni pariter propagari dicamus in *America*? In hac regula fundatur omnis philoſophia: quippe quâ ſublatâ nihil affirmare poſſimus de univerſis. Conſtitutio rerum ſingularum innoteſcit per obſervationes & experimenta: inde verò non niſi per hanc regulam de rerum univerſarum naturâ judicamus.

Jam cùm gravia ſint omnia corpora, quæ apud terram vel in cœlis reperiuntur, de quibus experimenta vel obſervationes inſtituere licet; omninò dicendum erit, gravitatem corporibus univerſis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non ſint extenſa, mobilia & impenetrabilia; ita nulla concipi debere, quæ non ſint gravia. Corporum extenſio, mobilitas, & impenetrabilitas non niſi per experimenta, innoteſcunt; eodem planè modo gravitas innoteſcit. Corpora omnia de quibus obſervationes habemus, extenſa ſunt & mobilia & impenetrabilia: & inde concludimus corpora univerſa, etiam illa de quibus obſervationes non habemus, extenſa eſſe & mobilia & impenetrabilia. Ita corpora omnia ſunt gravia, de quibus obſervationes habemus: & inde concludimus corpora univerſa, etiam illa de quibus obſervationes non habemus, gravia eſſe. Si quis dicat corpora ſtellarum inerrantium non eſſe gravia, quandoquidem eorum gravitas nondum eſt obſervata; eodem argumento dicere licebit

cebit neque extenſa eſſe, nec mobilia, nec impenetrabilia, cum hæ fixarum affectiones nondum ſint obſervatæ. Quid opus eſt verbis? inter primarias qualitates corporum univerſorum vel gravitas habebit locum; vel extenſio, mobilitas, & impenetrabilitas non habebunt. Et natura rerum vel rectè explicabitur per corporum gravitatem, vel non rectè explicabitur per corporum extenſionem, mobilitatem, & impenetrabilitatem.

Audio nonnullos hanc improbare concluſionem, & de occultis qualitatibus neſcio quid muſſitare. Gravitatem ſcilicet occultum eſſe quid, perpetuò argutari ſolent; occultas verò cauſas procul eſſe ablegandas à philoſophiâ. His autem facilè reſpondetur; occultas eſſe cauſas, non illas quidem quarum exiſtentia per obſervationes clariſſimè demonſtratur, ſed has ſolùm quarum occulta eſt & ficta exiſtentia nondùm verò comprobata. Gravitas ergo non erit occulta cauſa motuum cœleſtium; ſiquidem ex phænomenis oſtenſum eſt, hanc virtutem reverà exiſtere. Hi potius ad occultas confugiunt cauſas, qui neſcio quos vortices, materiæ cujuſdam prorsùs fictitiæ & ſenſibus omninò ignotæ, motibus iiſdem regendis præficiunt.

Ideone autem gravitas occulta cauſa dicetur, eoque nomine rejicietur è philoſophiâ, quod cauſa ipſius gravitatis occulta eſt & nondum inventa? Qui ſic ſtatuunt, videant nequid ſtatuant abſurdi, unde totius tandem philoſophiæ fundamenta convellantur. Etenim cauſæ continuo nexu procedere ſolent à compoſitis ad ſimpliciora: ubi ad cauſam ſimpliciſſimam perveneris, jam non licebit ulteriùs progredi. Cauſæ igitur ſimpliciſſimæ nulla dari poteſt mechanica explicatio: ſi daretur enim, cauſa nondum eſſet ſimpliciſſima. Has tu proinde cauſas ſimpliciſſimas appellabis occultas, & exulare jubebis? Simul verò exulabunt & ab his proximè pendentes & quæ ab illis porrò pendent, uſque dum à cauſis omnibus vacua fuerit & probè purgata philoſophia.

Sunt qui gravitatem præter naturam eſſe dicunt, & miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam eſſe volunt, cùm in phyſicâ præternaturales cauſæ locum non habeant. Huic ineptæ prorſus objectioni diluendæ, quæ & ipſa philoſophiam ſubruit univerſam, vix operæ pretium eſt immorari. Vel enim gravitatem corporibus omnibus inditam eſſe negabunt: quod tamen dici non poteſt: vel eo

nomine

nomine præter naturam eſſe affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus atque ideò ex cauſis mechanicis originem non habeat. Dantur certè primariæ corporum affectiones; quæ quoniam ſunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon & hæ omnes ſint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint verò qualis ſit deinde futura philoſophia.

Nonnulli ſunt quibus hæc tota phyſica cœleſtis vel ideò minùs placet, quòd cum *Carteſii* dogmatibus pugnare & vix conciliari poſſe videatur. His ſua licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem quam ſibi concedi poſtulant. NEWTONIANAM itaque philoſophiam, quæ nobis verior habetur, retinere & amplecti licebit, & cauſas ſequi per phænomena comprobatas, potiùs quam fictas & nondum comprobatas. Ad veram philoſophiam pertinet, rerum naturas ex cauſis verè exiſtentibus derivare: eas verò leges quærere, quibus voluit ſummus opifex hunc mundi pulcherrimum ordinem ſtabilire; non eas quibus potuit, ſi ita viſum fuiſſet. Rationi enim conſonum eſt, ut à pluribus cauſis, ab invicem nonnihil diverſis, idem poſſit effectus proficiſci: hæc autem vera erit cauſa, ex qua verè atque actu proficiſcitur; reliquæ locum non habent in philoſophiâ verâ. In horologiis automatis idem indicis horarii motus vel ab appenſo pondere vel ab intus concluſo elatere oriri poteſt. Quod ſi oblatum horologium reverà ſit inſtructum pondere; ridebitur qui finget elaterem, & ex hypotheſi ſic præproperè confictâ motum indicis explicare ſuſcipiet: oportuit enim internam machinæ fabricam penitiùs perſcrutari, ut ita motûs propoſiti principium verum exploratum habere poſſet. Idem vel non abſimile feretur judicium de philoſophis illis, qui materiâ quâdam ſubtiliſſimâ cœlos eſſe repletos, hanc autem in vortices indeſinenter agi voluerunt. Nam à phænomenis vel accuratiſſimè ſatisfacere poſſent ex hypotheſibus ſuis; veram tamen philoſophiam tradidiſſe, & veras cauſas motuum cæleſtium inveniſſe nondum dicendi ſunt; niſi vel has reverà exiſtere, vel ſaltem alias non exiſtere demonſtraverint. Igitur ſi oſtenſum fuerit, univerſorum corporum attractionem habere verum locum in rerum naturâ; quinetiam oſtenſum fuerit, quâ ratione motus omnes cæleſtes abinde ſolutionem recipiant; vana fuerit & meritò deridenda objectio,

objectio, si quis dixerit eosdem motus per vortices explicari debere, etiamsi id fieri posse vel maximè concesserimus. Non autem concedimus: nequeunt enim illo pacto phænomena per vortices explicari; quod ab auctore nostro abundè quidem & clarissimis rationibus evincitur; ut somnis plùs æquò indulgeant oporteat, qui ineptissimo figmento resarciendo, novisque porrò commentis ornando infelicem operam addicunt.

Si corpora planetarum & cometarum circa solem deferantur à vorticibus; oportet corpora delata & vorticum partes proximè ambientes eadem velocitate eademque cursûs determinatione moveri, & eandem habere densitatem vel eandem vim inertiæ pro mole materiæ. Constat verò planetas & cometas, dùm versantur in iisdem regionibus cœlorum, velocitatibus variis variâque cursûs determinatione moveri. Necessariò itaque sequitur, ut fluidi cœlestis partes illæ, quæ sunt ad easdem distantias à sole, revolvantur eodem tempore in plagas diversas cum diversis velocitatibus: etenim aliâ opus erit directione & velocitate, ut transire possint planetæ; aliâ, ut transire possint cometæ. Quod cùm explicari nequeat; vel fatendum erit, universa corpora cœlestia non deferri à materia vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos esse non ab uno eodemque vortice, sed à pluribus qui ab invicem diversi sint, idemque spatium soli circumjectum pervadant.

Si plures vortices in eodem spatio contineri, & sese mutuò penetrare motibusque diversis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent esse conformes delatorum corporum motibus, qui sunt summè regulares, & peraguntur in sectionibus conicis nunc valdè eccentricis, nunc ad circulorum proximè formam accedentibus; jure quærendum erit, qui fieri possit, ut iidem integri conserventur nec ab actionibus materiæ occursantis per tot sæcula quicquam perturbentur. Sanè si motus hi fictitii sunt magis compositi & difficiliùs explicantur, quam veri illi motus planetarum & cometarum; frustra mihi videntur in philosophiam recipi: omnis enim causa debet esse effectu suo simplicior. Concessa fabularum licentia, affirmaverit aliquis planetas omnes & cometas circumcingi atmosphæris, ad instar telluris nostræ; quæ quidem hypothesis rationi magis consentanea

 vide-

videbitur quam hypothesis vorticum. Affirmaverit deinde has atmosphæras, ex naturâ suâ, circa solem moveri & sectiones conicas describere; qui sanè motus multò faciliùs concipi potest, quàm consimilis motus vorticum se invicem permeantium. Denique planetas ipsos & cometas circa solem deferri ab atmosphæris suis credendum esse statuat, & ob repertas motuum cœlestium causas triumphum agat. Quisquis autem hanc fabulam rejiciendam esse putet, idem & alteram fabulam rejiciet: nam ovum non est ovo similius, quàm hypothesis atmosphærarum hypothesi vorticum.

Docuit *Galilæus*, lapidis projecti & in parabola moti deflectionem à cursu rectilineo oriri à gravitate lapidis in terram, ab occulta scilicet qualitate. Fieri tamen potest ut alius aliquis, nasi acutioris philosophus, causam aliam comminiscatur. Finget igitur ille materiam quandam subtilem, quæ nec visu, nec tactu, neque ullo sensu percipitur, versari in regionibus quæ proximè contingunt telluris superficiem. Hanc autem materiam, in diversas plagas, variis & plerumque contrariis motibus ferri, & lineas parabolicas describere contendet. Deinde vero lapidis deflectionem pulchrè sic expediet, & vulgi plausum merebitur. Lapis, inquiet, in fluido illo subtili natat & cursui ejus obsequendo, non potest non eandem unà semitam describere. Fluidum verò movetur in lineis parabolicis; ergo lapidem in parabola moveri necesse est. Quis nunc non mirabitur acutissimum hujusce philosophi ingenium, ex causis mechanicis, materiâ scilicet & motu, phænomena naturæ ad vulgi etiam captum præclarè deducentis? Quis verò non subsannabit bonum illum *Galilæum*, qui magno molimine mathematico qualitates occultas, è philosophia feliciter exclusas, denuò revocare sustinuerit? Sed pudet nugis diutiùs immorari.

Summa rei huc tandem redit: cometarum ingens est numerus; motus eorum sunt summè regulares, & easdem leges cum planetarum motibus observant. Moventur in orbibus conicis, hi orbes sunt valdè admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes cœlorum partes, & planetarum regiones liberrimè pertranseunt, & sæpè contrà signorum ordinem incedunt. Hæc phænomena certissimè confirmantur ex observationibus astronomicis: & per vortices nequeunt explicari. Imò, ne quidem cum vorticibus planetarum consistere possunt. Cometarum

metarum motibus omninò locus non erit; nisi materia illa fictitia penitus è cœlis amoveatur.

Si enim planetæ circùm solem à vorticibus devehuntur; vorticum partes, quæ proximè ambiunt unumquemque planetam, ejusdem densitatis erunt ac planeta; uti suprà dictum est. Itaque materia illa omnis quæ contigua est orbis magni perimetro, parem habebit ac tellus densitatem: quæ verò jacet intrà orbem magnum atque orbem saturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut constitutio vorticis permanere possit, debent partes minùs densæ centrum occupare, magis densæ longiùs à centro abire. Cum enim planetarum tempora periodica sint in ratione sesquiplicata distantiarum à sole, oportet partium vorticis periodos eandem rationem servare. Inde verò sequitur, vires centrifugas harum partium fore reciprocè ut quadrata distantiarum. Quæ igitur majore intervallo distant à centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde si minùs densæ fuerint, necesse est ut cedent vi majori, quâ partes centro propiores ascendere conantur. Ascendent ergo densiores, descendent minus densæ, & locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit disposita atque ordinata materia fluida totius vorticis, ut conquiescere jam possit in æquilibrio constituta. Si bina fluida, quorum diversa est densitas, in eodem vase continentur; utique futurum est ut fluidum, cujus major est densitas, majore vi gravitatis infimum petat locum: & ratione non absimili omninò dicendum est, densiores vorticis partes majore vi centrifugâ petere supremum locum. Tota igitur illa & multò maxima pars vorticis, quæ jacet extrà telluris orbem, densitatem habebit atque adeò vim inertiæ pro mole materiæ, quæ non minor erit quàm densitas & vis inertiæ telluris: inde verò cometis trajectis orietur ingens resistentia, & valde admodum sensibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitùs sistere atque absorbere posse meritò videatur. Constat autem ex motu cometarum prorsùs regulari, nullam ipsos resistentiam pati quæ vel minimùm sentiri potest; atque adeò neutiquam in materiam ullam incursare, cujus aliqua sit vis resistendi, vel proinde cujus aliqua sit densitas seu vis inertiæ. Nam resistentia mediorum oritur vel ab inertia materiæ fluidæ, vel à defectu lubricitatis. Quæ oritur à defectu lubricitatis, admodum exigua est; & sanè vix observari potest in fluidis vulgò notis, nisi valdè

tenacia fuerint ad instar olei & mellis. Resistentia quæ sentitur in aëre, aqua, hydrargyro, & hujusmodi fluidis non tenacibus ferè tota est prioris generis; & minui non potest per ulteriorem quemcunque gradum subtilitatis, manente fluidi densitate vel vi inertiæ, cui semper proportionalis est hæc resistentia; quamadmodum clarissimè demonstratum est ab auctore nostro in peregregia resistentiarum theoriâ, quæ paulò nunc accuratiùs exponitur, hac secundâ vice, & per experimenta corporum cadentium pleniùs confirmatur.

Corpora progrediendo motum suum fluido ambienti paulatim communicant, & communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Est itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus vero communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, est ut fluidi densitas; ergo retardatio seu resistentia erit ut eadem fluidi densitas; neque ullo pacto tolli potest, nisi à fluido ad partes corporis posticas recurrente restituatur motus amissus. Hoc autem dici non poterit, nisi impressio fluidi in corpus ad partes posticas æqualis fuerit impressioni corporis in fluidum ad partes anticas, hoc est, nisi velocitas relativa quâ fluidum irruit in corpus à tergo, æqualis fuerit velocitati quâ corpus irruit in fluidum, id est, nisi velocitas absoluta fluidi recurrentis duplo major fuerit quam velocitas absoluta fluidi propulsi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli potest fluidorum resistentia, quæ oritur ab eorundem densitate & vi inertiæ. Itaque concludendum erit; fluidi cœlestis nullam esse vim inertiæ, cùm nulla sit vis resistendi: nullam esse vim quâ motus communicetur, cùm nulla sit vis inertiæ: nullam esse vim quâ mutatio quælibet vel corporibus singulis vel pluribus inducatur, cùm nulla sit vis quâ motus communicetur; nullam esse omninò efficaciam, cum nulla sit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc hypothesin, quæ fundamento planè destituitur, quæque naturæ rerum explicandæ ne minimùm quidem inservit, ineptissimam vocare liceat & philosopho prorsùs indignam. Qui cœlos materiâ fluidâ repletos esse volunt, hanc verò non inertem esse statuunt; hi verbis tollunt vacuum, re ponunt. Nam cum hujusmodi materia fluida ratione nullâ secerni possit ab inani spatio; disputatio tota fit de rerum nominibus, non de naturis. Quod si aliqui sint adeò usque dediti materiæ, ut spatium à corporibus vacuum nullo pacto admittendum

dum credere velint; videamus quo tandem oporteat illo pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, mundi per omnia pleni constitutionem ex voluntate dei profectam esse, propter eum finem, ut operationibus naturæ subsidium præsens haberi posset ab æthere subtilissimo cuncta permeante & implente; quod tamen dici non potest, siquidem jam ostensum est ex cometarum phænomenis, nullam esse hujus ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate dei profectam esse, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, siquidem diversa mundi constitutio eodem argumento pariter stabiliri posset: vel denique non dicent ex voluntate dei profectam esse, sed ex necessitate quâdam naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces sordidas gregis impurissimi. Hi sunt qui somniant fato universa regi, non providentia; materiam ex necessitate suâ semper & ubique extitisse, infinitam esse & æternam. Quibus positis; erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum necessitate omninò pugnat. Erit etiam immota: nam si necessariò moveatur in plagam aliquam determinatam; cum determinata aliqua velocitate; pari necessitate movebitur in plagam diversam cum diversa velocitate, in plagas autem diversas, cum diversis velocitatibus, moveri non potest; oportet igitur immotam esse. Neutiquam profectò potuit oriri mundus, pulcherrima formarum & motuum varietate distinctus, nisi ex liberrimâ voluntate cuncta providentis & gubernantis dei.

Ex hoc igitur fonte promanarunt illæ omnes quæ dicuntur naturæ leges: in quibus multa sanè sapientissimi consilii, nulla necessitatis apparent vestigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, sed observando atque experiendo addiscere debemus. Qui verè physicæ principia legesque rerum, sola mentis vi & interno rationis lumine fretum, invenire se posse confidit; hunc oportet vel statuere mundum ex necessitate fuisse, legesque propositas ex eadem necessitate sequi; vel si per voluntatem dei constitutus sit ordo naturæ, se tamen, homuncionem misellum, quid optimum factu sit perspectum habere. Sana omnis & vera Philosophia fundatur in phænomenis rerum: quæ si nos vel invitos & reluctantes ad hujusmodi principia deducunt in quibus clarissimè cernuntur consilium optimum & dominium summum sapientissimi & potentissimi entis; non erunt hæc ideò non admittenda principia, quod quibusdam forsan hominibus minus grata sunt futura.

tura. His vel miracula vel qualitates occultæ dicantur, quæ displi- cent: verum nomina malitiosè indita non sunt ipsis rebus vitio ver- tenda; nisi illud fateri tandem velint, utique debere philosophiam in atheismo fundari. Horum hominum gratiâ non erit labefactanda philosophia, siquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos & æquos judices præstantissima phi- losophandi ratio, quæ fundatur in experimentis & observationibus. Huic verò, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc opere præclaro illustrissimi nostri auctoris; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque problemata enodantis, & ad ea porrò pertingentis ad quæ nec spes erat humanam mentem as- surgere potuisse, meritò admirantur & suspiciunt quicunque paulò profundius in hisce rebus versati sunt. Claustris ergò reseratis, adi- tum nobis aperuit ad pulcherrima rerum mysteria. Systematis mun- dani compagem elegantissimam ita tandem patefecit & penitiùs perspectandam dedit; ut nec ipse, si nunc revivisceret, rex *Alphon- sus* vel simplicitatem vel harmoniæ gratiam in ea desideraret. Ita- que naturæ majestatem propiùs jam licet intueri, & dulcissima con- templatione frui, conditorem verò ac dominum universorum im- pensiùs colere & venerari, qui fructus est philosophiæ multò uber- rimus. Cæcum esse oportet, qui ex optimis & sapientissimis rerum structuris non statim videat fabricatoris omnipotentis infinitam sa- pientiam & bonitatem: insanum, qui profiteri nolit.

Extabit igitur eximium NEWTONI opus adversus atheorum im- petus munitissimum præsidium: neque enim alicundè feliciùs, quàm ex hac pharetra, contra impiam catervam tela depromseris. Hoc sensit pridem, & in peruditis concionibus anglicè latinèque editis, primus egregiè demonstravit vir in omni literarum genere præcla- rus idemque bonarum artium fautor eximius RICHARDUS BENT- LEIUS, seculi sui & Academiæ nostræ magnum ornamentum, Col- legii nostri *S. Trinitatis* magister dignissimus & integerrimus. Huic ego me pluribus nominibus obstrictum fateri debeo: huic & tuas quæ debentur gratias, lector benevole, non denegabis. Is enim, cum à longo tempore celeberrimi auctoris amicitiâ intimâ frueretur, (qua etiam apud posteros censeri non minoris æstimat, quàm propriis scriptis, quæ literato orbi in deliciis sunt inclarescere) ami-

ci

ci ſimul famæ & ſcientiarum incremento conſuluit. Itaque cum exemplaria prioris editionis rariſſima admodum & immani pretio coëmenda ſupereſſent; ſuaſit ille crebris efflagitationibus, & tantum non objurgando perpulit denique virum præſtantiſſimum, nec modeſtiâ minùs quàm eruditione ſummâ inſignem, ut novam hanc operis editionem, per omnia elimatam denuò & egregiis inſuper acceſſionibus ditatam, ſuis ſumptibus & auſpiciis prodire pateretur: mihi verò, pro jure ſuo, penſum non ingratum demandavit, ut quam poſſet emendatè id fieri curarem.

Cantabrigiæ,
Maii 12. 1713.

ROGERUS COTES Collegii *S. Trinitatis* ſocius, aſtronomiæ & philoſophiæ experimentalis profeſſor *Plumianus*.

AUCTORIS PRÆFATIO
IN
EDITIONEM TERTIAM.

IN *edtione hacce tertiâ, quam* Henricus Pemberton M. D. *vir harum rerum peritissimus curavit, nonnulla in libro secundo de resistentia mediorum paulò fusiùs explicantur quàm anteà, & adduntur experimenta nova de resistentia gravium quæ cadunt in aëre. In libro tertio argumentum quo lunam in orbe suo per gravitatem retineri probatur, paulò fusiùs exponitur: & novæ adduntur observationes de proportione diametrorum Jovis ad invicem à D.* Poundio *factæ. Adduntur etiam observationes aliquot cometæ illius qui anno* 1680. *apparuit, à D.* Kirk *mense Novembri in* Germania *habitæ, quæ nuper ad manus nostras venerunt, & quarum ope constet quàm propè orbes parabolici motibus cometarum respondent. Et orbita cometæ illius, computante* Halleio, *paulò accuratiùs determinatur quàm anteà, idque in ellipsi. Et ostenditur cometam in hac orbita elliptica, per novem cœlorum signa, non minùs accuratè cursum peregisse, quàm solent planetæ in orbitis ellipticis per astronomiam definitis moveri. Orbis etiam cometæ qui anno* 1723. *apparuit, à D.* Bradleio *astronomiæ apud* Oxonienses *Professore computatus adjicitur.*

IS. NEWTON.

Dabam *Londini*
Jan. 12. 1725-6

IN
VIRI PRÆSTANTISSIMI
ISAACI NEWTONI
OPUS HOCCE
MATHEMATICO-PHYSICUM,
Seculi Gentiſque noſtræ decus egregium.

EN tibi norma poli, & divæ libramina molis,
Computus en Jovis; & quas, dum primordia rerum
Pangeret, omniparens leges violare creator
Noluit, atque operum quæ fundamenta locârit.
Intima panduntur victi penetralia cæli,
Nec latet extremos quæ vis circumrotat orbes.
Sol ſolio reſidens ad ſe jubet omnia prono
Tendere deſcenſu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vaſtum per inane moveri;
Sed rapit immotis, ſe centro, ſingula gyris.
Jam patet horrificis quæ ſit via flexa cometis;
Jam non miramur barbati phænomena aſtri.
Diſcimus hinc tandem quâ causâ argentea Phœbe
Paſſibus haud æquis graditur; cur ſubdita nulli
Hactenus aſtronomo numerorum fræna recuſet:
Cur remeant nodi, curque auges progrediuntur.
Diſcimus & quantis refluum vaga Cynthia pontum
Viribus impellit, feſſis dum fluctibus ulvam
Deſerit, ac nautis ſuſpectas nudat arenas;
Alternis vicibus ſuprema ad littora pulſans.
Quæ toties animos veterum torſere ſophorum,
Quæque ſcholas fruſtra rauco certamine vexant,

***** Ob-

Obvia conſpicimus, nubem pellente matheſi.
Jam dubios nullâ caligine prægravat error,
Queis ſuperum penetrare domos atque ardua cœli
Scandere ſublimis genii conceſſit acumen.
Surgite mortales, terrenas mittite curas;
Atque hinc cœligenæ vires dignoſcite mentis,
A pecudum vitâ longè latéque remotæ.
Qui ſcriptis juſſit tabulis compeſcere cædes,
Furta & adulteria, & perjuræ crimina fraudis;
Quive vagis populis circundare mœnibus urbes
Auctor erat; Cererisve beavit munere gentes;
Vel qui curarum lenimen preſſit ab uvâ;
Vel qui Niliacâ monſtravit arundine pictos
Conſociare ſonos, oculiſque exponere voces;
Humanam ſortem minus extulit: utpote pauca
Reſpiciens miſeræ tantum ſolamina vitæ.
Jam vero ſuperis convivæ admittimur, alti
Jura poli tractare licet, jamque abdita cæcæ
Clauſtra patent terræ, rerumque immobilis ordo,
Et quæ præteriti latuerunt ſecula mundi.
Talia monſtrantem mecum celebrate camænis,
Vos ô cœlicolum gaudentes nectare veſci,
NEWTONUM clauſi reſerantem ſcrinia veri,
NEWTONUM Muſis charum, cui pectore puro
Phœbus adeſt, totoque inceſſit numine mentem:
Nec fas eſt propius mortali attingere divos.

EDM. HALLEY.

INDEX

INDEX CAPITUM
TOMI PRIMI.

DEFINITIONES. Pag. 1.

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS. 13.

DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.

SECT. I. *De methodo rationum primarum & ultimarum.* 62.
SECT. II. *De inventione virium centripetarum.* 89.
SECT. III. *De motu corporum in conicis sectionibus excentricis.* 153.
SECT. IV. *De inventione orbium ellipticorum, parabolicorum & hyperbolicorum ex umbilico dato.* 175.
SECT. V. *De inventione orbium ubi umbilicus neuter datur.* 188.
SECT. VI. *De inventione motuum in orbibus datis.* 259.
SECT. VII. *De corporum ascensu & descensu rectilineo.* 292.
SECT. VIII. *De inventione orbium in quibus corpora viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur.* 312.
SECT. IX. *De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apsidum.* 334.
SECT. X. *De motu corporum in superficiebus datis, deque funependulorum motu reciproco.* 361.
SECT. XI. *De motu corporum viribus centripetis se mutuo petentium.* 404.
SECT. XII. *De corporum sphæricorum viribus attractivis.* 465.
SECT. XIII. *De corporum non sphæricorum viribus attractivis.* 503.
SECT. XIV. *De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.* 533.

ER-

ERRATA,

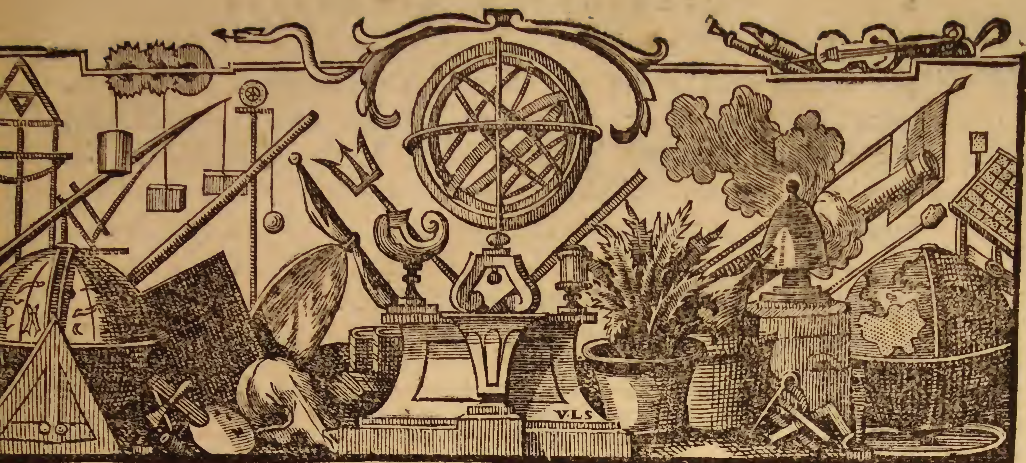
antequam legas corrigenda.

IN TEXTU.

Pag. 75. *lin.* 10. *D d*, *lege*, D, d. *Pag.* 91. *l.* 2. reciprocæ, *lege*, reciprocè. *Pag.* 107. *in figurâ loco* T *scribe* Q, *& loco* Q *scribe* T. *Pag.* 377. *in figurâ, scribe* R *in intersectione rectæ* AOC, *& cycloidis. Pag.* 423. *lin.* 11. *dele* viribus.

IN NOTIS.

Pag. 23. *lin.* 21. *col.* 1. corporis, *lege*, corporum. *Pag.* 52. *col.* 2. *lin.* 2. $1-3:2b$, *lege*, $1-\frac{3b}{2}$. *Pag.* 72. *lin.* 26. *col.* 2. $G:g=S:TT:s:tt$, *lege* $G:g=\frac{S}{TT}:\frac{s}{tt}$. *Pag.* 75. *col.* 1. *lin.* 28. D d, *lege*, D, d. *Pag.* 86. *lin.* 2. *col.* 1. *deleantur hæc verba:* capiatur PE = PC, & producta PC, tangentem secet in T. *Ibid. lin.* 15. *col.* 1. 145, *lege* 146. *Pag.* 87. *lin.* 9. *col.* 2. $zzdz+zzdz$, *lege*, $zzdz+zzdz+zzdz$. *Pag.* 96. *in circulo majori ad alterum diametri extremum, scribe* G. *Pag.* 102. *lin.* 26. *col.* 2. emensus, *lege*, emensum. *Pag.* 118. *col.* 1. *lin.* 3. $EG\times GE$, *lege*, $EG\times GF$. *Pag.* 123. *col.* 2. *lin.* 18. BO, *lege*, DO. *Pag.* 126. *col.* 2. *in figurâ ad alterum ordinatæ extremum, lege*, G. *Pag.* 127. *lin.* 13. *col.* 1. *deleatur*, tum. *Ibid. lin.* 25. *col.* 1. 2 A C, L, *lege* 2 A C : L. *Pag.* 129. *lin.* 8. *col.* 2. $PO^2+CE^2=BC^2$, *lege*, $PO^2+KE^2=BC^2$. *Pag.* 220. *col.* 1. *lin.* 8. AD, AB, *lege*, AD, aB, *Pag.* 279. *col.* 1. *lin.* 9., Lemma; *lege*, 374. Lemma. *P.* 287. *lin.* 9. rr^2-xx^2, *lege*, $rr-xx$. *Ibid. in fig. col.* 2. *in extremitate secantis*, C e *scribatur* a. *P.* 309. *col.* 2. *l.* 16., velocitate, *leg.* velocitas. *P.* 310. *col.* 1. *l.* 3. D L M e, *leg.* D L m e. *Ibid.* θ : T, *leg.* θ : t. *P.* 311. *col.* 2. *l.* 4. $EM=\sqrt{2ABGE}$, *leg.* $EM=\frac{1}{\sqrt{2ABGE}}$. *P.* 339. *col.* 1. *l.* 4. corpus P, *leg.* corpus p. *Ibid. l.* 10. seu k C P, *leg.* seu KCp. *Ibid. col.* 2. *l.* 5. versus p. *leg.* versus P. *P.* 344. *col.* 1. *l.* 3. tendente ad focum ellipseos, *leg.* tendente ad centrum ellipseos. *P.* 368. *col.* 1. *initio lineæ* 1æ. *scribe*: (456). *Ibid. col.* 2. *l.* 16. ex generi, *leg.* ex genesi. *P.* 400. *col.* 1. *l.* 8. *notæ* 490. D Q, *leg.* D H. *P.* 401. *col.* 1. *l.* 15. $POp=\frac{Cpfxdx}{2r\sqrt{kkmm-kkxx-llpp}}$, *leg.* $POp=\frac{Cpfxdx}{2r\sqrt{kkmm-kkxx-CCpp}}$. *P.* 426. *col.* 2. *l.* 18. NM, *leg.* n m. *P.* 441. *col.* 1. *l.* 21. (505), *leg.* (507). *P.* 442. *col.* 2. *l.* 9., *leg.* arcus P K, π P k, K k c a in planis T p P, T π P, E S T. *P.* 443. *col.* 2. *l.* 2. (509), *leg.* (508). *P.* 444. *col.* 1. *l. penultimâ* (509), *leg.* (510). *P.* 445. *in figurâ, loco* B *scribe* N, *& loco* N *scribe* B. *P.* 455. *col.* 2. *l.* 2. (513), *leg.* (504). *P.* 473. *col.* 2. *l.* 4. quod si sphæræ, *leg.* quod si (ut hic supponitur) vires absolutæ particularum utriusque sphæræ. *Ibid. col.* 2. *l.* 7. Si verò &c. *hæc ad finem usque notæ delenda sunt.*



PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I. [a]

Quantitas Materiæ est mensura ejusdem orta ex illius Densitate & Magnitudine conjunctim.

AER, densitate duplicata, in spatio etiam duplicato fit quadruplus; in triplicato sextuplus. Idem intellige de Nive & Pulveribus per compressionem vel liquefac-

 tionem

Licet primæ definitiones NEWTONIANÆ *vix aliquam postulare videantur explicationem; in ipso tamen operis nostri limine, nonnulla levioris momenti præmittenda judicamus, quæ ad majora viam sternunt. Prima quæ in posterùm sæpiùs recurrent Mechanices principia interserere non abs re erit, tùm ut Lectorum labori parcamus, tùm ut magis continua servetur nostrarum demonstrationum series.*

(a) 1. Materia est substantia trinâ dimensione prædita, solida seu impenetrabilis, mobilis, divisibilis. Spatium purum est illa immensa, penetrabilis, sui ubique

DEFINITIONES.

tionem condensatis. Et par est ratio corporum omnium, quæ per causas quascunque diversimodè condensantur. Medii interea, si quod fuerit, interstitia partium liberè pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem Quantitatem sub nomine Corporis vel Massæ in sequentibus passim intelligo. Innotescit ea per corporis cujusque Pondus. Nam (b) Ponderi proportionalem esse reperi per experimenta Pendulorum accuratissimè instituta, uti posthac docebitur.

DE-

ubique similis, immobilis extensio, in quâ corpora omnia liberrimè moveri intelligimus. In corpore dato materiæ quantitatem seu massam, à corporis magnitudine, aut volumine seu mole distingui oportet. Materiæ quantitas est aggregatum, seu summa omnium materiæ particularum quibus compositum est corpus. Volumen, seu Magnitudo, est tota trina dimensio sub exteriori corporis superficie contenta. Porrò inter solidas seu impenetrabiles corporis particulas sive elementa, plura esse possunt disseminata foramina seu pori, vel omni materiâ vacui, vel quos aliena materia liberè pervadat; sic aër subtilior spongiæ poros permeat, & ad spongiæ materiam non pertinet. Si nulla sint inter solidas corporis partes admixta foramina, Massa & volumen non differunt; at si poris pertusum sit corpus, Massam volumen superat.

2. Densitas est ratio massæ corporis ad illius volumen; adeò ut sub æqualibus voluminibus, densitates sint in ratione directâ massarum; & eadem seu æquali manente in diversis corporibus massâ, densitates sint in ratione voluminum reciprocâ. Itaque si densitas dicatur D; massa M; volumen V; erit D = M : V; seu densitas exponi potest per massam ad volumen applicatam, sive, quod idem est, densitas erit ut massa per volumen divisa. Si itaque D & M : V, per V multiplicentur, erit DV = M, seu massa aut quantitas materiæ est ut densitas in volumen ducta; Massa igitur exponi potest per factum ex densitate in volumen. Quare si DV & M, per D dividantur, erit V = M : D, seu volumen est ut massa ad densitatem applicata, sive volumen est in ratione compositâ ex directâ ratione massæ & inversâ densitatis. Si densitates fuerint æquales, seu si m : v = M : V, patet massas esse inter se ut volumina directè. His positis facilè intelligitur massam aëris, densitate duplicatâ, in spatio etiam duplicato fieri quadruplam, nam ob duplicatam densitatem in eodem spatio dupla est massa; ergò duplicato etiam spatio massa rursus duplicatur & fit quadrupla.

(b) 3. Massam esse ponderi proportionalem, ob frequentissimum hujusce veritatis usum, hîc breviter ostendimus. Gravia omnia, ut notissimis constat experimentis, per lineas ad terræ superficiem perpendiculares ac proinde ad sensum parallelas descendunt, & in tubis aëre vacuis plumbum levissimaque pluma eâdem celeritate cadunt, seu æqualia spatia, æqualibus temporibus cadendo percurrunt. Nec successu caret experimentum, etiamsi coarctatis ac diductis poris vel superficiebus, corporis figura mutetur; dummodò eadem remaneat massa, idem semper servatur pondus; ex quo sequitur gravitatem non solùm exterioribus corporis partibus, sed & interioribus æquè inesse; alioquin ejusdem corporis sub diversis superficiebus, idem non remaneret pondus, nec eadem foret sub diversis figuris celeritas; mutatâ enim superficie, partes quæ antè interiores erant, exteriores fiunt & viceversâ; æqualia igitur massæ elementa æquali urgentur vi gravitatis, seu æqualis sunt ponderis; crescit ergò totiùs massæ pondus ut elementorum æqualium numerus, seu crescit pondus ut massa, sive massa est ponderi proportionalis.

DEFINITIO II. (c)

Quantitas Motus est mensura ejusdem orta ex Velocitate & Quantitate Materiæ conjunctim.

Motus totius est summa motuum in partibus singulis; ideo-

A 2 que

(c) 4. Locus corporis est pars spatii, quam corpus occupat. Motus est continua loci mutatio. Tria in motu consideranda sunt, corpus quod movetur seu mobile, spatium quod percurritur, & tempus quo percurritur. Spatium percursum est linea quam mobile instar puncti consideratum describere intelligitur. Directio motûs est linea recta quam mobile describit aut describere nititur. Motus conspirantes sunt quorum directiones congruunt, aut saltem sunt parallelæ & ad easdem partes tendunt. Motus contrarii seu directè oppositi dicuntur quorum directiones congruunt quidem, aut saltem sunt parallelæ, sed in oppositas partes vergunt. Motus æquabilis seu uniformis est, quo mobile æqualia spatia æqualibus temporibus percurrit. Motus acceleratus, quo mobile majora continuò spatia æqualibus temporibus describit. Motus retardatus quo mobile per minora continuò spatia æqualibus temporibus fertur.

5. Celeritas seu velocitas, est ea corporis moti affectio quâ aptum redditur, datum spatium dato tempore æquabiliter percurrendi. Est igitur celeritatis mensura in motu æquabili quærenda, seu, ut habeatur quantitas velocitati proportionalis, quærendum est spatium quod corpus dato tempore percurreret, si illius motus constans atque æquabilis permaneret. Porrò manifestum est celeritatem esse duplam, triplam, si temporibus æqualibus duplum, vel triplum percurratur spatium; & contrà celeritatem esse subduplam, subtriplam, si æqualia spatia, duplo, triplo tempore percurrantur; ergò manentibus temporibus, celeritates sunt ut spatia; & manentibus spatiis, celeritates sunt inversè ut tempora; quare variantibus temporibus atque spatiis, celeritates semper erunt in ratione compositâ ex directâ spatiorum & reciprocâ temporum; seu si celeritas dicatur C, spatium S, tempus T; erit C ut $S:T$, sive $C = S:T$, seu celeritas exponi potest per spatium ad tempus applicatum, & multiplicando utrinque per T, erit $CT = S$, seu spatium est ut celeritas in tempus ducta, & dividendo utrinque per C, erit $T = S:C$, seu tempus est ut spatium ad celeritatem applicatum. Si duorum mobilium celeritates C, c, seu $S:T$; $s:\tau$, fuerint æquales, id est $S:T = s:\tau$, erit $S:s = T:\tau$, seu spatia sunt ut tempora.

6. Jam verò cum in motu nihil nisi corpus, spatium percursum & tempus considerentur, & ratio spatii ad tempus celeritatem exponat (5), satis evidens est ad totum corporis motum seu quantitatem motûs inveniendam, solius massæ & celeritatis habendam esse rationem. Cum autem motus totius corporis sit æqualis summæ motuum singularum Massæ partium, seu elementorum, patet manente celeritate, motum totius massæ crescere prout crescit numerus elementorum massæ æqualium, seu quantitatem motûs esse proportionalem massæ; manente verò massâ, quantitas motûs est ut velocitas; nam si corpus idem, duplum spatium eodem tempore percurrit, duplus est illius motus, si triplum triplus &c. Siquidem manentibus tempore & massâ, nulla est alia quam spatiorum varietas, & motus sunt ut spatia; sed spatia temporibus æqualibus percursa sunt ut celeritates (5), ergo quantitates motûs sunt etiam ut celeritates. Quare variantibus massis atque celeritatibus, motûs quantitas est semper ut massa in celeritatem ducta, seu in ratione compositâ massæ & celeritatis; si itaque motûs quantitas dicatur Q; Massa M, celeritas C; erit Q ut M C, quod ità exponimus $Q = MC$, dividendo utrin-

que

DEFINITIONES. que in corpore duplo majore æquali cum velocitate duplus est, & duplâ cum velocitate quadruplus.

DEFINITIO III. (d)

Materiæ vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neque differt quicquam ab inertia massæ, nisi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ, fit ut corpus omne de statu suo vel quiescendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis insita nomine significantissimo vis Inertiæ dici possit. Exercet verò corpus hanc vim solummodo in mutatione status sui per vim aliam in se impressam facta; estque exercitium illud sub diverso respectu & Resistentia & Impetus: resistentia, quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; impetus, quatenus corpus idem, vi resistentis obstaculi difficul-

que per M, & deindè per C, erit $C = Q : M$; & $M = Q : C$; Seu celeritas est ut quantitas motûs ad massam applicata, & massa vicissim, ut quantitas motûs per celeritatem divisa. Si quantitates motûs Q, q, seu MC, mc, fuerint æquales, erit $MC = mc$, & $M : m = c : C$, seu massæ sunt reciprocè ut celeritates; & viceversâ si $M : m = c : C$, erit $MC = mc$, seu si massæ sunt in ratione velocitatum reciprocâ, quantitates motûs sunt æquales. Prætereà cum, (5), sit $C = S : T$, erit etiam $Q = MS : T$, seu quantitates motûs sunt in ratione compositâ ex directis rationibus massæ & spatii & inversâ temporis; invenietur etiam $QT = MS$, $M = QT : S$; $S = QT : M$, $T = MS : Q$.

Pari facilitate demonstrari possunt cætera theoremata quæ de motuum comparatione, apud scriptores mechanicos fusè reperiuntur.

(d) 7. Vis duplex est, activa & passiva. Activa est potentia motum efficiendi; Passiva est potentia motum recipiendi vel amittendi; vis activa subdividi solet in vim vivam quæ cum motu actuali conjuncta est, & in vim mortuam quæ est tantùm conatus seu sollicitatio ad motum & ex quâ motus actualis non producitur, nisi vis mortuæ actio aliquandiù in corpore continuata fuerit. Sic vis gravitatis in globo qui ex filo pendet vel plano horizontali incumbit, est vis mortua, quâ quidem actu non movetur globus, sed conatur moveri filumque tendit, aut planum premit. Si filum abrumpatur, vel planum sustentans auferatur, tùm continuâ gravitatis actione globus motu accelerato cadit. Vis quâ corpus in circuli peripheriâ motum, filum centro alligatum tendit, & quâ proindè conatur à centro recedere est quoque vis mortua.

8. Inest omni materiæ vis insita passiva, seu inertia, ex quâ nullus motus, nullaque tendentia ad motum resultat, sed quæ consistit in renixu quo corpus quodlibet, cuilibet vi externæ mutatio-nem

ficulter cedendo, conatur ſtatum obſtaculi illius mutare. Vulgus reſiſtentiam quieſcentibus & impetum moventibus tribuit: ſed motus & quies, uti vulgo concipiuntur, reſpectu ſolo diſtinguuntur ab invicem; neque ſemper verè quieſcunt quæ vulgo tanquam quieſcentia ſpectantur. DEFINITIONES.

DEFINITIO IV. (c)

Vis impreſſa eſt actio in corpus exercita, ad mutandum ejus ſtatum vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum.

Conſiſtit hæc vis in actione ſola, neque poſt actionem permanet in corpore. Perſeverat enim corpus in ſtatu omni novo per ſolam vim inertiæ. Eſt autem vis impreſſa diverſarum originum, ut ex Ictu, ex Preſſione, ex vi Centripetâ.

DEFINITIO V.

Vis Centripeta eſt, qua corpora verſus punctum aliquod tanquam ad Centrum undique trahuntur, impelluntur, vel utcunque tendunt.

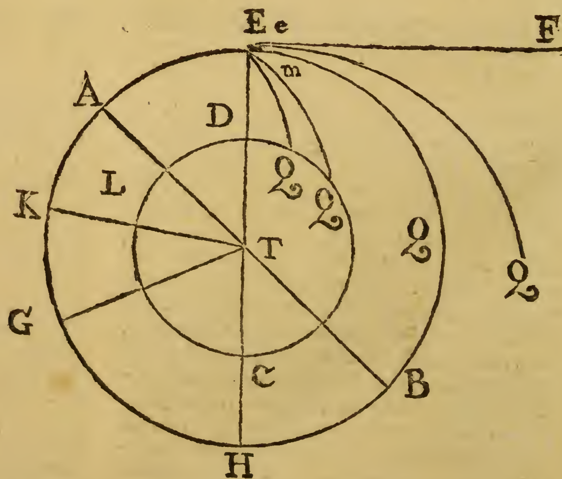
Hujus generis eſt Gravitas, qua corpora tendunt ad centrum

nem ſtatûs, id eſt, motûs vel quietis inducere conanti reſiſtit. Etenim nulla poteſt eſſe actio corporis in corpus, quin luctatio quædam, ut loquitur Clar. *Hermannus* in *Phoronomiâ*, fiat inter corpus agens & patiens, dum alterum alteri reſiſtit; alioquî corpus motum poſſet ſine motûs proprii detrimento, aliud quodcumque movere. Vis illa inertiæ eadem eſt in corporibus motis & quieſcentibus; tam enim reſiſtunt corpora actioni quâ à quiete ad motum concitantur, quam actioni quâ à motu ad quietem reducuntur. Eadem quippè vis requiritur ad motum datum producendum & ad eundem extinguendum. Quia autem vis illa inertiæ eadem in omnibus æqualibus materiæ partibus reperitur, conſequens eſt ut ſit materiæ proportionalis; dupla in maſſâ duplicatâ, tripla in triplicatâ. Majoribus etiam mutationibus corpora magis reſiſtunt quam minoribus, eſtque reſiſtentia actualis magnitudini mutationis proportionalis.

(c) 9. Nihil fit ſine causâ; undè omne corpus ut potè iners & paſſivum (8) in ſuo quocumque ſtatu perſeverat, niſi causâ aliquâ, ſeu vi externâ, ſtatum ſuum mutare cogatur; cum igitur vis aliqua in corpus actu agit; vis impreſſa ſeu actio mutat quidem corporis ſtatum, ſed ceſſante illius vis actione, corpus in novo ſtatu per illam actionem receptо perſeverat ſolâ vi inertiæ paſſivâ, quâ fit ut ſine novâ vi externâ ſtatum ſuum mutare nullâ ratione poſſit; adeoque ſi ſemel movetur, ſibi relictum, perpetuò atque æquabiliter per lineam rectam movebitur, ſeu ſecundum directionem quâ impulſum fuerit & quâ movebatur, dum actio vis externæ ceſſavit.

DEFINITIONES.

trum terræ; Vis Magnetica, quâ ferrum petit magnetem; & Vis illa, quæcunque sit, quâ Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in lineis curvis revolvi coguntur. Lapis, in funda circumactus, a circumagente manu abire conatur; & conatu suo fundam distendit, eoque fortius quo celerius revolvitur; & quamprimum dimittitur, avolat. Vim conatui illi contrariam, quâ funda lapidem in manum perpetuo retrahit & in orbe retinet, quoniam in manum ceu orbis centrum dirigitur, Centripetam appello. Et par est ratio (f) corporum omnium, quæ in gyrum aguntur. Conantur ea omnia a centris orbium recedere; & nisi adsit vis aliqua conatui isti contraria, quâ cohibeantur & in orbibus retineantur, quamque ideo Centripetam appello, abibunt in rectis lineis uniformi cum motu. Projectile, si vi Gravitatis destitueretur, non deflecteretur in terram, sed in linea recta abiret in cœlos; idque uniformi cum motu, si modo aeris resistentia tolleretur. Per gravitatem suam retrahitur a cursu rectilineo & in terram perpetuo flectitur, idque magis vel minus pro gravitate sua & velocitate motus. Quo



(f) 10. Cùm linea quævis curva considerari possit tanquam polygonum, ex infinitis numero, atque infinitè parvis seu evanescentibus lateribus rectis compositum. Si corpus in curvâ E B H K, moveatur, in singulis curvæ punctis E fertur juxtà directionem lateris evanescencentis E e, adeòque si sibi relinqueretur, nec altera vis in extremitate hujus rectæ, E e, illud retraheret, & in lineam, e m, inflecteret, perpetuò atque æquabiliter moveretur per rectam, E e, productam (9) ac proinde cum linea E e producta, sit ipsa curvæ tangens E F, uniformiter moveretur per tangentem in puncto E, nisi nova vis perpetuò in illud agens, cujus directio est versùs curvam, ipsum a motu rectilineo retraheret & in orbitâ suâ retineret, quo major est vis aut celeritas secundùm directionem tangentis vel evanescentis lateris, E e, & minor vis illa quâ mobile a tangente in cur-

Quo minor fuerit ejus gravitas pro quantitate materiæ vel major velocitas quâcum projicitur, eo minus deviabit a cursu rectilineo & longius perget. Si Globus plumbeus, data cum velocitate secundum lineam horizontalem a montis alicujus vertice vi pulveris tormentarii projectus, pergeret in linea curva ad distantiam duorum milliarium, priusquam in terram decideret: hic dupla cum velocitate quasi duplo longius pergeret, & decupla cum velocitate quasi decuplo longius: si modo aeris resistentia tolleretur. Et augendo velocitatem augeri posset pro lubitu distantia in quam projiceretur, & minui curvatura lineæ quam describeret, ita ut tandem caderet ad distantiam graduum decem vel triginta vel nonaginta; vel etiam ut terram totam circuiret vel denique ut in cœlos abiret & motu abeundi pergeret in infinitum. Et eadem ratione, quâ Projectile vi gravitatis in orbem flecti posset & terram totam circuire, potest & Luna vel vi gravitatis, si modo gravis sit, vel aliâ quâcunque vi, quâ in terram urgeatur, retrahi semper a cursu rectilineo terram versus, & in orbem suum flecti: & sine tali vi Luna

curvam retrahitur, eò minùs a tangente deviat corpus, adeoque curva quam motu suo describit, ad tangentem seu rectam lineam propiùs accedit. Econtrà decrescente vi aut celeritate secundùm directionem tangentis, aut crescente vi alterà quæ a tangente deflectit, corpus a motu rectilineo magis retrahitur, & major fit lineæ curvatura. Nam effectus sunt causis suis proportionales; est autem motus per tangentem rectilineus, effectus vis secundùm directionem tangentis, & deviatio a tangente, effectus vis illius quæ a tangente retrahit.

11. Sit terræ circumferentia D Q C, illiusque centrum T, ex quo vim ad centrum trahentem per totùm circumquaque spatium propagari fingamus, aut, si magis placuerit, supponamus esse vim per totum spatium diffusam, quâ corpora omnia secundùm directionem radiorum, E T, A T, ad centrum T urgeantur, & ex vertice E montis E D projiciatur corpus juxtà directionem rectæ E F ad E T, normalis; corpus illud hâc solâ vi impressâ æquabiliter per rectam E F moveretur (9); at vi centripetâ seu vi tendente ad centrum T ab illâ rectâ perpetuò retrahitur & cogitur incedere in curvâ aliquâ E Q quam tangit in E recta E F (10); augendo vim impressam secundùm directionem tangentis, E F, curva E Q, ad tangentem E F, propiùs accedit, adeò ut corpus variis & successivè crescentibus celeritatibus projectum, terram tardiùs semper attingat; deindè circà eam revolvatur, tandemque in infinitum abeat. Ut igitur corpus per rectam E F, datâ velocitate projectum, curvam datam E Q describat, certa ac determinata vis centripeta requiritur; & viceversâ datâ velocitate secundùm rectam E e seu E F, & vi centripetâ etiam datâ, corpus nonnisi certam ac determinatam curvam E Q potest describere; & mathematicorum est ex datis velocitate per tangentem E F & curvâ E Q quam corpus describit, invenire vim centri-

DEFINITIONES. Luna in orbe ſuo retineri non poteſt. Hæc vis, ſi juſto minor eſſet, non ſatis flecteret Lunam de curſu rectilineo: ſi juſto major, plus ſatis flecteret, ac de orbe ſuo terram verſus deduceret. Requiritur quippe, ut ſit juſtæ magnitudinis: & Mathematicorum eſt invenire Vim, quâ corpus in dato quovis orbe datâ cum velocitate accuratè retineri poſſit; & viciſſim invenire viam curvilineam, in quam corpus é dato quovis loco datâ cum velocitate egreſſum a datâ vi flectatur. Eſt autem vis hujus centripetæ Quantitas trium generum, Abſoluta, Acceleratrix, & Motrix.

DEFINITIO VI. (g)

Vis centripetæ Quantitas Abſoluta eſt menſura ejuſdem major vel minor pro Efficacia cauſæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.

Ut vis Magnetica pro mole magnetis vel intenſione virtutis major in uno magnete, minor in alio.

DEFI-

tripetam, quâ a tangente retrahitur & in orbitâ ſuâ retinetur, & reciprocè ex datâ velocitate per tangentem & vi centripetâ, curvam invenire; quæ duo Newtonus mirâ ſagacitate & elegantiâ perfecit.

(g) 12. In centro T exiſtere ſupponatur corpus, ex quo per omne ſpatium diffundatur vis, quæ juxta directionem radiorum AT, ET, HT, versùs centrum, aut a centro versùs ſpatia circumpoſita, juxtà directionem radiorum, TA, TE, TH, agat; in 1°. caſu vis illa centripeta, in 2°. vis centrifuga, in utroque vis centralis dicitur.

Hæc vis in centro conſiderata duplici præſertim ratione variare poteſt; Si enim corpus quod centrum occupat, & cui vis ineſt, in ſua æqualia elementa diviſum intelligatur, & vis ſit ſingulis elementis æqualis ejuſdemque conſtanter intenſionis; vis totius corporis centralis, ſeu vis centralis quantitas abſoluta, erit maſſæ ſeu ſummæ elementorum proportionalis. At ſi manente eâdem corporis centralis maſsâ, vis ſemper manens æqualis in ſingulis elementis æqualibus intenſivè creſcat vel decreſcat, vis tota corporis centralis ſeu vis centralis quantitas abſoluta, erit proportionalis intenſioni vis in ſingulis elementis exiſtentis; quare variantibus maſsâ & vi ſingulorum elementorum, vis centralis quantitas abſoluta erit in ratione compoſitâ maſſæ & intenſionis vis in ſingulis elementis æqualibus.

DEFINITIO VII. (h)

Vis centripetæ Quantitas Acceleratrix est ipsius mensura Velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti Virtus magnetis ejusdem major in minori distantia, minor in majori: vel vis Gravitans major in vallibus, minor in cacuminibus altorum montium, atque adhuc minor (ut posthac patebit) in majoribus distantiis à globo terræ; in æqualibus autem distantiis eadem undique, propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) sublata Aeris resistentia, æqualiter accelerat.

Tom. I. B D E-

(h) 13. Si vis centralis non ampliùs in centro, sed in quâcumque à centro distantiâ consideretur, possumus in variis illis à centro distantiis superficies sphæricas fingere quarum commune centrum sit T, & vis centralis in illis distantiis seu superficiebus sphæricis considerata, dicitur vis acceleratrix. Illius autem quantitas erit proportionalis celeritati quam dato seu constante tempore in singulis materiæ elementis à centro æquidistantibus producet; nam si supponamus vim illam constantem in elementa materiæ continuò agere, eo major erit quo major erit velocitas dato tempore genita, ita ut si tempore æquali dupla generetur velocitas, dupla quoque sit vis, cum velocitas illa sit illius vis effectus plenus. Si constans maneat celeritas à vi acceleratrice genita, erit vis in ratione inversâ temporis quo celeritas illa producitur, nam si eadem celeritas tempore subduplo producatur, vis duplicatur. Quare si manente vi constante, celeritas & tempus varient, erit vis acceleratrix in ratione compositâ ex directâ celeritatis genitæ & reciprocâ temporis. Si igitur vis acceleratrix dicatur, G; celeritas producta C; tempus quo producitur, T, erit $G = C : T$, & $GT = C$, & $T = C : G$. Licet autem variet vis acceleratrix, eadem tamen est illius mensura, modò celeritas nascens seu initio motûs tempore quàm minimo producta consideretur, tunc enim vis agit uniformiter.

14. Si vis aliqua per radios divergentes in medio non resistente diffundatur, vis acceleratrix decrescit in ratione duplicatâ distantiarum à centro; nam quia vis illa, ex hyp., in medio non resistente propagatur, nullus intercipitur radius, nec vis singulorum minuitur, adeóque radii qui in distantiâ T L, per hemisphærium à semicirculo D L C descriptum diffundebantur, in distantiâ, T K per hemisphærium E K H propagantur; est autem vis acceleratrix ut radiorum densitas, & radiorum densitas est reciprocè ut superficies hemisphæriorum à semicirculis descriptorum; nam radiorum densitas est ut summa seu numerus radiorum per superficiem quam occupant divisus; hìc enim summa radiorum est ut massa, superficies verò cui insunt ut volumen. Verùm cùm per hyp., idem numerus radiorum superficies singulorum hemisphæriorum occupet, erit densitas radiorum in ratione inversâ illarum superficierum in quâvis à centro distantiâ descriptarum; illæ autem superficies sunt in ratione duplicatâ distantiarum à centro; ergò & vis acceleratrix est in ratione duplicatâ distantiarum à centro reciprocè. Egregium illud theorema, ut ex demonstratione patet, omnem excludit medii resistentiam; quare ut in physicis valeat, medii resistentia in com-

DEFINITIONES.

DEFINITIO VIII. (ⁱ)

Vis centripetæ Quantitas Motrix est ipsius mensura proportionalis Motui, quem dato tempore generat.

Uti Pondus majus in majore corpore, minus in minore; & in corpore eodem majus prope terram, minus in cœlis. Hæc Quantitas est corporis totius centripetentia seu propensio in centrum, & (ut ita dicam) Pondus; & innotescit semper per vim ipsi contrariam & æqualem, quâ descensus corporis impediri potest.

Hasce virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires motrices, acceleratrices, & absolutas; & distinctionis gratia referre ad Corpora, centrum petentia, ad corporum Loca, & ad Centrum virium: nimirum vim motricem ad Corpus, tanquam conatum totius in centrum ex conatibus omnium partium compositum; & vim acceleratricem ad Locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca singula in circuitu diffusam, ad movenda corpora quæ in ipsis sunt; vim autem absolutam ad Centrum, tanquam causa aliqua

computum venire debet. Hæc autem virium seu qualitatum è centro emanantium theoria ad majorem universalitatem reduci potest, si vis in singulis radiis variè propagari supponatur, aut etiam si per lineas curvas diffundi fingatur. Sed hæc fusiùs prosequi præsentis non est instituti.

(ⁱ) 15. Si vis centripeta in corpore ad centrum propulso consideretur; ut totus illius corporis in centrum conatus seu vis centripetæ quantitas motrix habeatur, ducenda est massa in vim acceleratricem; nam vis motrix totius corporis componitur ex omnibus viribus, quibus singula æqualia elementa urgentur, adeóque ex vi acceleratrice toties sumptâ quot sunt in corpore æqualia materiæ elementa, sive ex vi acceleratrice in massam ductâ. Supponimus enim singula elementa æqualia, æquali vi acceleratrice urgeri. Sed vis acceleratrix est ut celeritas dato tempore genita (13), ergò vis centripetæ quantitas motrix est ut massa in illam celeritatem ducta, seu ut quantitas motûs, dato tempore producta. Si igitur vis acceleratrix dicatur, G; massa, M, vis motrix, p, erit p, ut, M G, & M, ut p : G, & G, ut p : M, seu massa est ut vis motrix per vim acceleratricem divisa, & vis acceleratrix, ut vis motrix per massam divisa. Si duæ fuerint vires motrices P & p, seu M G, & m g, æquales, erit M : m = g : G, seu massæ sunt ut vires acceleratrices reciproce; & viceversâ, si M : m = g : G, erit m g = M G, seu si massæ sunt reciprocè ut vires acceleratrices, vires motrices sunt æquales. Porrò cum vires acceleratrices sint ut celeritates dato tempore genitæ (13), in superioribus proportionibus loco virium acceleratricium celeritates illæ substitui possunt.

qua præditum, ſine quâ vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; ſive cauſa illa ſit corpus aliquod centrale (quale eſt Magnes in centro vis magneticæ, vel Terra in centro vis gravitantis) ſive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat eſt hic conceptus. Nam virium cauſas & ſedes Phyſicas jam non expendo. DEFINITIONES.

Eſt igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate & ex quantitate materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice & ex quantitate ejuſdem materiæ conjunctim. Nam ſumma actionum vis acceleratricis in ſingulas corporis particulas eſt vis motrix totius. Unde juxta ſuperficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix ſeu vis gravitans in corporibus univerſis eadem eſt, gravitas motrix ſeu pondus eſt ut corpus: at ſi in regiones aſcendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque ſemper ut corpus & gravitas acceleratrix conjunctim. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor eſt, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel ſextuplo minus.

Porro attractiones & impulſus eodem ſenſu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem Attractionis, Impulſus, vel Propenſionis cujuſcunque in centrum, indifferenter & pro ſe mutuò promiſcuè uſurpo; has vires non Phyſicè ſed Mathematicè tantùm conſiderando. Unde caveat lector, ne per hujuſmodi voces cogitet me ſpeciem vel modum actionis cauſamve aut rationem Phyſicam alicubi definire, vel centris (quæ ſunt puncta Mathematica) vires verè & Phyſicè tribuere; ſi forte aut centra trahere, aut vires centrorum eſſe dixero.

Scholium.

Hactenus voces minus notas, quo ſenſu in ſequentibus accipiendæ ſint, explicare viſum eſt. Tempus, Spatium, Locum & Motum, ut omnibus notiſſima, non definio. Notandum tamen, quod vulgus quantitates haſce non aliter quam

DEFINITIONES. ex relatione ad ſenſibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit eaſdem in abſolutas & relativas, veras & apparentes, mathematicas & vulgares diſtingui.

(k) I. Tempus Abſolutum, verum, & mathematicum, in ſe & naturâ ſuâ ſine relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur Duratio: Relativum, apparens, & vulgare eſt ſenſibilis & externa quævis Durationis per motum menſura (ſeu accurata ſeu inæquabilis) quâ vulgus vice veri temporis utitur; ut Hora, Dies, Menſis, Annus.

II. Spatium Abſolutum, naturâ ſuâ ſine relatione ad externum quodvis, ſemper manet ſimilare & immobile: Relativum eſt ſpatii hujus menſura ſeu dimenſio quælibet mobilis, quæ à ſenſibus noſtris per ſitum ſuum ad corpora definitur, & à vulgo pro ſpatio immobili uſurpatur: uti dimenſio ſpatii ſubterranei, aerei vel cœleſtis definita per ſitum ſuum ad Terram. Idem ſunt ſpatium abſolutum & relativum, ſpecie & magnitudine; ſed non permanent idem ſemper numero. Nam ſi Terra, verbi gratia, moveatur; ſpatium Aeris noſtri, quod relativè & reſpectu Terræ ſemper manet idem, nunc erit una pars ſpatii abſoluti in quam Aer tranſit, nunc alia pars ejus; & ſic abſolutè mutabitur perpetuò.

III. Locus eſt pars ſpatii quam corpus occupat, eſtque pro ratione ſpatii vel Abſolutus vel Relativus. Pars, inquam, ſpatii; non Situs corporis, vel Superficies ambiens. Nam ſolidorum æqualium æquales ſemper ſunt loci; Superficies autem ob diſſimilitudinem figurarum ut plurimùm inæquales ſunt; Situs vero propriè loquendo quantitatem non habent, ne-

(k) 16. Quemadmodùm Geometræ lineam fluxu puncti generari fingunt, ita tempus abſolutum mathematicè conſiderare poſſumus, tanquam æquabilem unius inſtantis ſeu puncti temporis fluxum. Quapropter ſi corpus aliquod æquabili celeritate moveretur, illud eodem modo ac temporis punctum flueret, ſpatiaque ab eo deſcripta forent temporibus proportionalia (5); eo igitur motu tanquam accuratâ durationis menſurâ uti poſſemus. Verùm corporum cæleſtium & horologiorum motus, quos ad temporis menſuram adhibemus, licet vulgò ſupponantur æquabiles, variis tamen ex cauſis accelerantur vel retardantur, ſicque menſuræ illæ vulgares non ſunt tempori abſoluto proportionales.

neque tam ſunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem eſt cum ſumma motuum partium, hoc eſt, tranſlatio totius de ſuo loco eadem eſt cum ſumma tranſlationum partium de locis ſuis; ideoque locus totius idem eſt cum ſumma locorum partium, & propterea internus & in corpore toto. DEFINITIONES.

IV. Motus Abſolutus eſt tranſlatio corporis de loco abſoluto in locum abſolutum, Relativus de relativo in relativum. Sic in navi quæ velis paſſis fertur, relativus corporis Locus eſt navigii regio illa in quâ corpus verſatur, ſeu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæque adeo movetur unà cum navi: & Quies relativa eſt permanſio corporis in eâdem illâ navis regione vel parte cavitatis. At quies vera eſt permanſio corporis in eâdem parte ſpatii illius immoti in quâ navis ipſa unà cum cavitate ſuâ & contentis univerſis movetur. Unde ſi Terra verè quieſcat, corpus quod relativè quieſcit in navi, movebitur verè & abſolutè eâ cum velocitate quâ navis movetur in Terra. Sin Terra etiam moveatur, orietur verus & abſolutus corporis motus, partim ex Terræ motu vero in ſpatio immoto, partim ex navis motu relativo in Terrâ: & ſi corpus etiam moveatur relativè in navi, orietur verus ejus motus, partim ex vero motu Terræ in ſpatio immoto, partim ex relativis motibus tum navis in Terrâ, tum corporis in navi; & ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in Terrâ. Ut ſi Terræ pars illa, ubi navis verſatur, moveatur verè in orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoque feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; Nauta autem ambulet in navi orientem verſus cum velocitatis parte unâ: movebitur Nauta verè & abſolutè in ſpatio immoto cum velocitatis partibus 10001 in orientem, & relativè in terrâ occidentem verſus cum velocitatis partibus novem.

([1]) Tempus Abſolutum a relativo diſtinguitur in Aſtronomiâ

([1]) 17. Æquatio temporis dicitur differentia quæ inter tempus abſolutum & tempus relativum, (h. e. tempus per ſolis revolutionem menſuratum) intercedit; quæ proindè tempori relativo juncta, vel ab eo ſubducta conficit tempus abſolutum & viceversâ.

DEFINITIONES. per Æquationem temporis vulgi. Inæquales enim ſunt dies naturales, qui vulgo tanquam æquales pro menſura temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Aſtronomi, ut ex veriore tempore menſurent motus cœleſtes. Poſſibile eſt, ut nullus ſit motus æquabilis quo Tempus accurate menſuretur. Accelerari & retardari poſſunt motus omnes, ſed fluxus temporis abſoluti mutari nequit. Eadem eſt duratio ſeu perſeverantia exiſtentiæ rerum; ſive motus ſint celeres, ſive tardi, ſive nulli: proinde hæc a menſuris ſuis ſenſibilibus meritò diſtinguitur, & ex iiſdem colligitur per Æquationem Aſtronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis Phænomenis neceſſitas, tum per experimentum Horologii Oſcillatorii, tum etiam per eclipſes Satellitum Jovis evincitur.

Ut ordo partium Temporis eſt immutabilis, ſic etiam ordo partium Spatii. Moveantur hæc de locis ſuis, & movebuntur (ut ita dicam) de ſeipſis. Nam tempora & ſpatia ſunt ſui ipſorum & rerum omnium quaſi Loca. In Tempore quoad ordinem ſucceſſionis; in Spatio quoad ordinem ſitus locantur univerſa. De illorum eſſentia eſt ut ſint Loca: & loca primaria moveri abſurdum eſt. Hæc ſunt igitur abſoluta Loca; & ſolæ tranſlationes de his locis ſunt abſoluti Motus.

Verum quoniam hæ Spatii partes videri nequeunt, & ab invicem per ſenſus noſtros diſtingui; earum vice adhibemus menſuras ſenſibiles. Ex poſitionibus enim & diſtantiis rerum à corpore aliquo, quod ſpectamus ut immobile, definimus loca univerſa: deinde etiam & omnes motus æſtimamus cum reſpectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iiſdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum abſolutorum relativis utimur, nec incommodè in rebus humanis: in Philoſophicis autem abſtrahendum eſt a ſenſibus. Fieri etenim poteſt, ut nullum revera quieſcat corpus, ad quod loca motuſque referantur.

Diſtinguuntur autem Quies & Motus abſoluti & relativi ab invicem per Proprietates ſuas & Cauſas & Effectus. Quietis proprietas eſt, quod corpora verè quieſcentia quieſcunt inter ſe. Ideoque cum poſſibile ſit, ut corpus aliquod in regioni-

bus

bus Fixarum, aut longè ultra, quiescat absolutè; sciri autem non possit ex situ corporum ad invicem in regionibus nostris, horumne aliquod ad longinquum illum datam positionem servet necne, quies vera ex horum situ inter se definiri nequit.

Motus proprietas est, quod partes, quæ datas servant positiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam Gyrantium partes ([m]) omnes conantur recedere ab axe motus, & Progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium singularum. Motis igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relativè quiescunt. Et propterea motus verus & absolutus definiri nequit per translationem è viciniâ corporum, quæ tanquam quiescentia spectantur. Debent enim corpora externa non solum tanquam quiescentia spectari, sed etiam verè quiescere. Alioquin inclusa omnia, præter translationem è viciniâ ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; & sublatâ illâ translatione non verè quiescent, sed tanquam quiescentia solummodo spectabuntur. Sunt enim ambientia ad inclusa, ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, sine translatione de viciniâ corticis, ceu pars totius movetur.

Præcedenti proprietati affinis est, quod moto Loco movetur unà Locatum: ideoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci sui motum. ([n]) Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, sunt partes solummodo motuum integrorum & absolutorum: & motus omnis integer componitur ex

([m]) 18. Gyrantium corporum partes singulæ in orbitis curvilineis moventur, adeóque (10) per tangentes orbitarum progredi, atque ita ab axe motûs recedere nituntur; ut si trochus vel sphæra circa axem rotatur, singulæ illorum corporum partes circulos describunt, & ab illorum centris per tangentes effugere conantur, cumque omnia illa centra sint in axe motûs posita, singulæ partes ab axe recedere nituntur.

([n]) 19. Si nauta in navi deambulare supponatur, motusque navis & nautæ conspirent, integra & absoluta nautæ celeritas componitur ex celeritate nautæ respectu loci sui primi in navi, ex celeritate loci illius, id est, navis respectu maris, seu respectu loci secundi, & ex celeritate maris respectu spatii immoti. Si autem motus nautæ, motui navis foret directè oppositus, absoluta nautæ velocitas æqua-

DEFINITIONES. ex motu corporis de loco suo primo, & motu loci hujus de loco suo, & sic deinceps; usque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo Nautæ supra memorato. Unde motus integri & absoluti non nisi per loca immota definiri possunt: & propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia supra retuli. Loca autem immota non sunt, nisi quæ omnia ab infinito in infinitum datas servant positiones ad invicem; atque adeo semper manent immota, spatiumque constituunt quod Immobile appello.

Causæ, quibus motus veri & relativi distinguuntur ab invicem, sunt Vires in corpora impressæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur, nisi per vires in ipsum corpus motum impressas: at motus relativus generari & mutari potest sine viribus impressis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimatur in alia solum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio illa in quâ hujus quies vel motus relativus consistit. Rursum motus verus à viribus in corpus motum impressis semper mutatur; at motus relativus ab his viribus non mutatur necessario. Nam si eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, sic imprimantur ut situs relativus conservetur, conservabitur relatio in quâ motus relativus consistit. Mutari igitur potest motus omnis relativus ubi verus conservatur, & conservari ubi verus mutatur; & propterea motus verus in ejusmodi relationibus minime consistit.

Effectus quibus motus absoluti & relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires recedendi ab axe motus circularis. (o) Nam in motu circulari nudè relativo hæ vires nullæ sunt, in vero autem & absoluto majores vel minores pro quantitate motus. Si

æqualis foret differentiæ celeritatum navis respectu spatii immoti & nautæ respectu navis. Tandem si motus nautæ respectu navis foret obliquus, illius directio & velocitas in duas alias directiones & velocitates ita resolvi debent, ut una directio cum aliorum motuum communi directione conspiret, alia verò sit ipsi perpendicularis, tuncque, ex regulis infrà demonstrandis, facillimè invenietur tùm absoluta nautæ celeritas, tùm illius vera directio.

(o) 20. In motu circulari nudè relativo, id est, in quiete absolutâ corporis inertis, quod motu duntaxat relativo movetur, vires activæ nullæ sunt.

Si pendeat ſitula à filo prælongo, agaturque perpetuo in orbem, donec filum à contorſione admodum rigeſcat, dein impleatur aquâ, & unâ cum aquâ quieſcat; tum vi aliquâ ſubitanea agatur motu contrario in orbem, & filo ſe relaxante, diutius perſeveret in hoc motu; (p) ſuperficies aquæ ſub initio plana erit, quemadmodum ante motum vaſis: at poſtquam vas, vi in aquam paulatim impreſſa, effecit ut hæc quoque ſenſibiliter revolvi incipiat; recedet ipſa paulatim à medio, aſcendetque ad latera vaſis, figuram concavam induens, (ut ipſe expertus ſum) & incitatiore ſemper motu aſcendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vaſe temporibus peragendo, quieſcat in eodem relativè. Indicat hic aſcenſus conatum recedendi ab axe motus, & per talem conatum innoteſcit & menſuratur motus aquæ circularis verus & abſolutus, motuique relativo hic omnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus relativus in vaſe, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam aſcendendo ad latera vaſis, ſed plana manebat, & propterea illius verus motus circularis nondum inceperat. Poſtea vero, ubi aquæ motus relativus decrevit, aſcenſus ejus ad latera vaſis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monſtrabat motum illius circularem verum perpetuo creſcentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quieſcebat in vaſe relativè. Quare conatus iſte non pendet à tranſlatione aquæ reſpectu corporum ambientium, & propterea motus circularis

(p) 21. Cum aqua vi inertiæ (8) in eodem quieſcendi ſtatu perſeverare nitatur, in eam nonniſi gradatim & per repetitam laterum ſitulæ frictionem motus circularis tranſire poteſt; adeóque ſub initio motûs ſitulæ, tota aquæ maſſa quieſcit abſolutè, ſive quod idem eſt, maximâ velocitate nudè relativâ in vaſe revolvitur; undè deſtituta omni vi activâ (20) ſicut antè motum ſitulæ, plana & quieta manet. Sed cum iterato laterum vaſis impulſu, motus circularis ad aquam tranſierit, ſingulæ partes aquæ (18) ab axe motûs, ſeu à medio vaſis conantur recedere, cumque minorem ſurſùm in aëre reſiſtentiam inveniant, ad latera ſitulæ accumulantur & aſcendunt, & quò celeriùs aguntur in orbem, eo majori conatu ab axe motûs per tangentes recedere nituntur. (10. 11.) Porrò cum inter vim centrifugam & celeritatem corporis in dato circulo revolventis certa debeat eſſe ac determinata proportio, ex vi centrifugâ ſeu conatu recedendi ab axe cognoſci ac menſurari poteſt velocitas motûs circularis abſoluta, ut deinceps demonſtrabitur.

DEFINITIONES. cularis verus per tales tranſlationes definiri nequit. Unicus eſt corporis cujuſque revolventis motus verè circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui reſpondens: motus autem relativi pro variis relationibus ad externa innumeri ſunt; & relationum inſtar, effectibus veris omnino deſtituuntur, niſi quatenus verum illum & unicum motum participant. Unde & in Syſtemate eorum qui Cœlos noſtros infra Cœlos Fixarum in orbem revolvi volunt, & Planetas ſecum deferre; ſingulæ Cœlorum partes, & Planetæ qui relativè quidem in Cœlis ſuis proximis quieſcunt, moventur verè. Mutant enim poſitiones ſuas ad invicem (ſecus quam fit in verè quieſcentibus) unáque cum cœlis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Quantitates relativæ non ſunt igitur eæ ipſæ quantitates, quarum nomina præ ſe ferunt, ſed ſunt earum menſuræ illæ ſenſibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco quantitatum menſuratarum utitur. At ſi ex uſu definiendæ ſunt verborum ſignificationes; per nomina illa Temporis, Spatii, Loci & Motus propriè intelligendæ erunt hæ menſuræ ſenſibiles; & ſermo erit inſolens & purè Mathematicus, ſi quantitates menſuratæ hic intelligantur. Proinde vim inferunt Sacris Literis, qui voces haſce de quantitatibus menſuratis ibi interpretantur. Neque minus contaminant Matheſin & Philoſophiam, qui quantitates veras cum ipſarum relationibus & vulgaribus menſuris confundunt.

Motus quidem veros corporum ſingulorum cognoſcere, & ab apparentibus actu diſcriminare, difficillimum eſt: propterea quod partes ſpatii illius immobilis, in quo corpora verè moventur, non incurrunt in ſenſus. Cauſa tamen non eſt prorſus deſperata. Nam argumenta deſumi poſſunt, partim ex motibus apparentibus qui ſunt motuum verorum differentiæ, partim ex viribus quæ ſunt motuum verorum cauſæ & effectus. Ut ſi globi duo, ad datam ab invicem diſtantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innoteſceret ex tenſione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari poſſet,

ſet. (q) Deinde ſi vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum ſimul imprimerentur, innoteſceret ex auctâ vel diminutâ fili tenſione augmentum vel decrementum motus, & inde tandem inveniri poſſent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augeretur; id eſt, facies poſticæ, ſive quæ in motu circulari ſequuntur. Cognitis autem faciebus quæ ſequuntur, & faciebus oppoſitis quæ præcedunt, cognoſceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri poſſet & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenſo, ubi nihil extaret externum & ſenſibile quocum globi conferri poſſent. Si jam conſtituerentur in ſpatio illo corpora aliqua longinqua datam inter ſe poſitionem ſervantia, qualia ſunt Stellæ Fixæ in regionibus Cœlorum (r) ſciri quidem non poſſet ex relativa globorum tranſlatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus eſſet motus. At ſi attenderetur ad filum, & deprehenderetur tenſionem ejus illam ipſam eſſe quam motus globorum requireret; concludere liceret motum eſſe globorum, & corpora quieſcere; & tum demum ex tranſlatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum cauſis, effectibus, & apparentibus differentiis colligere; & contra ex motibus ſeu veris ſeu apparentibus eorum cauſas & effectus, docebitur fuſius in ſequentibus. Hunc enim in finem Tractatum ſequentem compoſui.

(q) 22. Si in alternas, ſeu è diametro ſibi oppoſitas globorum facies, ad motum circularem augendum vel minuendum, imprimerentur vires quælibet æquales, quæ proindè non perturbarent æquilibrium globorum circà commune gravitatis centrum, id eſt, circa punctum æquilibrii revolventium, innoteſceret ex auctâ vel diminutâ fili tenſione augmentum vel decrementum motûs &c.

(r) 23. Spectator in globo moto, vel etiam in ſtellâ fixâ poſitus, ſolo oculorum auxilio, ſeu ex motibus apparentibus diſcernere non poſſet, an globus, an ſtella verè moveretur; quemadmodùm telluris incolæ ex apparenti ſtellarum motu determinare non poſſunt, an ſtellæ verè moveantur; ſive enim cum terrâ moveamur, & ſtellæ quieſcant abſolutè, ſive e contrà moveantur ſtellæ & terra quieſcat, eædem omnino ſunt apparentiæ, iidem motus relativi; quod quidem notiſſimo illuſtratur exemplo navis æquabiliter motæ, cujus motus ab iis qui navi vehuntur oculis non percipitur, dum littora urbeſque fugere videntur. Ex optices principiis horum phænomenôn petenda eſt ratio; ea enim corpora quieſcere videntur quæ, dum nos ipſi nullam actualem voluntatem noſmet movendi exercemus, eandem reſpectu oculi poſitionem conſtanter ſervant, ita ut eorum imago quæ in fundo oculi pingitur, eandem ſemper retinæ partem occupet; ea verò objecta moveri videntur quæ reſpectu oculi ſitum ſuum continuò mutant, ſeu quorum imagines diverſas retinæ partes ſucceſſivè occupant.

Axioma-ta, sive

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.

LEX I.

(f) *Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quâtenus à viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.*

PRojectilia perſeverant in motibus ſuis, niſi quâtenus à reſiſtentiâ aeris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorſum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuò retrahunt ſeſe à motibus rectilineis, non ceſſat rotari, niſi quâtenus ab aere retardatur. Maiora autem Planetarum & Cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares in ſpatiis minus reſiſtentibus factos conſervant diutius.

LEX

(f) 24. Ex hâc primâ lege quam (9) demonſtravimus, ſequitur omnem motum eſſe naturâ ſuâ æquabilem & rectilineum, adeóque nec illius velocitatem retardari, nec directionem mutari, niſi aliquod obſtaculum mobili offeratur; Undè cum projectilia motum ſuum ſenſim amittant, quærenda eſt aliqua hujuſce retardationis cauſa. Cum autem corpora projecta vel per medium reſiſtens deferantur, vel etiam ſuper aliorum corporum ſuperficies ſcabras incedant, & vi gravitatis deorsùm ſemper urgeantur, neceſſe eſt ut eam amittant motûs ſui partem quam in hiſce obſtaculis ſuperandis continuò abſumunt, ac proindè quo major vel minor erit medii reſiſtentia, eò majus vel minus decrementum accipiet corporis projecti velocitas. Ex his igitur patet majora planetarum & cometarum corpora nullam ſenſibilem in ſpatiis cœleſtibus experiri reſiſtentiam, cùm motus ſuos diutiſſimè conſervent.

LEX II.

LEGES MOTUS.

(†) *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundùm lineam rectam quâ vis illa imprimitur.*

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, triplâ triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successivè impressa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur) si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo obliquè adjicitur, & cum eo secundùm utriusque determinationem componitur.

C 3 LEX

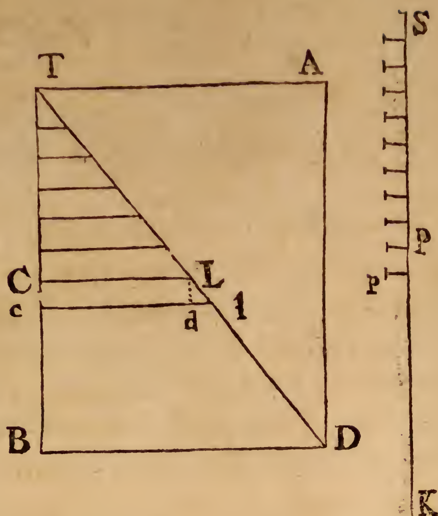
(†) 25. Si corpus vi activâ qualis est vis gravitatis secundùm eandem aut parallelam directionem continuò urgeatur, motus illius continuò acceleratur; nam per leg. 1., manet celeritas acquisita, & per leg. 2. nova conspiranti continuò additur. Si verò aliqua vis in corpus jam motum contrariâ directione perpetuò agat, motus illius continuò retardatur, per leg. 2. Si vis conspirans continuò ac uniformiter agat, id est, si constans sit, corpus eâ vi impulsum, æqualibus temporibus æqualia accipit celeritatis incrementa, seu motu uniformiter accelerato fertur, & celeritates vi illâ acquisitæ sunt ut tempora quibus generantur. At si vis constans contrariâ directione in corpus motum continuò agat, æqualibus temporibus æqualia fient celeritatis decrementa, & corpus motu uniformiter retardato movebitur. Generaliter tandem, si corpus quiescens quâlibet vi sive constanti sive variabili continuò urgeatur, & deindè eâ celeritate quam vis illius actione continuâ acquisivit, contrà directionem vis illius reagentis projiciatur, ut vestigia sua relegat, corpus illud in itu & reditu suo eandem habebit celeritatem, ubi ad eadem viæ suæ puncta, eundo & redeundo pervenerit; adeóque motum redeundo non amittet, nisi cùm pervenerit ad punctum ex quo cœpit eundo moveri; nam eadem vis in itu & reditu corporis, æqualibus temporibus æquales celeritatis gradus generat & extinguit (8).

26. Corpora gravia in terræ viciniis, sublatâ medii resistentiâ motu uniformiter accelerato descendunt, & motu uniformiter retardato ascendunt...... Dem .... Sublatâ medii resistentiâ idem est ejusdem corporis pondus, sive eadem illius in subjectum planum pressio, tùm in vertice, tum in radice montis; est autem pondus, seu vis motrix (15) ut massa in vim gravitatis acceleratricem ducta; ergò cum ejusdem corporis massa eadem in vertice & in radice montis permaneat, manebit etiam eadem vis acceleratrix gravitatis. Insuper corpora gravia in radice & vertice montis æqualia spatia æqualibus temporibus percurrunt, sublatâ aëris resistentia, ut accuratissimis notum est experimentis (13) constans est igitur vis acceleratrix, & per lineas ad horizontem perpendiculares (3) uniformiter agit; gravia ergò motu uniformiter accelerato descendunt, & uniformiter retardato ascendunt (25) Q. e. D.

27. Subla-

AXIOMATA, SIVE

27. Sublatâ medii resistentiâ in terræ viciniis, spatia quæ corpus è quiete cadendo percurrit sunt ut quadrata temporum quibus percurruntur .... Dem .... recta S K, repræsentet spatium quod grave cadendo percurrit T C, T c, T B, exponant tempora quibus describuntur spatia S P, S p, S K; & C L, c l, B D, ad T B, normales, exhibeant celeritates temporibus T C, T c, T B, per spatia S P, S p, S K, acquisitas; quia in motu uniformiter accelerato, celeritates sunt ut tempora, (25), erit T C: T c = C L: c l; & T C: T B = C L: B D, adeóque recta, T D, transit per puncta L, & l, & triangula T C L, T c l, T B D, similia sunt. Jam fingamus lineam, c l, motu sibi semper parallelo ità accedere ad lineam C L, ut tandem cum ipsâ coincidat; evanescente tempusculo C c, celeritas, c l, non differet à celeritate C L, adeóque per tempusculum infinitè parvum seu evanescens C c, celeritas C L, uniformis censeri potest. Porrò spatia motu æquabili descripta sunt ut celeritas in tempus ducta (5), ergò spatium P p, quod tempusculo, C c, percurri supponimus est ut rectangulum, C L, x C c = C d; quare si totum tempus, T C, in tempuscula innumera ut C c, divisum concipiatur, & similiter spatium, S P, tempore T C, percursum in totidem spatiola evanescentia, singulis tempusculis correspondentibus percursa dividatur, erit summa rectangulorum C d, hoc est area trianguli T C L, ut summa spatiolorum P p, id est ut S P; & eodem modo demonstratur aream trianguli T B D, esse ut spatium S K, tempore T C, percursum. Est igitur triangulum T C L: T B D = S P: S K. Sed triangulorum similium areæ T C L, T B D, sunt ut quadrata laterum homologorum, ergò S P, ad S K, ut quadratum temporis T C, ad quadratum temporis T B. Q. e. D.



28. Coroll. 1 .... Cum velocitates acquisitæ sint ut tempora (25) erunt etiam spatia percursa ut quadrata velocitatum, & tam velocitates quam tempora erunt inter se in ratione subduplicatâ spatiorum.

29. Coroll. 2 .... Si grave è quiete cadens, dato tempore percurrat spatium, 1, duplo tempore percurret spatium, 4, triplo spatium, 9, &c. hoc est, si tempora ab initio motûs computata sumantur in progressione numerorum naturalium, 1, 2, 3, 4, 5. spatia his temporibus descripta erunt ut termini progressionis numerorum quadratorum. 1, 4, 9, 16, 25 &c. spatia verò singulis temporibus seorsim sumptis percursa erunt ut termini progressionis numerorum imparium. 1, 3, 5, 7, 9 &c. nam cum spatium 1°. tempore percursum sit, 1, duplo tempore sit, 4; spatium secundo tempore seorsim sumpto descriptum erit 4--1 seu 3, & ità de cæteris. Undè spatia motu uniformiter retardato descripta temporibus æqualibus secundùm numeros impares retrogrado ordine decrescunt. (25)

30. Coroll. 3 .... spatium S K, quod grave è quiete cadendo, tempore T B, percurrit, est subduplum spatii quod eodem tempore uniformiter percurri potest, cum velocitate B D, tempore T B, per spatium S K, acquisitâ. Nam compleatur rectangulum T B D A, & spatium quod uniformi celeritate B D, tempore T B, describitur, erit ut rectangulum T B D A (25). Cum ergò (27) spatium S K, sit ut triangulum T B D, subduplum rectanguli T B D A, erit spatium S K, dimidium spatii quod uniformi celeritate B D, tempore T B, percurritur.

31. Co-

(a) LEX III.

LEGIS MOTUS.

Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus à lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem: nam funis utrinque distentus eodem relaxandi se conatu urgebit equum versus lapidem, ac lapidem versus equum; tantumque impediet progressum unius quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi sua quomodocunque mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutuæ) subibit. His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, sed motuum; scilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutatio-

31. Coroll. 4. . . . celeritas B D, motu uniformiter accelerato acquisita est semper (5) ut duplum spatium percursum 2 S K, applicatum ad tempus T B, quo percurritur, seu ut 2 S K : T B. Quare si vis acceleratrix constans dicatur G; spatium percursum S; tempus quo percurritur T; erit $GT = 2S : T$ (13) adeóque $GT^2 = 2S$, seu vis acceleratrix constans in quadratum temporis ducta, est ut duplum spatium eodem tempore vis illius actione descriptum.

(a) 32. Hæc notissima naturæ Lex innumeris confirmata experimentis, ex ipsâ materiæ inertiâ clarè sequitur. Ut autem omnis tollatur ambiguitas, nihil aliud per hanc legem intellectum volumus, nisi æquales fieri in corpore agente & patiente status mutationes; cum enim nulla possit esse actio corporis in aliud corpus, quin mutua fiat horumce corporis collisio (8), mutatio status æqualiter in utroque corpore recipi debet; undè licet actioni æqualis semper sit & contraria reactio, non idcircò tamen inter corpus agens & patiens fieri debet æquilibrium, idque Newtoniano exemplo manifestum est; si equi lapidem trahentis conatus seu vis activa major sit vi quâ lapis per gravitatem suam, plani scabritiem, mediique resistentiam, equo trahenti reluctatur, equus lapidem trahet cum eâ totius suæ vis parte, quæ post superatam lapidis gravitatem, plani scabritiem, mediique resistentiam, ipsi residua est; si autem totus trahentis equi conatus hisce tribus resistentiis minor sit, vel si ipsis sit æqualis, equus lapidem non movebit. Quare totus ac integer lapidis renixus qui componitur ex ipsius gravitate, plani scabritie, resistentiâ medii & inertiâ quæ lapidi etiam omnibus aliis viribus destituto inest, actioni equi lapidem trahentis est semper æqualis.

Axiomata, sive

tiones enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciprocè proportionales. Obtinet etiam hæc Lex in Attractionibus, ut in Scholio proximo probabitur.

COROLLARIUM I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.



Si corpus dato tempore, vi solâ M in loco *A* impressâ, ferretur uniformi cum motu ab *A* ad *B*; & vi solâ N in eodem loco impressâ, ferretur ab *A* ad *C*: compleatur parallelogrammum *A B D C*, & vi utráque feretur corpus illud eodem tempore in diagonali ab *A* ad *D*. Nam (b) quoniam vis N agit secundum lineam *A C* ipsi *B D* parallelam, hæc vis per Legem II. nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *B D* à vi alterâ genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *B D*, sive vis N imprimatur, sive non; (c) atque ideo in fine illius temporis reperietur alicubi in lineâ illâ *B D*. Eodem argu-

(b) 33. Quoniam vis *N*, agit secundùm lineam A C, ipsi B D, parallelam, hæc vis, (per leg. 2) nihil nisi velocitatem secundùm lineam ipsi B D, parallelam producet, ac proindè non mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam B D, à vi alterâ genitam; cum corpus iners duabus hisce viribus ac directionibus simul obsequi possit, & (per leg. 1.), debeat, atque hîc supponatur vires *M*, & *N*, in mobile eodem modo simul agere ac si singulæ seorsim in illud quiescens imprimerentur.

(c) 34. Idcircò cum in fine ejusdem temporis, corpus quod hîc tanquam punctum consideratur simul esse debeat in utráque lineâ C D, & B D, in utriúsque lineæ concursu D, reperiatur necesse est; quia autem initio & fine temporis dati corpus reperitur in rectâ A D, nempè primùm in A, & deindè in D, toto tempore dato motum fuit per lineam A D, nam ex duobus punctis A, & D, datis, recta A D, positione data est; & corpus quibuslibet viribus impulsum, cessante virium actione, movetur uniformiter in directum secundùm ultimam directionem ex viribus impressis resultantem, (per Leg. 1, & 9).

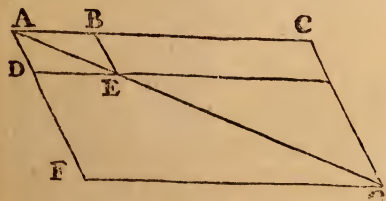
35. Motus compositus per diagonalem A D, motibus per latera A B, A C, disjunctis non est æqualis, sed tantùm æquipollet. Nam cum eadem sit corporis massa, motûs quantitates per diagonalem & per latera sunt ut velocitates uniformes (6) seu ut spatia A D, A B, A C, eodem tempore percursa (5); est autem sum-

summa laterum A B + A C, major diagonali A D; ergo summa quantitatum motûs per latera, major est quantitate motûs per diagonalem. Verùm quia idem est motus, sive mobile per diagonalem A D, celeritate æquabili ut A D, ex vi unicâ impressâ feratur, sive viribus conjunctis per latera A B, A C, impellatur, liquet motum per diagonalem, motibus per latera disjunctis æquivalere.

Si mobile à pluribus quàm duabus viribus in loco A, simul impressis impellatur, inveniri semper poterit unica directio & velocitas ex omnibus separatis composita ipsisque æquipollens, quæ media directio dicitur; duarum enim virium media directio reperiatur (per coroll. 1. Newt.); deinde diagonalis illa tanquam spatium vi unicâ percursum consideretur, & cum spatio tertiâ vi descripto pari ratione componatur, sicque vires omnes ad unicam reducentur.

37. Motus omnis in quotcumque alios laterales ipsi æquipollentes resolvi potest; nam motus per A D, æquabilis, facto triangulo quocumque A B D, resolvitur in motus per latera A B, A C, motui per diagonalem A D, æquipollentes (35). Eâdem ratione motus per A B, in duos quoscumque alios, descripto circà latus A B, triangulo resolvitur, idemque de motu per A C, & de aliis quibuscumque motibus dici debet.

38. Si corpus aliquod A, duplici vi per A C, & per A F, ità urgeatur, ut motus in eâdem ratione acceleretur vel retardetur, sive quod idem est, si spatia A B, & A D, A C, & A F, iisdem temporibus percursa, semper sint in constanti ratione, motu composito parallelogrammi diagonalem A G, describet....

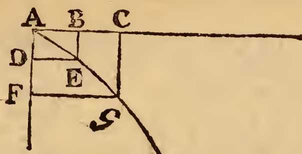


Dem... ductis D E ad A B, & B E ad A D, parallelis, corpus conjunctis viribus motum, reperiri debet simul in utrâque lineâ D E, & E B, (34) adeóque in earum intersectione E; similiter ductis F G, ad A C, & C G, ad A F, parallelis, patet corpus motu composito eodem tempore reperiri in G, quo motibus disjunctis attingeret puncta C, & F; cum igitur (ex hyp.) sit A D, ad A B, seu D E, ut A F, ad A C, seu F G, recta A E, producta transit per punctum G; ergò corpus per diagonalem rectam A G, incedet. Q. e. D.

LEGES MOTUS.

39. Si spatia secundùm unam directionem percursa non sint semper in eâdem ratione cum spatiis juxtà alteram directionem iisdem temporibus descriptis, mobile per eandem diagonalem rectam progredi non potest; si autem ratio spatiorum viribus separatis iisdem temporibus descriptorum continuò mutetur, mobile per curvam incedet, ut si motus uniformis cum motu continuè accelerato vel retardato componatur.

40. Corpus grave secundùm quamlibet directionem A C, quæ non sit ad horizontem normalis projectum, in terræ viciniis, sublatâ medii resistentiâ, parabolam A E G, describit, cujus diameter A F, est ad horizontem perpendicularis, & tangens A C, directio projectionis....

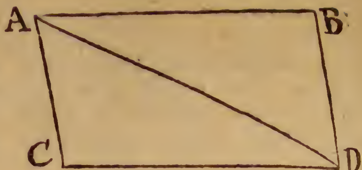


Dem... Solâ vi projectionis impressâ, grave uniformiter movetur per rectam A C, (per leg. 1.), solâ vi gravitatis motu uniformiter accelerato per rectam A F, aut ipsi parallelam descendit (26); quoniam verò motus per A C, æquabilis est, spatia A B, A C, sunt ut tempora quibus percurruntur (5). Spatia A D, A F, motu uniformiter accelerato iisdem temporibus descripta sunt ut quadrata temporum quibus describuntur (27), seu ut quadrata rectarum A B, A C, aut ipsis parallelarum & æqualium D E, F G, cum igitur grave motu composito latum in fine temporum A B, A C, reperiatur in punctis E, & G, (34) evidens est quadrata ordinatarum D E, F G, curvæ A E G, (39) esse inter se in ratione abscissarum A D, A F, adeóque curvam A E G, esse parabolam, (per 20^{am}. lib. 1. conic. Apollon.) cujus diameter A F, & tangens A C ordinatis D E, F G (32. prop. lib. 1. conic. Apollon.) Q. e. D.

D 41.

AXIOMATA, SIVE

argumento in fine temporis ejusdem reperietur alicubi in lineâ *C D*, & idcirco in utriusque lineæ concursu *D* reperiri necesse est. Perget autem motu rectilineo ab *A* ad *D* per Legem I.

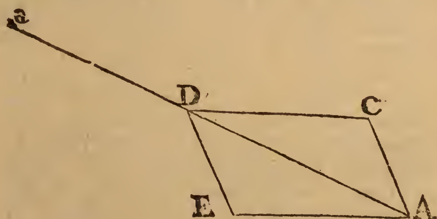


COROLLARIUM II.

Et hinc patet (d) *compositio vis directæ* A D *ex viribus quibusvis obliquis* A C *&* C D, *& vicissim resolutio vis cujusvis directæ* A D *in obliquas quascunque* A C *&* C D. *Quæ quidem compositio & resolutio abunde confirmatur ex Mechanicâ.*

Ut si de rotæ alicujus centro *O* exeuntes radii inæquales *O M*, *O N* filis *M A*, *N P* sustineant pondera *A* & *P*, & quæ

(d) 41. Quæ de motuum compositione & resolutione dicta sunt, ad vires mortuas possunt transferri. Si corpus seu punctum D, viribus mortuis, seu ut loquuntur Mechanici, potentiis D E, D C, juxta directiones D E, D C, agentibus trahatur vel impellatur & completo parallelogrammo E C, ducatur diagonalis D A, vires D C, D E, vi mediæ, ut D A, juxtà directionem D A, agenti æquivalent....

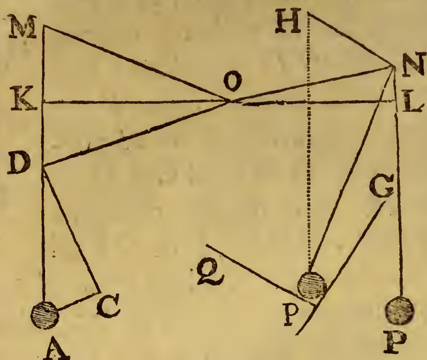


Dem... vis separata D C, considerari potest tanquam vis acceleratrix quæ in corpus D, juxtà directionem D C, continuò & uniformiter agit, & vis illa est ut celeritas quam dato tempore generat aut generare potest (13), adeòque illa celeritas per rectam D C, exponetur, cum ea recta sit ut vis ipsa D C, (per hyp.) simili argumento liquet rectam E D, esse ut celeritatem vi agente per D E eodem tempore dato generandam. Cum igitur celeritates D E, D C, in mediam, D A, æquipollentem componantur (per coroll. 2. Newt.) manifestum est vires quoque laterales D E, D C, in mediam æquipollentem D A, (35) componi, atque adeò vim ut D A, in laterales D E, D C, æquivalentes resolvi posse. Quare (35. 36) vires quotcumque laterales in unam æquivalentem componi possunt, & vis quælibet in alias quascumque ipsi simul æquipollentes potest resolvi.

42. Producatur A D, ad a, ità ut D A, & D a, æquales sint & vis, ut D a, juxtà directionem D A, urgeat punctum D, punctum illud D, duabus viribus D A, æqualibus & contrariis sollicitatum, immotum permanebit; sed vis media D A, æquivalet viribus separatis D E, D C, (41), ergò si punctum D, sublatâ vi, D A, tribus viribus D a, D E, D C, urgeatur, non movebitur, sed erit inter vires æquilibrium.

43. Si punctum D, tribus viribus D a, D E, D C, in æquilibrio constitutis urgeatur, com-

quærantur vires ponderum ad movendam rotam: Per centrum *O* agatur recta *K O L* filis perpendiculariter occurrens in *K* & *L*, centroque *O* & intervallorum *O K*, *O L* majore *O L* describatur circulus occurrens filo *M A* in *D*: & actæ rectæ *O D* parallela sit *A C*, & perpendicularis *D C*. (e) Quoniam nihil refert, utrum filorum puncta, *K*, *L*, *D* affixa sint an non affixa ad planum rotæ; pondera idem valebunt, ac si suspenderentur à punctis *K* & *L* vel *D* & *L*. Ponderis (f) autem *A* exponatur vis tota per lineam *A D*, & hæc resolvetur in vires *A C*, *C D*, quarum *A C* trahendo radium *O D* directè à centro



completo parallelogrammo E C, recta a D, producta, per angulum A, transit, estque D A = D a, parallelogrammi diagonalis, & vires sunt ut latera trianguli D A C, nempè ut D A, A C, seu E D, D C.... Dem.... Ductâ diagonali D A, parallelogrammi E C, vis media ut D A, æquipollet viribus per latera D E, D C, (41); si virium directiones D A, D a, non eandem efficiant lineam rectam, aliquem angulum in D, continent, ac proindè punctum D, à viribus sibi invicem directe non oppositis impulsum moveri debet (contrà hyp.); si verò potentiæ illæ D A, D a, non sint æquales, major minorem superat, motusque oritur (etiam contrà hyp.). Ergò recta A D, producta, per angulum A, transit, estque D A = D a, parallelogrammi diagonalis & quia A C = D E, vires sunt ut latera trianguli D A C. Q. e. D.

44. Cùm latera trianguli sint ut sinus angulorum oppositorum, erit vis D a, seu D A, ad vim D C, ut sinus anguli A C D, seu complementi illius E D C, ad sinum anguli D A C, seu A D E, seu complementi illius E D a; similiter demonstratur esse a D, ad E D, ut sinus anguli E D C, ad sinum anguli a D C. Si igitur tres potentiæ in æquilibrio circà punctum quodvis D, consistentes, dicantur ut libet 1ª, 2ª, 3ª, erit 1ª, ad 2ªm, ut sinus anguli quem 2æ & 3æ potentiarum directiones comprehendunt, ad sinum anguli quem 1æ & 3æ directiones formant. Omnes illas de virium & motuum compositione & resolutione demonstrationes accuratissimis confirmavit experimentis Clariss. Gravesandius in Elementis Physices.

(e) 45. Planum rotæ gravitatis expers & circà centrum fixum O, (fig. Newt.), mobile supponitur, fila quoque gravitate destituta finguntur; cumque eadem sit in variis à terrâ distantiis corporis gravitas (26) eademque proindè fili longioris vel brevioris quo pondus idem suspenditur tensio, evidens est planum rotæ iisdem semper viribus trahi, sive fila punctis M, & N, sive aliis quibusvis K, D, aut L, in filis M A, N P, sumptis affixa sint. Pondera igitur à punctis M, & N, suspensa idem valebunt ac si suspenderentur à punctis K & L, vel D & L.

(f) 46. Ponderis A, quo punctum D, trahitur, vis tota D A, resolvi potest (41) in vires laterales & æquipollentes A C,

AXIOMATA, SIVE

tro nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera *DC*, trahendo radium *DO* perpendiculariter, idem valet ac si perpendiculariter traheret radium *OL* ipsi *OD* æqualem; hoc est, idem atque pondus *P*, si modo pondus illud sit ad pondus *A* ut vis *DC* ad vim *DA*, id est (ob similia triangula *ADC*, *DOK*,) ut *OK* ad *OD* seu *OL*. Pondera igitur *A* & *P*, quæ sunt reciprocè ut radii in directum positi *OK* & *OL*, idem pollebunt, & sic consistent in æquilibrio: quæ est proprietas notissima (g) Libræ, Vectis, & Axis in Peritrochio. Sin pondus alterutrum sit majus quàm in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major. Quod

AC, & DC, ità ut punctum D, urgeatur simul vi ut DC, secundùm directionem DC, & vi ut CA, secundùm directionem rectæ OD, productæ; quia verò centrum O, rotæ fixum supponitur, vis ut AC, trahendo punctum O, juxtà directionem radii OD, nullum motum creat, nihilque valet ad rotam circà centrum O, movendam; vis autem altera DC, trahendo radium DO perpendiculariter, idem valet ad rotam circà centrum O, volvendam, ac si perpendiculariter traheret alterum radium OL, ipsi OD, æqualem; vires enim æquales æqualibus radiis pariter applicatæ eodem modo rotam movere debent; si itaque pondus aliquod P, è puncto L, suspensum sit vi DC, æquale, seu, quod idem est, si pondus P, sit ad pondus A, ut recta DC, ad rectam DA, quæ exponit vim absolutam ponderis A, rota his duabus viribus A, & P, in partes contrarias æqualiter tracta non movebitur. Verùm in triangulis ADC, DOK, anguli DAC, & KDO, ob parallelas AC, DO, & prætereà anguli ad K & C recti, æquales sunt, adeòque triangula illa sunt similia & DC : DA = OK : DO, seu OL; pondera igitur A, & P, quæ sunt reciprocè ut radii in directum positi OK, & OL, seu quæ sunt reciprocè ut perpendiculares OK, & OL, ex centro O, in eorum directiones ductæ idem pollebunt, & sic consistent in æquilibrio.

(g) 47. Sit KL, recta inflexilis & gravitatis expers circà punctum fixum seu fulcrum O, volubilis, hæc vectem & libram exhibet, atque etiam peritrochium circa axem volubile potest exponere, seu rotam cujus est radius longior OL, & centrum O, circà quod rota & cylindrus cujus est radius brevior OK, revolvi possunt; ex demonstratis autem (46) patet esse in his tribus machinis æquilibrium; cum potentiæ seu pondera A, & P, sunt inter se reciprocè, ut rectæ à centro O, ad eorum directiones normaliter ductæ. Sin pondus alterutrum sit majus quàm in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tantò major; nam, manente distantiâ OL, vis ponderis P, ad movendam rotam est ut pondus P absolutum, & manente pondere P, crescit vis illius ad movendam rotam in ratione distantiæ directionis ponderis à centro; duplicatâ enim vel triplicatâ illâ distantiâ, pondus idem P, est in æquilibrio cum duplo vel triplo pondere, cujus distantia directionis à centro est subdupla vel subtripla (46). Ergò in his tribus machinis vis potentiæ seu pon-

Quòd si pondus p ponderi P æquale partim suspendatur filo Np, partim incumbat plano obliquo pG: agantur pH, NH, prior horizonti, posterior plano pG perpendicularis: & si vis ponderis p deorsum tendens, exponatur per lineam pH, resolvi potest hæc in vires pN, HN. Si filo pN perpendiculare esset planum aliquod pQ, secans planum alterum pG in linea ad horizontem parallela; & pondus p his planis pQ, pG solummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus pN, HN perpendiculariter, nimirum planum pQ vi pN, & planum pG vi HN. Ideoque si tollatur planum pQ, ut pondus tendat filum; quoniam filum sustinendo pondus jam vicem præstat plani sublati, tendetur illud eâdem vi pN, quâ planum antea urgebatur. Unde tensio fili hujus obliqui erit ad tensionem fili alterius perpendicularis PN, ut pN ad pH. (h) Ideoque si pondus p sit ad pondus A in ratione quæ componitur ex ratione reciprocâ minimarum distantiarum filorum suorum pN, AM à centro rotæ, & ratione directâ pH ad pN; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque ideò se mutuò sustinebunt, ut quilibet experiri potest.

Pondus autem p, planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fissi facies internas: & inde vires cunei & mallei innotescunt: utpote cum vis quâ pondus p urget planum pQ sit ad vim, quâ idem vel gravitate suâ vel ictu mallei impellitur secundum lineam pH in plana, ut pN ad pH; atque ad vim, quâ urget planum alterum pG, ut pN ad NH. Sed & vis Cochleæ per similem virium divisio-

ponderis ad movendam machinam circâ centrum motûs est semper in ratione compositâ ponderis absoluti seu intensitatis potentiæ, & distantiæ directionis illius à centro motûs. Vim autem illam ponderis aut potentiæ ad machinam movendam momentum potentiæ aut ponderis vocant Mechanici.

(h) 48. Vis quâ pondus p, tendit filum obliquum p N, dicatur π, & normalis ex centro O, in filum p N, ducta dicatur n, & erit ex demonstratis π : P, seu p, = p N : p H. Prætereà si vis π, in æquilibrio cum pondere A, consistat, erit etiam (47) A : π = n : K O; undè per compositionem rationum erit $A \times \pi : p \times \pi = n \times pN : KO \times pH$, seu $A : p = n \times pN : KO \times pH$; & $p : A = KO \times pH : n \times pN$; ideóque si pondus p, sit ad pondus A, in ratione quæ componitur ex ratione reciprocâ minimarum distantiarum, n, & K O, filorum suorum p N, A M à centro rotæ, & ratione directâ p H, ad p N, erit æquilibrium.

AXIOMATA, SIVE visionem colligitur; quippe quæ cuneus est à vecte impulsus. (i) Usus igitur Corollarii hujus latissimè patet, & latè patendo veritatem ejus evincit; cùm pendeat ex jam dictis Mechanica tota ab Auctoribus diversimode demonstrata. Ex hisce enim facile derivantur vires Machinarum, quæ ex Rotis, Tympanis, Trochleis, Vectibus, nervis tensis & ponderibus directè vel obliquè ascendentibus, cæterisque potentiis Mechanicis componi solent, ut & vires Tendinum ad animalium ossa movenda.

COROLLARIUM III.

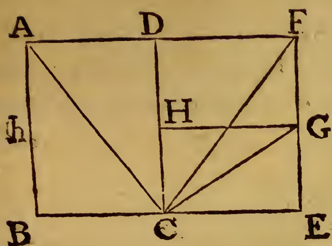
Quantitas motus quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter se.

Etenim actio eique contraria reactio æquales sunt per Legem III, adeoque per Legem II æquales in motibus efficiunt mutationes versus contrarias partes. Ergo si motus fiunt ad eandem partem; quicquid additur motui corporis fugientis, subducetur motui corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem quæ priùs. Sin corpora obviam eant; æqualis erit subductio de motu utriusque, ideoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem. (k) Ut

(i) 49. Cunei & cochleæ vires totamque ferè mechanicam hisce theorematibus demonstravit Clariss. Varignonius. Quam latè pateat eorum usus manifestum est ex præclaro opere Joannis Alphonsi Borelli de motibus animalium, & ex variis, inter quas Bernoullianæ eminent, de musculorum motu dissertationibus; sed hæc fusiùs prosequi præsentis non est instituti; in proximo scholio machinarum vires generali mechanicæ principio determinare satis erit; ut autem ea quæ nobis illustranda occurrent in meliori lumine collocentur; generales motuum leges, ne omissis quidem definitionibus, præmittendas esse judicavimus.

(k) 50. Corpus perfectè elasticum dicitur cujus partes ex ictu flectuntur, seu introcedunt, & deindè eâdem vi quâ flexæ sunt, sese in priorem statum contrariâ directione restituunt. Corpus imperfectè elasticum est cujus partes ex ictu flexæ in priorem quidem statum redire nituntur, sed minori vi eâ quâ flexæ sunt. Corpus non elasticum vocatur cujus partes ictu percussæ nullâ vi sese restituere conantur. Corpus unum in alterum directè impingere dicitur, si secundùm rectam ad contactum perpendicularem impingat; obliquè verò si secundùm rectam ad contactum obliquam. Cùm corpora in se mutuò non agant, nisi per massam & velocitatem, tanquam axioma ex legibus 2â & 3â notissimum innumerisque confirmatum experimentis supponimus quantitates motûs æquales & contrarias in conflictu sibi mutuò æquipollere.

51. Si



51. Si globus A, in planum immobile B E, incurrat, quæritur illius motus post impactum .... 1°. Globus ille in planum directè impingat per A B; si globus & planum omni elasticitate destituantur, globi motus post impactum in B, omninò extinguitur, cùm nulla vis globum repellat; si autem planum & globus perfecto elatere donentur, globus per B A, post impactum resiliet eâdem quâ advenit celeritate B A; nam in corporibus perfectè elasticis (50) vis restitutiva æqualis est vi compressivæ, undè si imperfecta fuerit vis elastica, globus minori velocitate B h, resiliet .... 2°. Globus A, in planum B E, velocitate & directione A C, obliquè impingat, illius motus resolvatur in motus laterales, quorum unus A D, sit plano B E, parallelus, alter autem A B, eidem plano perpendicularis (37); globus A, motu secundùm A D, ad planum non accedit, sed tantùm motu secundùm perpendicularem A B, vel D C; velocitas globi respectu plani B E, est tantùm ut perpendicularis A B; at verò si A C, foret perpendicularis ad planum B E, velocitas quâ ad planum accederet, foret ut A C; ergò cùm impetus ejusdem corporis in planum, sint ut velocitates quibus ad planum accedit, ictus obliquus est ad perpendicularem, ut A B, ad A C; seu sumptâ A C, tanquam radio, ut sinus anguli incidentiæ A C B, ad sinum totum ..... 3°. Si nulla sit in corporibus A, & B E, elasticitas, globus A, per A C, incurrens movebitur per C E, celeritate ut C E = A D; nam motus perpendicularis A B, vel D C, ex demonstratis, extinguitur, remanetque tantùm motus C E, cui planum ut potè parallelum non opponitur; si verò perfectum fuerit elaterium, resiliet globus per C F, celeritate C F = A C, & angulus reflexionis F C E, æqualis erit angulo incidentiæ A C B; nam per vim restitutivam elateris resilit per normalem C D, celeritate C D, seu B A, & prætereà motu ad planum parallelo progreditur per C E, celeritate ut C E = A D; ergò motu composito (coroll. 1. Newt.) percurret diagonalem C F; & cùm in parallelogrammis D B, D E, omnia sint paria, erit F C = A C, & angulus F C E = ACB. Tandem si corpora imperfectè fuerint elastica, manebit quidem post impactum velocitas A D, seu C E, plano parallela, sed velocitas perpendicularis C H, minor erit velocitate D C, seu A B, & completo parallelogrammo H E, globus per diagonalem C G, resiliet.

52. Si globi non elastici in se mutuò directè impingant, quæritur illorum motus post conflictum .... 1°. Globi in eandem plagam ferantur, subsequens fugientem impellet, donec ambo simul tanquam unum corpus eâdem directione ac velocitate incedant, eritque (coroll. 3. Newt.), summa quantitatum motûs eadem antè & post conflictum; communis ergò post conflictum velocitas invenitur, summâ quantitatum motûs antè conflictum per summam massarum divisâ (6).... 2°. Globi contrariis directionibus sibi mutuò occurrant, si æqualis in utroque fuerit motûs quantitas, post conflictum ambo quiescunt (50). Si verò inæquales sint motûs quantitates, per conflictum extinguitur in singulis quantitas motûs globi debiliùs moti (50), & ambo simul post impactum communi velocitate ac directione quasi unicum corpus progrediuntur, estque quantitas motûs in utroque simul residua, differentiæ quantitatum motûs antè conflictum æqualis (coroll. 3. Newt.). Hinc communis post conflictum velocitas habetur, si differentia illa quantitatum motûs antè conflictum ad summam massarum applicetur (6). In hoc utroque casu communis post conflictum veloci as in globi cujusque massam ducta, est illius quantitas motûs post impactum (6), ex quâ & quantitate motûs ejusdem globi ante conflictum, per subtractionem invenitur quantitas motûs in conflictu acquisita vel amissa; quia verò in omni globorum non elasticorum conflictu directo, vel motus omnis cessat, vel globi post impactum communi celeritate feruntur, manifestum est.

AXIOMATA, SIVE

(l) Ut si corpus sphæricum *A* sit triplo majus corpore sphærico *B*, habeatque duas velocitatis partes; & *B* sequatur in eâdem rectâ cum velocitatis partibus decem, ideoque motus ipsius *A* sit ad motum ipsius *B*, ut sex ad decem: ponantur motus

est respectivam globorum velocitatem per conflictum extingui.

53. Globi elastici in se invicem directè incurrant, quæritur eorum motus post conflictum . . . . . 1°. Mutatio quæ ex mutuo corporum perfectè elasticorum conflictu in utriúsque corporis motu nascitur, dupla est mutationis quam ictus idem in iisdem corporibus omni elaterio destitutis produceret,) in corporibus imperfectè tantùm elasticis mutatio major est quàm in non elasticis, sed duplâ minor.) Nam partes in utroque corpore æquali vi ex ictu comprimuntur (Leg. 3.). Si corpora omni elatere destituerentur, post conflictum vel quiescerent, vel in eandem plagam velocitate communi progrederentur (52) nec partes flexæ restituerentur; si autem accedat vis elastica partes flexæ sese restituent vi & directione (50) quæ semper contraria erit vi compressivæ, & in corporibus perfectè elasticis huic æqualis, in aliis minor; actio igitur corporum in se mutuò ex elateris restitutione orta, actioni ex impactu nascenti æqualis est in corporibus perfectè elasticis, minor in aliis, ex quibus & Lege 2ª constat quod erat primò propositum . . . . 2°. Corpora perfectè elastica eâdem velocitate respectivâ post conflictum recedunt, quâ antè conflictum ad se invicem accedebant; in corporibus verò imperfectè tantùm elasticis, velocitas respectiva quâ post ictum discedunt est ad velocitatem quâ antè ictum ad se mutuò accedebant, in ratione vis restitutivæ ad vim compressivam; nam cum in conflictu corporum non elasticorum omnis velocitas respectiva, quâ ad se mutuò accedebant, destruatur ex ictu (52), sitque vis restituva elateris perfecti vi compressivæ æqualis & contraria, manifestum est in corporum perfectè elasticorum conflictu, velocitatem respectivam ex solo impactu amissam, contrariâ directione restitui; in corporibus verò imperfectè elasticis eam tantùm restitui velocitatis respectivæ partem quæ est vi restitutivæ proportionalis . . . . 3°. Ut igitur corporum perfectè elasticorum motus post conflictum directum inveniatur, considerentur corpora tanquam omni elatere destituta & in eâ hypothesi, quæratur (52) quantitas motûs ex conflictu in unoquoque corpore acquisita vel amissa secundùm eam directionem quâ corpus antè conflictum movebatur; eadem motûs quantitas duplicata, erit quantitas motûs in corpore perfectè elastico acquisita vel amissa, quæ proindè quantitati motûs corporis antè conflictum addita vel dempta, dat quantitatem motûs illius corporis post conflictum . . . . . 4°. Corporum imperfectè elasticorum motus post conflictum invenitur, si data sit ratio vis restitutivæ elateris ad vim compressivam, sive, quod ex demonstratis idem est, ratio velocitatis respectivæ post impactum ad velocitatem respectivam antè impactum, quam rationem in iisdem corporibus constantem esse experimentis probavit Newtonus, nisi tamen partes corporum ex congressu lædantur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiantur. Corpora omni elaterio destituta supponantur, & in eâ hypothesi quæratur quantitas motûs in unoquoque corpore ex ictu acquisita vel amissa, cui motûs quantitati si addatur quantitas motûs vi elasticæ proportionalis, summa erit vera quantitas motûs ex conflictu corporum imperfectè elasticorum in unoquoque acquisita vel amissa, ex quâ datâ & ex quantitate motûs corporis cujusque antè conflictum, reperitur, ut suprà, omnis quantitas motûs illius post conflictum. Exemplo lux affulgebit.

(l) 54. Globus A, sit triplo major globo B, habeatque duos velocitatis gradus, illius motus quantitas (6) erit ut 3×2, seu 6. B, sequatur in eâdem rectâ cum velocitatis gradibus, 10, eritque quantitas motûs globi B, 1×10, seu, 10, ... 1°. Si globi elastici non sunt,

motus illis esse partium sex & partium decem, & summa erit partium sexdecim. In corporum igitur concursu, si corpus *A* lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinque, corpus *B* amittet partes totidem, adeoque perget corpus *A* post reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & *B* cum partibus septem vel sex vel quinque, existente semper summâ partium sexdecim ut prius. Si corpus *A* lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, ideoque progrediatur post concursum cum partibus quindecim vel sexdecim vel septemdecim vel octodecim, corpus *B*, amittendo tot partes quot *A* lucratur, vel cum unâ parte progredietur amissis partibus novem, vel quiescet amisso motu suo progressivo partium decem, vel cum unâ parte regredietur amisso motu suo & (ut ita dicam) unâ parte amplius, vel regredietur cum partibus duabus ob detractum motum progressivum partium duodecim. Atque ita summæ motuum conspirantium $15 + 1$ vel $16 + 0$, & differentiæ contrariorum $17 - 1$ & $18 - 2$ semper erunt partium sexdecim, ut ante concursum & reflexionem. (m) Cognitis autem motibus quibuscum corpora post reflexionem pergent, invenietur cujusque velocitas, ponendo eam esse ad velocitatem ante reflexionem, ut motus post est ad mo-

LEGES MOTUS.

sunt, velocitas communis post conflictum (52) erit $16 : 4$, seu 4; quare quantitas motûs ipsius A, post conflictum erit 3×4, seu 12. B, verò quantitas motûs erit 1×4, seu 4. Itaque quantitas motûs à corpore B, amissa est, 6, & corpori A, acquisita est etiam, 6 . . . . . 2°. Si globi sunt perfectè elastici, quantitates illæ duplicari debent (53), erunt igitur 12 & 12. Si quantitati motûs, 6, globi A, antè conflictum jungas, 12, summa erit, 18, quantitas motûs illius post conflictum; si verò ex quantitate motûs, 10, ipsius B, antè conflictum subduxeris, 12, quantitatem motûs per conflictum amissam, residuum est -2, quod signum $-$, ut notum est, contrariam positionem significat, seu corpus B, post ictum in contrariam plagam resilit cum hâc motûs quantitate 2 . . . .

3°. Si globi A & B, sint imperfectè elastici, sitque v. gr., eorum vis restitutiva subdupla vis compressivæ, erit vis compressiva ad vim restitutivam (seu 2, ad 1) ut quantitas motûs, 6, ex ictu acquisita vel amissa ad quantitatem motûs, 3, solâ vi restitutivâ acquisitam vel amissam; quare hæc quantitas, 3, addatur quantitati, 6, ex ictu acquisitæ in corpore A, & amissæ in corpore B, summa, 9, erit quantitas motûs integra tam ex ictu quàm ex elatere acquisita vel amissa; unde quantitas motûs globi A, post conflictum est, $6 + 9$, seu, 15, globi B, $10 - 9$, seu 1, quarum summa est, 16.

(m) 55. Cognitis quantitatibus motuum quibuscum corpora post conflictum pergent, invenietur cujusque velocitas dividendo quantitatem motûs cujusque corpo-ris

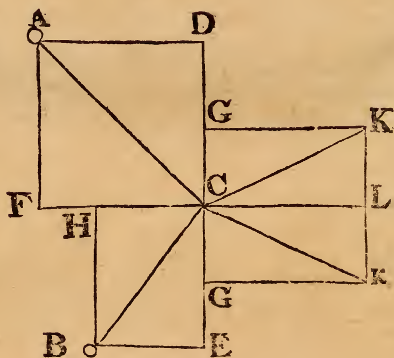
AXIOMATA, SIVE

motum ante. Ut in casu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium sex ante reflexionem & partium octodecim postea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium sex post reflexionem, dicendo, ut motûs partes sex ante reflexionem ad motûs partes octodecim postea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes sex postea.

(n) Quod si corpora vel non Sphærica vel diversis in rectis moventia incidant in se mutuo obliquè, & requirantur eorum motus post reflexionem; cognoscendus est situs plani à quo cor-

ris per illius massam (6), aut etiam quia ejusdem corporis diversæ quantitates motûs sunt ut velocitates (6), dicendo, ut quantitas motûs antè conflictum ad quantitatem motûs post conflictum, ità velocitas corporis ante conflictum ad illius velocitatem post conflictum.

(n) 56. Si corpora quæcumque A & B, diversis in rectis A C, B C, moventia, incidant in se mutuò obliquè in C, & requirantur eorum motus post impactum. Cognoscendus est situs plani F L, à quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concursûs C; deindè corporis utriusque motus A C, B C, (per coroll. 2.) distinguendus est in duos A D, & A F, B E & B H, unum nempè A F seu D C, & B H seu E C, huic plano F L perpendicularem, alterum A D, B E, eidem parallelum. Quia verò corpora secundùm parallelas A D, B E, ad se mutuò non accedunt, sed tantùm secundùm perpendiculares D C, E C, in se invicem agunt, motus paralleli A D, B E, per impactum non mutantur, adeòque retinendi sunt iidem post conflictum qui erant ante conflictum; & motibus perpendicularibus D C, E C, mutationes æquales in partes contrarias C D, C E, tribuendæ sunt sic ut summa conspirantium & differentia contrariorum maneat eadem ante & post conflictum (coroll. 3. Newt.) Ut itaque corporum A & B, in se mutuò obliquè incidentium motus post ictum inveniantur, mota duntaxat supponantur per lineas D C & E C, velocitatibus D C & E C, atque

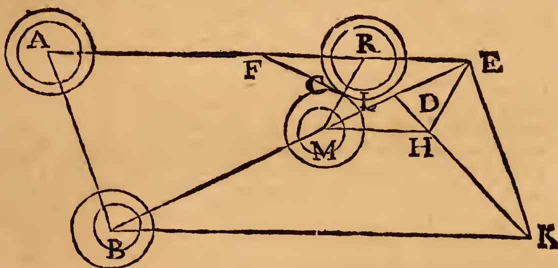


in eâ hypothesi quærantur (52, si fuerint elastica, 53, si non fuerint elastica) eorum velocitas post conflictum in lineâ C D, vel C E, ex quâ datâ, & ex velocitate parallelâ plano F L, etiam datâ, compositus corporis motus (per coroll. 1. Newt.) facilè reperietur. Sit exempli causâ C G, velocitas corporis A, post impactum per D E, in C; sumptâ C L, æquali & parallelâ velocitati secundùm A D, quæ eadem post conflictum remanet, compleatur parallelogrammum G L & A, movebitur per illius diagonalem C K, velocitate ut C K, (per coroll. 1. Newt.) Si corpora angulosa sibi per angulos occurrant, orientur motus circulares, dum pars corporis ex vi insitâ in unam plagam movetur, altera verò ex conflictu fertur in alteram plagam circà corporis centrum.

57. Da-

corpora concurrentia tanguntur in puncto concursûs: dein corporis utriusque motus (per Corol. 11.) distinguendus est in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in se invicem secundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi sunt iidem post reflexionem atque antea; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ sunt sic, ut summa conspirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex hujusmodi reflexionibus oriri etiam solent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos casus in sequentibus non considero, & nimis longum esset omnia huc spectantia demonstrare. LEGES MOTUS.

C O-



57. Datis duorum globorum A & B, directionibus, celeritatibus & diametris, unà cum eorum situ antè conflictum, facile est determinare punctum concursûs C, & situm plani F L, utrumque globum in puncto C, contingentis. Globus A, feratur per lineam A E, & celeritate ut A E, globus B verò secundùm directionem B E, celeritate ut B D, moveatur. Junctis A & B globorum centris per lineam A B, compleatur parallelogrammum A B K E. Jungantur puncta D & K, & recta D K, ex centro E, intersecetur arcu qui describitur radio E H, summæ semidiametrorum globorum A & B, æquali. Ex puncto intersectionis H, ducatur recta H M, ipsi E A parallela, erunt M & R, loca in quibus globorum centra constituentur, ubi secum invicem concurrent, & sumptâ lineâ R C, æquali radio globi A, recta F L, ad R C perpendicularis, in puncto C, situm plani designabit.... Dem... Quoniam recta H M, est lineæ B K parallela (per const.) erit D M: D B = M H: B K = R E: E A, ob R E = M H, & E A = B K; ergò dividendo B M: B D = A R: A E, & alternando B M: A R = B D: A E. Cum igitur sit B M ad A R, ut celeritas globi B, ad celeritatem globi A; globus A in R, & B in M, eodem tempore pervenient (6); Cumque sit M R = E H, globi in puncto C, se mutuò contingent, & planum E L, ad radium R C, in puncto C, perpendiculariter ductum utrumque globum continget. Q. e. D.

AXIOMATA, SIVE

COROLLARIUM IV.

Commune gravitatis Centrum (°), *corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter se non mutat statum suum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus & impedimentis externis) commune Centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.*

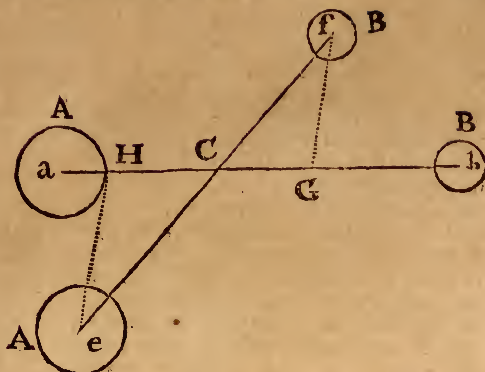
Nam

(°) 58. Centrum gravitatis corporis cujusque, est punctum intrà vel extrà corpus positum, circà quod undique partes in æquilibrio consistunt, ità ut si per hoc punctum ducatur planum figuram utcumque secans, corporis segmenta quæ utrinque sunt circà planum illud librata æquiponderent; si igitur ex centro gravitatis corpus aliquod suspendatur, datum quemcumque situm retinebit, & semper quiescet, si centri gravitatis descensus impediatur; undè totam corporis gravitatem in centro gravitatis locatam fingunt Mechanici, & pro corpore gravi solum gravitatis centrum in suis demonstrationibus surrogare solent. Planum gravitatis est figura plana per centrum gravitatis transiens; Diameter verò gravitatis est recta per centrum gravitatis ducta; Quare planorum gravitatis, communis intersectio diametrum gravitatis efficit, & in diametrorum gravitatis concursu centrum gravitatis positum est. Centrum magnitudinis vocatur punctum illud, per quod divisa magnitudo relinquit duas partes utrinque æquales; ut in circulo & ellipsi, ductis utcumque per centrum lineis rectis, lineæ illæ totaque figura in partes æquales dividuntur; ac proindè si gravia homogenea, id est, quorum gravitates sunt voluminibus proportionales, secundum longitudinem in partes similes & æquales secari possint, centrum gravitatis à centro magnitudinis non differt.

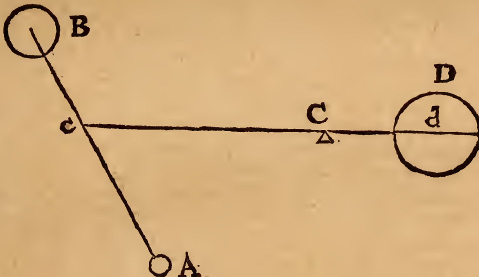
59. Ex hisce definitionibus facilè colligitur, omnium circulorum, ellipsium, sphærarum & figurarum quarumvis regularium, centrum gravitatis idem esse cum centro magnitudinis, modò tamen gravia supponantur homogenea. In figuris autem irregularibus, communi duorum gravitatis diametrorum intersectione determinari potest centrum gravitatis (58). Sic in quolibet parallelogrammo, centrum illud in duarum diagonalium concursu positum est; in triangulo reperitur in intersectione duarum rectarum quæ à duobus angulis ductæ, latera angulis illis opposita, totumque proindè triangulum bifariam, adeoque in partes æquiponderantes secant, in prismatibus & cylindris, centrum gravitatis est punctum medium rectæ basium oppositarum centra conjungentis; & generaliter in omnibus corporibus quantumvis difformibus centrum gravitatis mechanicè invenitur, si corpus ab aliquâ sui parte liberè suspendatur, & ab eâdem parte à quâ pendet, demittatur perpendiculum ità ut in corpore linea quam fecerit perpendiculi filum notetur; deindè ab aliâ parte corpus idem liberè suspendatur ut priùs, noteturque iterùm linea perpendiculi ab hâc parte super corpus demissi; concursus enim duorum filorum perpendiculi (quæ sunt diametri gravitatis) erit centrum gravitatis corporis dati.

60. Cen-

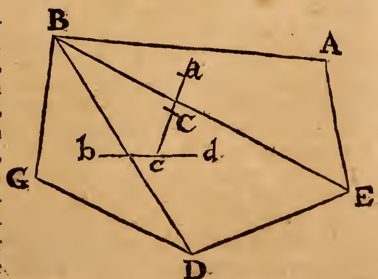
60. Centra gravitatis a & b, corporum A & B, rectâ seu vecte inflexibili & gravitatis experte, a b jungantur; & ità dividatur a b, in C, ut sit pondus A, ad pondus B, ut C b, ad C a, punctum C, erit centrum gravitatis commune duorum corporum A & B.... Dem... punctum C, fixum maneat, sitque 1°. a b, horizonti parallela, & quia a b, est vectis cujus fulcrum C, ponderis B momentum seu conatus ad vectem circà C, movendum, erit ut B × C b, & ponderis A momentum ut A × C a (47); verùm (per hyp.) A: B = C b: C a, adeóque A × C a = B × C b; ergò momenta ponderum A & B, æqualia sunt, & proindè in æquilibrio circà punctum C, consistunt.... 2°. vectis, a b, circà punctum C fixum, rotetur, & situm e f, inclinatum ad horizontem a b, obtineat, ductis F G, E H, rectis horizonti a b, perpendicularibus, quæ sunt gravium directiones, ponderum A & B, momenta erunt ut A × C H & B × C G, (47); sed ob triangula H C e, G f G, similia G C : H C = C f, seu C b : C e, sive C a = A: B, adeóque G C : H C = A: B & A × C H = B × C G; momenta igitur ponderum A & B, in situ quocumque dato æqualia sunt & semper æquilibrantur. Quare (58) punctum C, est commune gravitatis centrum duorum corporum A & B. Q. e. D.



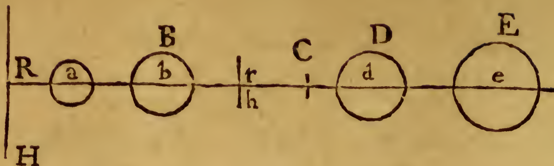
61. Coroll. 1.... Duorum corporum A & B, commune gravitatis centrum sit c, & tertii corporis D, centrum gravitatis proprium sit d; jungatur recta c d, quæ ità dividatur in C, ut sit summa ponderum A + B ad pondus D, sicut C d, ad C c, trium corporum A, B, D, centrum gravitatis commune erit in C; nam duo corpora A & B, (58) considerari possunt tanquam in suo communi gravitatis centro c, coacta, adeóque si fuerit A+B: D = C d: C c, erit C, centrum gravitatis commune trium corporum A, B, D, (60). Eâdem ratione quatuor, pluriumve, prout quisque voluerit, corporum commune gravitatis centrum reperietur.



62. Coroll. 2.... figuræ cujusvis planæ & rectilineæ centrum gravitatis hoc modo inveniri potest. Figura data, A B G D E in sua triangula dividatur, duorumque triangulorum, B G D, B D E, centra gravitatis b & d, rectâ jungantur, & ità dividatur, b d, in c, ut area trianguli B G D, sit ad aream trianguli B D E, sicut c d, a d, b c, eritque, c, centrum gravitatis commune duorum triangulorum B G D, B D E, (60). Centrum gravitatis, a, trianguli B A C, & centrum, c, figuræ B G D E, mox inventum jungantur rectâ c a, quæ ità dividatur in C, ut area trianguli B A E, sit ad aream figuræ B G D E, sicut C c, ad C a & C, erit centrum gravitatis totius figuræ datæ A B G D E, (61). Hæc omnia clarè intelliguntur, si figurarum area quævis, instar ponderis centro gravitatis appensi consideretur.

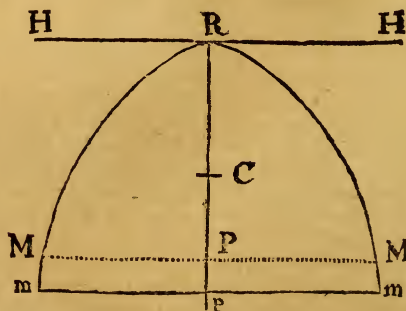


63. Sit recta R H, horizonti perpendicularis quæ axis rotationis dicatur, & in eâ ſumatur centrum rotationis R, ſeu punctum fixum circà quod vectis horizontalis R e, cum appenſis ponderibus A, B, D, E, rotari poſſit, ſintque corporum centra gravitatis propria a, b, d, e, & eorum commune gravitatis centrum C, in vecte R e, ad eandem axis R H, partem poſita; diſtantia R C, communis centri gravitatis C, à centro rotationis R, æqualis erit ſummæ factorum unius cujuſque ponderis in ſuam à centro rotationis R, diſtantiam, per ſummam ponderum diviſæ . . . . Dem. . . . Momentum cujuſque ponderis ad vectem circà centrum R, movendum, eſt ut factum ex illo pondere in ſuam ab eodem centro R, diſtantiam (47), & omnium momentorum ſumma, ſeu totus omnium ponderum ad vectem circà centrum R, movendum conatus, ut illorum factorum ſumma; verùm quia pondera omnia per vectem R e, diſperſa, tanquam in ſuo communi gravitatis centro C, coacta conſiderari poſſunt (58), erit etiam totus omnium ponderum conatus ad vectem circà R, movendum, ut ſumma ponderum in diſtantiam R C ducta; quare ſumma factorum uniuſcujuſque ponderis in ſuam à centro rotationis R diſtantiam, æqualis eſt facto ex ſummâ ponderum in diſtantiam R C, communis centri gravitatis C, à centro rotationis R; igitur $RC \times \overline{A+B+D+E}$ &c. $= A \times aR + B \times bR + D \times dR + E \times eR$ &c., adeóque $RC = A \times aR + B \times bR + D \times dR + E \times eR$ &c. : $\overline{A+B+D+E}$ &c. Q. e. D.



64. Si pondera ad eandem axis rotationis partem ſita non ſint, ſi v. gr. fuerit axis rotationis r h, erit $rC = \overline{D \times dr + E \times er - A \times ar - B \times br} : \overline{A+B+D+E}$. Nam momenta ponderum D & E, ad vectem circà r movendum ſunt $D \times dr$, $E \times er$, & momenta contraria ponderum A & B, ſunt $A \times ar$, $B \times br$; quare vis omnium ponderum ad vectem r e, movendum erit, $D \times dr + E \times er - A \times ar - B \times br$; ſed ſi pondera in centro C, coacta ſupponantur, erit vis illa eadem, $rC \times \overline{A+B+D+E}$, ergò $rC \times \overline{A+B+D+E} = D \times dr + E \times er - A \times ar - B \times br$; ac proindè $rC = \overline{D \times dr + E \times er - A \times ar - B \times br} : \overline{A+B+D+E}$. Q. e. D.

65. Quapropter ſi omnia pondera ſint ad eandem axis rotationis R H, partem poſita, & quodlibet pondus vocetur p, ſumma verò omnium ponderum S p; prætereà ſi diſtantia à centro rotationis dicatur x, ac proindè factum cujuſque ponderis in ſuam à centro rotationis diſtantiam ſit x p, & omnium factorum ſumma ſ x p; diſtantia communis centri gravitatis omnium ponderum à centro rotationis erit generaliter S x p : S p. Si verò pondera fuerint ad diverſas axis rotationis r h, partes poſita, & diſtantia cujuſlibet ponderis à centro rotationis r, vocetur x, ſingula verò pondera quæ ſunt ad partem r e, poſita, dicantur p, eorumque ſumma ſit S p; inſuper ſingula pondera ad partem R r, ſita dicantur q, & eorum ſumma ſit S q, diſtantia communis centri gravitatis omnium ponderum à centro rotationis r, erit $\overline{ſxp - ſxq} : \overline{ſp + ſq}$, vel $\overline{ſxq - ſxp} : \overline{ſp + ſq}$; undè ſi S x p = S x q, manifeſtum eſt centrum rotationis idem eſſe cum centro gravitatis.

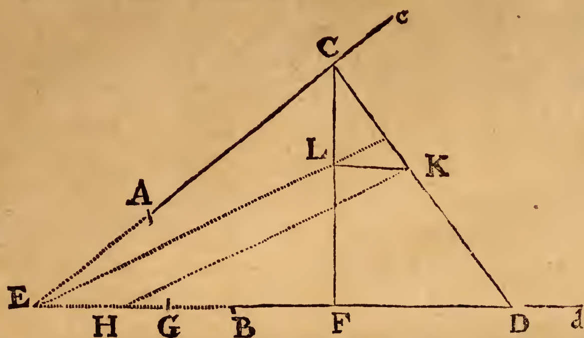


66. Harumce formularum auxilio, centra gravitatis figurarum curvarum reperiun-

(P) Nam si puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, & distantia eorum dividatur in ratione datâ, punctum dividens vel quiescit vel progreditur uniformiter in li- LEGES MOTUS.

riuntur; Nam si curvæ M R M, axis R P, quo ordinatæ M M m m, bifariam dividuntur, ut vectis habeatur, vertexque R, ut centrum rotationis & singula elementa qualia sunt M M m m, ut pondera vecti appensa considerentur, distantia centri gravitatis C, à centro rotationis seu vertice R, erit (per primam formulam) æqualis summæ factorum ex singulis elementis M M m m, in suam à vertice R, distantiam per summam eorumdem elementorum divisæ.

(P) 67. Duo corpora C & D, æquabiliter moveantur in lineis rectis A C, B D, positione datis, jungaturque recta C D, & ità dividatur in K, ut sit D K, ad C K, ut corpus C, ad corpus D; punctum K, quod est centrum gravitatis corporum C & D, (60) vel quiescet vel movebitur uniformiter in lineâ rectâ positione datâ.... Dem... concurrant lineæ A C & B D,



in E. 1°. Corpora C & D, ex punctis fixis A & B, in eandem plagam proficiscantur & iisdem temporibus ad puncta C & D, perveniant, ac proindè spatia A C & B D, erunt in ratione datâ velocitatum (5). In B E, capiatur B G, ad A E, in ratione datâ B D, ad A C, & cum data sit A E, dabitur quoque linea B G; sit F D, semper æqualis datæ E G, erit E F = G D, & quia B G: A E = B D: A C, (per const.) erit B G + B D, seu G D : A E + A C, seu E C = B D: A C, adeóque A C: B D = E C: G D, seu E F; est igitur E C ad E F; in ratione datâ, & propterea ex datis angulo C E F, & laterum E C, E F, ratione, dabitur specie triangulum E F C, id est dantur tres anguli. Deindè secetur C F, in L, ut sit C L, ad C F, in ratione datâ C K, ad C D, id est in ratione corporis D, ad summam corporum C + D; & quia in triangulo E F C, specie dato datur ratio laterum E F, F C, dataque est ratio C F, ad F L, dabitur quoque ratio ex his duabus composita E F, ad F L, adeóque ob angulum E F C, etiam datum dabitur specie triangulum E F L; Quare dum progrediuntur corpora C & D, punctum L, semper locabitur in rectâ E L, positione datâ, utpote quæ est basis trianguli E F L, in quo angulus F, idem constanter manet, & latus E F, positione datum ad latus F L, datam habet rationem. Junge L K, & quia C L : C F = C K : C D (per const.), similia erunt triangula C L K, C F D, & ob datam F D = E G, & datam rationem F D, ad L K, seu C D, ad C K; dabitur L K, magnitudine; lineæ L K, æqualis capiatur E H, & ductâ H K, erit semper E L K H, parallelogrammum, ob L K, æqualem & parallelam ipsi L H, locabitur ergò punctum K, in parallelogrammi illius latere H K, quod positione datum est; nam latus E L, positione, latus verò E H, positione & magnitudine datur. Quare punctum K, seu centrum gravitatis in lineâ rectâ positione datâ progreditur. Quoniam verò, ex demonstratis, triangula C E F, L E F, specie, & tria latera E C, E L, E F, positione data sunt, manifestum est rationem rectæ E L, seu lineæ æqualis H K, ad E C, datam esse. Verùm quia punctum C, uniformiter movetur (per hyp.) uniformiter crescit recta E C, ergò pariter recta H K, uniformiter augetur, adeoque punctum K, æquabiliter progreditur in lineâ rectâ H K, positione datâ. Q. e. 1°. demonstrandum .....

2°. Cor-

AXIOMATA, SIVE

neâ rectâ. Hoc postea in Lemmate XXIII. ejusque Corollario demonstratur, si punctorum motus fiant in eodem plano; & (q) eâdem

2°. Corpora ex punctis fixis A & B, in diversas plagas progrediantur, semperque capiatur B G, in partem oppositam directioni B D, F D, verò secundùm directionem B D, cætera fiant ut in superiori constructione eadem manebit demonstratio pro 2°. casu.

68. Si punctum concursus E, in infinitum abeat, parallelæ fient lineæ A C, B D, & ex superiori demonstratione patet centrum gravitatis K, vel quiescere vel uniformiter moveri, in lineâ H K, positione datâ, lineis A C, B D, parallelâ; si autem lineæ parallelæ A C & B D, ad se mutuò accedant tandemque coincidant, eadem semper valet demonstratio, ac proindè si corpora in eâdem rectâ moveantur, in hâc eâdem lineâ centrum gravitatis vel quiescet vel movebitur uniformiter.

(q) 69. Si rectæ A C & B D, non in uno, sed in diversis planis positæ fuerint, ex singulis eorum punctis A & B, C & D, in quibus eodem tempore reperiuntur, in planum quodvis a b d c, pro lubitu assumptum demittantur perpendicula A a, B b, C c, D d; & ex centris gravitatis H & K, perpendicula H h, K k, excitentur, ob motum uniformem punctorum A & B, in lineis A C, B D, evidens est puncta a & b, uniformiter moveri in lineis a c, b d; & quia A a, B b, H h, parallelæ sunt; lineæ A B, a b, in eâdem ratione datâ in H, & h, dividuntur; idemque dicendum de punctis K, & k, in lineis C D, & c d; Quare, ex demonstratis (67), punctum h, uniformiter progreditur in rectâ h k, adeóque centrum gravitatis H, semper movetur in plano H h K k, ad planum a b d c, normali; si loco plani, a b d c, aliud quodvis ad arbitrium assumeretur, eodem modo

dem ratione demonſtrari poteſt, ſi motus illi non fiant in eodem plano. Ergo ſi corpora quotcunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod linea, horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione datâ. Similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujuſvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod ab eo dividitur diſtantia centri communis corporum duorum & centri corporis tertii in datâ ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujuſvis vel quieſcit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod ab eo dividitur diſtantia inter centrum commune trium & centrum quarti in datâ ratione, & ſic in infinitum. Igitur in ſyſtemate corporum quæ actionibus in ſe invicem aliiſque omnibus in ſe extrinſecus impreſſis omnino vacant, ideoque moventur ſingula uniformiter in rectis ſingulis, commune omnium centrum gravitatis vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum.

(r) Porro in ſyſtemate duorum corporum in ſe invicem agentium cum diſtantiæ centrorum utriuſque à communi gravitatis centro ſint reciprocè ut corpora; erunt motus relativi cor-

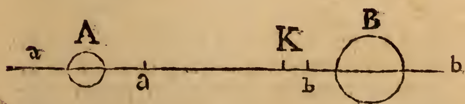
modo demonſtrari poſſet centrum gravitatis H, moveri in plano ad aſſumptum perpendiculari; neceſſe igitur eſt ut centrum illud H, moveatur in communi illorum planorum ad alia pro lubitu aſſumpta perpendicularium interſectione, quæ cum ſit linea recta H K, poſitione data, & punctum h, per rectam h k, uniformiter progrediatur, punctum H, æquabiliter fertur in lineâ H K. In omni igitur caſu centrum commune gravitatis duorum corporum quæ motu uniformi per lineas rectas poſitione datas progrediuntur, ſemper quieſcit vel movetur uniformiter in rectâ poſitione datâ.



(r) 70. Si duobus corporibus A & B, quorum commune gravitatis centrum ſit K, æquales motûs quantitates in partes contrarias de novo imprimantur, quibus eodem tempore percurrunt ſpatia A a, B b, centri gravitatis ſtatus non mutatur; Cum enim K, ſit commune centrum gravitatis corporum A & B, (per hyp.) erit $A : B = KB : KA$ (60) & quia impreſſæ quantitates motûs (6) $A \times Aa$, $B \times Bb$ æqua-

AXIOMATA, SIVE

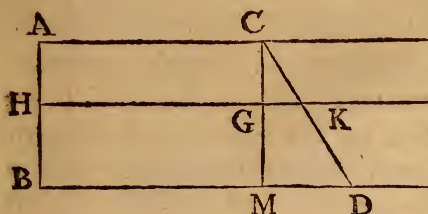
corporum eorundem, vel accedendi ad centrum illud vel ab eodem recedendi, æquales inter ſe. Proinde centrum illud à motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque ideo ab actionibus horum corporum inter ſe, nec promovetur nec retardatur nec mutationem patitur in ſtatu ſuo quoad motum vel quietem. In ſyſtemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in ſe mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus mutat ſtatum ſuum; & reliquorum, quibuſcum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; diſtantia autem horum duorum centrorum dividitur à communi corporum omnium centro in partes ſummis totalibus corporum quorum ſunt centra reciprocè proportionales, ideoque centris illis duobus ſtatum ſuum movendi vel quieſcendi ſervantibus, commune omnium centrum ſervat etiam ſtatum ſuum: manifeſtum eſt quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum corporum inter ſe nunquam mutat ſtatum ſuum quoad motum & quietem. In tali autem ſyſtemate actiones omnes corporum inter ſe vel inter bina ſunt corpora, vel ab actionibus inter bina compoſitæ; & propterea communi omnium centro mutationem in ſtatu motus ejus vel quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in ſe invicem, vel quieſcit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter; perget idem, non obſtantibus corporum actionibus inter ſe, vel ſemper quieſcere, vel ſemper progredi uniformiter in directum; niſi à viribus in ſyſtema extrinſecus impreſſis deturbetur de



æquales ſunt (per hyp.), erit etiam A : B = Bb : Aa, adeoque KB : KA = Bb : Aa, & componendo vel dividendo Kb : Ka = Bb : Aa = A : B; dum igitur corpora A & B, ad puncta a & b, motibus impreſſis perveniunt, centrum K, immotum remanſit (60), ac proindè ab æqualibus motuum mutationibus in contrarias partes factis non mutat ſtatum ſuum motûs vel quietis. Quapropter cum mutua corporum actio (per leg. 2. 3.) æquales mutationes in utroque corpore versùs partes contrarias producat, commune gravitatis centrum duorum corporum ab actionibus horum corporum inter ſe, nec promovetur, nec retardatur, nec mutationem patitur in ſtatu ſuo quoad motum vel quietem.

71. Mo-

de hoc ſtatu. (f) Eſt igitur ſyſtematis corporum plurium Lex eadem quæ corporis ſolitarii, quoad perſeverantiam in ſtatu motus vel quietis. Motus enim progreſſivus ſeu corporis ſolitarii ſeu



(f) 71. Motus progreſſivus ſeu corporis ſolitarii ſeu ſyſtematis corporum ex motu centri gravitatis ſemper æſtimari debet.... Dem.... 1°. Corpora duo A & B, in lineis AC & BD, parallelis progrediantur cum velocitatibus, ut AC, BD, eorumque commune gravitatis centrum H, per rectam HK, lineis AC & BD, parallelam feratur, ducatur CM, rectæ AB parallela. Quoniam $B : A = AH : BH$ (60) erit $B : B + A = AH : AB$, & ob parallelas AB, & CM; GK & MD, erit $AH : AB = CG : CM = GK : MD$, adeóque $GK : MD = B : A + B$, & $B \times MD = \overline{A + B} \times GK$; verum quia $AC = HG = BM$, erit $HK = AC + GK$, & $BD = AC + MD$; quarè $\overline{A + B} \times HK = \overline{A + B} \times AC + \overline{A + B} \times GK = A \times AC + B \times AC + B \times MD$, ob $\overline{A + B} \times GK = B \times MD$, ergò $\overline{A + B} \times HK = A \times AC + B \times BD$, ſeu ſumma corporum A & B, in velocitatem centri gravitatis HK, ducta, æqualis eſt ſummæ factorum in ſingulis corporibus A & B, in ſuam velocitatem AC, BD..... 2°. Si corpora contrariis directionibus CA & BD, moveantur, negativa erit quantitas motûs corporis A, propter contrariam directionem CA, adeóque differentia quantitatum motûs corporum, in plagas oppoſitas tendentium, ſeu quod idem eſt, quantitas motûs in eandem plagam, æqualis erit facto ex ſummâ corporum, in velocitatem centri gravitatis.... 3°. Si parallelæ AC, BD, ad ſe mutuò accedant tandemque coïncidant, eadem ſemper manet demonſtratio, quæ proindè etiam obtinet, dum corpora in eâdem rectâ feruntur.... 4°. Si corpora non moveantur in lineis parallelis nec in eodem plano, uniuſcujuſque ponderis directio ac velocitas in duas alias reſolvatur, quarum una ſit viæ centri gravitatis parallela, altera verò ipſi perpendicularis, & ex demonſtratis liquet ſummam quantitatum motûs corporum in plagam versùs quam movetur centrum gravitatis eſſe æqualem facto ex ſummâ corporum in velocitatem centri gravitatis.... 5°. Si æquabilis non ſit corporum motus, ſed quâcumque ratione acceleretur vel retardetur, temporibus infinitè parvis tanquam æquabilis ſpectari poteſt, iiſque tempuſculis ſumma quantitatum motûs corporum æqualis eſt facto ex ſummâ corporum in velocitatem centri gravitatis; undè quovis tempore quantitas motûs ſingulorum corporum æqualis eſt quantitati motûs quam habuiſſent omnia corpora, ſi communi velocitate centri gravitatis ſimul lata fuiſſent..... 6°. Si trium corporum ſyſtema moveatur, duo ex hiſce corporibus in ſuo gravitatis centro coacta fingi poſſunt (ex Dem) ac proindè trium pluriumve corporum aut etiam ejuſdem corporis partium ſyſtema ad duorum duntaxat corporum ſyſtema reducitur; ergò quantitas motûs progreſſivi ſeu corporis ſolitarii ſeu ſyſtematis corporum, ex motu centri gravitatis æſtimari debet. Q. e. D.

72. Coroll. 1.... Si differentiæ quantitatum motûs versùs partes contrarias in ſyſtemate corporum ſit nihilo æqualis, commune centrum gravitatis quieſcit; ſi inæqualis eſt progreditur in eam partem versùs quam prævalet motus.

73. Coroll. 2.... Motus ſyſtematis corporum in plagam datam habetur, ſi centri gravitatis motus in duos motus reſolvatur, quorum unus in plagam datam dirigatur, alter verò ſit ipſi perpendicularis; nam ſumma corporum ducta in veloci-

AXIOMATA, SIVE

seu systematis corporum ex motu centri gravitatis æstimari semper debet.

COROLLARIUM V.

(t) *Corporum dato spatio inclusorum iidem sunt motus inter se, sive spatium illud quiescat, sive moveatur idem uniformiter in directum sine motu circulari.*

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, & summæ tendentium ad contrarias, eædem sunt sub initio in utroque casu (ex hypothesi) & ex his summis vel differentiis oriuntur congressus & impetus quibus corpora se mutuo feriunt. Ergo per Legem II. æquales erunt congressuum effectus in utroque casu; & propterea manebunt motus inter se in uno casu æquales motibus inter se in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo se habent in Navi, sive ea quiescat, sive moveatur uniformiter in directum.

COROLLARIUM VI.

Si corpora moveantur quomodocunque inter se, & à viribus acceleratricibus æqualibus secundum lineas parallelas urgeantur; per-

locitatem centri gravitatis versus datam directionem exponit quantitatem motûs totius systematis in eandem partem progredientis.

(t) 74. Si navi quiescenti in quâ continentur corpora variis motibus agitata, motus in directum æquabilis imprimatur, omnia hæc corpora navis velocitatem æquè participant (leg. 1. 2.), adeóque singulis corporibus additur in eandem plagam æqualis velocitas, ac proindè motus navi impressus respectivas corporum velocitates non mutat; quare differentiæ velocitatum in corporibus quæ ad eandem partem tendunt, & summæ velocitatum in corporibus quæ ad partes contrarias tendunt, eædem manent antè & post motum navi impressum; sed ex his summis vel differentiis quæ sunt respectivæ corporum velocitates, oriuntur congressus & ictûs magnitudines quibus corpora se mutuò feriunt; nam si corpus aliquod M, velocitate C, in corpus quiescens m, incurrat, eadem est ictûs magnitudo ac si utrique corpori nova velocitas c, in eandem partem accederet, & corpus M, cum velocitate C + c, in corpus m, velocitate c, motum impingeret; corpus enim M, in m, non agit per velocitatem c, utrique corpori communem, sed per solam velocitatum differentiam C + c — c, seu C; hæc autem differentia est ipsamet velocitas quâ corpus M, in aliud m, quiescens agit. Iidem ergò erunt congressus ac proindè æquales congressuum effectus in utroque casu (per leg. 2.), & propterea manebunt motus respectivi in uno casu æquales motibus respectivis corporum in altero; si autem motus circularis navi imprimeretur, corpora, propter vim centrifugam (18) in varias partes cum variâ velocitate propellerentur.

75. Vi-

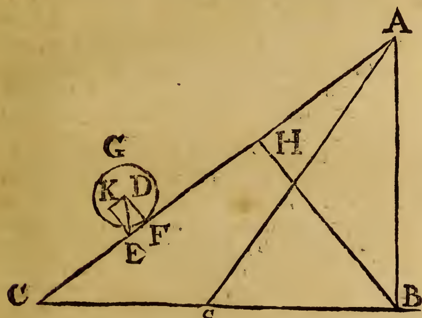
pergent omnia eodem modo moveri inter se, ac si viribus illis non essent incitata. LEGES MOTUS.

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitatibus movendorum corporum) & secundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per legem II. ideoque nunquam mutabunt positiones & motus eorum inter se.

Scholium: ([a])

Hactenus principia tradidi à mathematicis recepta & experientia multiplici confirmata. Per leges duas primas & corollaria

([a]) 75. Vis acceleratrix gravitatis, quâ corpus in plano ad horizontem inclinato juxtà plani directionem urgetur, est ad vim gravitatis acceleratricem quâ secundum directionem horizonti perpendicularem sollicitatur, ut altitudo plani ad ipsius longitudinem .... Dem....



Globus G, plano A C, ad horizontem C B, inclinato incumbat; ex A, ad horizontem C B, demittatur perpendiculum A B, & ex centro D, globi ad planum A C, ducatur recta D E, perpendiculo A B, parallela quæ exponat vim gravitatis acceleratricem quâ globus secundum directionem D E, horizonti perpendicularem urgetur; vis illa, D E, in duas vires resolvatur (41), quarum altera D F, sit ad planum A C, normalis quæ proindè tota plano sustinetur, altera verò D K, seu F E, plano parallela quâ solâ globus ad motum secundum directionem plani A C, sollicitatur, & erit vis acceleratrix juxtà plani inclinati directionem agens, ad vim acceleratricem perpendiculariter sollicitantem, ut E F, ad D E; sed quoniam triangula E F D, A B C, ob parallelas D E, A B, & angulos rectos F & B, æquales, similia sunt, est F E : D E = AB : AC. Vis igitur acceleratrix gravitatis secundum directionem plani inclinati A C, est ad vim gravitatis acceleratricem secundum directionem horizonti perpendicularem, ut plani inclinati altitudo A B, ad ipsius longitudinem A C. Q. e. D.

76. Coroll. I .... Quoniam vis acceleratrix gravitatis juxtà directionem D E, horizonti perpendicularem constans est (26), & vis acceleratrix F E, secundum directionem plani inclinati A C, est ad vim D E, in ratione datâ A B, ad A C; vis acceleratrix F E, constans quoque erit; ea igitur omnia quæ de motibus vi acceleratrice constanti genitis demonstrata sunt, transferre licet ad motus vi gravitatis acceleratrice in plano inclinato productos; nempè. 1°. Grave per planum inclinatum motu uniformiter accelerato descendit, & motu uniformiter retardato ascendit (25). 2°. Velocitates sunt ut tempora quibus acquiruntur (25); spatia e quiete cadendo descripta sunt in ratione duplicatâ temporum quibus percurruntur, item-

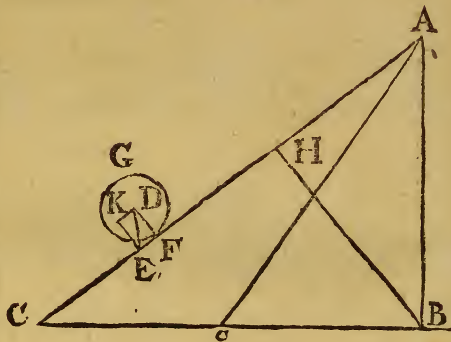
AXIOMATA, SIVE laria duo prima *Galilæus* invenit descensum gravium esse in duplicata ratione temporis, & motum projectilium fieri in parabola; conspirante experientia, nisi quatenus motus illi per aëris resistentiam aliquantulum retardantur. Corpore cadente gravitas uniformis, singulis temporis particulis æqualibus æqualiter agendo imprimit vires æquales in corpus illud, & velocita-

-que velocitatum quæ his temporibus acquiruntur; tempora verò itemque velocitates sunt in ratione subduplicatâ spatiorum (27, 28). 3°. Spatium à gravi in plano inclinato percursum ab initio motûs computatum, dimidium est illius quod eodem tempore ab eodem mobili uniformiter percurri potest cum velocitate ultimò acquisitâ (29).

77. Coroll. 2. Quia vires acceleratrices constantes sunt inter se in ratione velocitatum, quas eodem tempore producunt (13), velocitas lapsu perpendiculari per A B, acquisita erit ad velocitatem eodem tempore in plano inclinato acquisitam, ut longitudo plani, A C, ad ipsius altitudinem A B (75).

78. Coroll. 3. Si ex puncto B, perpendiculi A B, ad planum inclinatum agatur perpendicularis B H; spatium A H, in plano inclinato eodem tempore percurritur, quo lapsu perpendiculari describitur A B; nam ob similitudinem triangulorum A H B, A B C; A H : A B = A B : A C, adeóque A H, est ad A B, ut velocitas in plano inclinato acquisita ad velocitatem, eodem tempore in perpendiculo A B, acquisitam (77). Sed velocitates motu uniformiter accelerato acquisitæ, sunt ut dupla spatia, seu, quod idem est, ut spatia eodem tempore percursa (76); ergò A H, A B, sunt spatia eodem tempore percursa.

79. Coroll. 4. Tempus quo planum A C percurritur, est ad tempus quo percurritur ipsius altitudo A B, ut longitudo plani A C, ad ejus altitudinem A B; tempus enim per A C, est ad tempus per A H, in ratione subduplicatâ A C, ad A H (76). Sed ob continuam rectarum A C, A B, A H, analogiam A C, est ad A B, in ratione subduplicatâ A C, ad A H; tempus igitur per A C, est ad tempus per A H, hoc est (78), ad tempus per A B, ut A C, ad A B.

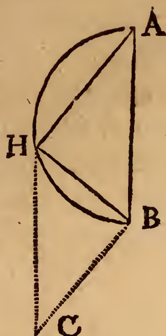


80. Coroll. 5. Cum sit A C, ad A B, ut tempus per A C, ad tempus per A B; & A c, ad A B, ut tempus per A c, ad tempus per A B (79), tempora quibus percurruntur diversa plana A C, A c, ejusdem altitudinis A B, sunt ut planorum longitudines.

81. Coroll. 6. Celeritates gravium in plano quovis inclinato A C, & in perpendiculo A B, æquales sunt, ubi gravia ex eâdem altitudine ad eandem rectam horizontalem C B, pervenerint, adeóque velocitates in planis inclinatis A C, A c, ejusdem altitudinis in C & c, sunt æquales; est enim velocitas in B, ad velocitatem in H, ut A B ad A H (ea enim spatia eodem tempore descripta sunt) & ob similitudinem triangulorum A H B, A B C, sicut A C ad A B: velocitas autem in C, est ad velocitatem in H, in ratione subduplicatâ A C, ad A H, hoc est, ob continuam analogiam rectarum A C, A B, A H, in ratione A C, ad A B; quare velocitas in B, est ad velocitatem in H, ut velocitas in C, ad eandem velocitatem in H, adeóque velocitas in C, æqualis est velocitati in B.

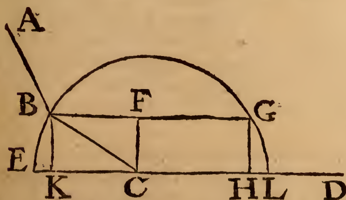
82. Co-

citates æquales generat: & tempore toto vim totam imprimit & velocitatem totam generat tempori proportionalem. Et ſpatia temporibus proportionalibus deſcripta, ſunt ut velocitates



82. Coroll. 7. Tempus deſcensûs per chordas quaſlibet A H, H B, circuli cujus diameter, A B, eſt ad horizontem perpendicularis, æquale eſt tempori deſcensûs per totam diametrum A B, ac proinde tempora deſcensûs per omnes chordas ſunt æqualia; Cum enim angulus A H B, in ſemicirculo rectus ſit, tempus deſcensûs per A H, æquale eſt tempori deſcensûs per A B, (78), & ductâ H C, diametro A B, æquali & parallelâ junctâque C B, erit ob, angulum H B C, rectum, tempus per H B, æquale tempori per H C, ſeu per A B.

83. Si corpus in curvâ immotâ incedit, vis quâ ſingula curvæ puncta premit, cum vi finitâ quâ movetur corpus comparata, major non eſt quantitate infiniteſimâ primi ordinis; vis ſeu celeritas quam in ſingulis curvæ punctis amittit, major non eſt quantitate infiniteſimâ ſecundi ordinis; tandem vis ſeu celeritas per finitum curvæ arcum amiſſa major non eſt quantitate infiniteſimâ primi ordinis, adeóque corpus in curvâ progreditur eâdem celeritate finitâ ac ſi nihil omninò virium amitteret....

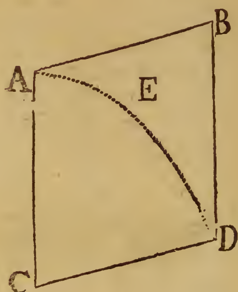


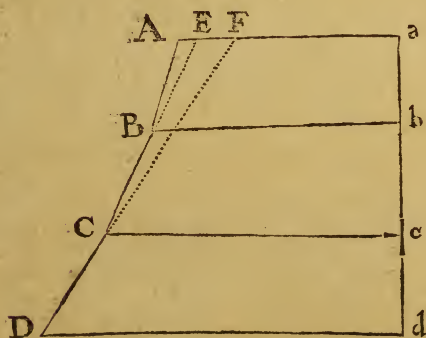
Dem.... (Curva quælibet, ut notum eſt, conſiderari poteſt tanquam polygonum A B C D, ex innumeris atque infiniteſimis lateribus rectis A B, B C, C D, compoſitum, quorum duo quævis B C, C D, angulum comprehendunt à duobus angulis rectis, nonniſi quantitate infiniteſimâ deficientem, ità ut producto latere C D, in E, angulus externus B C E, ſit infiniteſimus. Centro C, & radio C B, deſcribatur ſemicirculus E B G L, ex puncto B verò demittatur in rectam E D, perpendicularis B K, & completo rectangulo K F, motus corporis latere B C, expoſitus, in binos B K, B F, ſeu K C, reſolvitur (coroll. 1. Newt.). His poſitis manifeſtum eſt (51) vim ſeu celeritatem quâ corpus in latus C D, incurrit, illudque premit ſeu percutit, perpendiculari F C, ſive B K, repræſentari; celeritatem poſt ictum, (ſupponendo corpora eſſe elaterio deſtituta) rectâ K C, ſeu C H, exhiberi, & celeritatem ex impactu in C, amiſſam rectâ E K, exponi, cum E K, ſit differentia rectarum B C, K C; hoc eſt, celeritatum ante & poſt impactum. Jam ſi angulus B C K, finitæ quantitatis eſſet, recta B K, finitam haberet ad rectas B C, K C, rationem, quæ decreſcente angulo B C K, ſemper minuitur adeóque infiniteſima evadit, dum angulus B C K eſt infiniteſimus; eſt igitur B K, ſeu vis quâ corpus curvam premit in C, quantitas non major infiniteſimâ primi ordinis; verùm quia in circulo E K : B K = B K : K L, erit E K, quantitas infiniteſima reſpectu B K, quemadmodum, ex demonſtratis B K, infiniteſima eſt reſpectu B C, aut K C, adeóque reſpectu K L; ergò celeritas ſeu vis in puncto C amiſſa non ſuperat quantitatem infiniteſimam ſecundi ordinis. Quarè cùm velocitas quam corpus per ſingula curvæ latera A B, B C, C D, amittit, non excedat quantitatem infiniteſimam ſecundi ordinis, per latera curvæ numero infinita, hoc eſt, per arcum curvæ finitum, non poteſt celeritatem amittere majorem quantitate infiniteſimâ primi ordinis quæ eſt ſumma quantitatum infiniteſimarum ſecundi ordinis; eâ igitur quantitate neglectâ, corpus eodem modo motum ſuum in curvâ continuat ac ſi nihil virium amiſiſſet. Q. e. D.

84. Si

AXIOMATA, SIVE

tes & tempora conjunctim; id est in duplicata ratione temporum. Et corpore sursum projecto gravitas uniformis vires imprimit & velocitates aufert temporibus proportionales; ac tempora ascendendi ad altitudines summas sunt ut velocitates auferendæ, & altitudines illæ sunt ut velocitates ac tempora conjunctim: seu in duplicata ratione velocitatum. Et corporis secundum rectam quamvis projecti motus à projectione oriundus cum motu à gravitate oriundo componitur. Ut si corpus *A* motu solo projectionis dato tempore describere posset rectam *A B* & motu solo cadendi eodem tempore describere posset altitudinem *A C*: compleatur parallelogrammum *A B D C*, & corpus illud motu composito reperietur in fine temporis in loco *D*; & curva linea *A E D*, quam corpus illud describet, erit parabola quam recta *A B* tangit in *A*, & cujus ordinata *B D* est ut *A B q*. Ab iisdem legibus & corollariis pendent demonstrata de





84. Si grave ex quiete in A, per plana contigua A B, B C, C D, descendat, & flexus seu anguli B, C, motui non officiant, velocitas gravis per plana inclinata descendentis, æqualis est velocitati quam lapsu perpendiculari haberet in pari ab horizonte distantiâ .... Dem.... Ductis rectis A a, B b, C c, D d, horizonti parallelis & perpendiculo, a d, demisso, producantur C B, D C, donec occurrant rectæ A a, in E & F; velocitas lapsu per A B, acquisita æqualis est velocitati quæ acquireretur lapsu per E B, aut etiam per A B, (81), adeóque cum flexus B, motui non officiat (per hyp.) grave motum suum per planum B C, eodem modo continuat, ac si ex puncto E, per planum unicum E C, descendisset; est igitur velocitas in C, æqualis velocitati lapsu perpendiculari per, a c, acquisitæ. Similiter ostenditur velocitatem in D æqualem esse velocitati in d. Q. e. D.

85. Augeatur planorum numerus, & singulorum longitudo minuatur in infinitum ut linea A B C D curva evadat, & quia anguli B, C, D, velocitati corporis non officiunt (83), manifestum est gravis per curvam descendentis velocitatem in singulis curvæ punctis B, C, D, æqualem esse velocitati lapsu perpendiculari acquisitæ in punctis correspondentibus b, c, d.

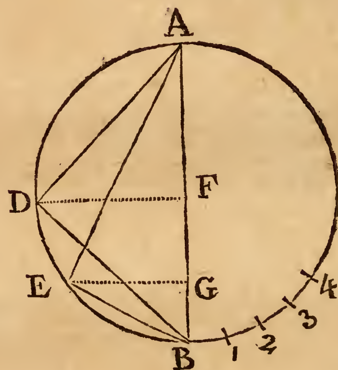
86. Si

de temporibus oſcillantium pendulorum, ſuffragante horologiorum experientiâ quotidianâ: Ex his iiſdem & lege tertiâ *Chriſtophorus Wrennus* Eques auratus, *Johannes Wallisius S. T. D.* & *Chriſtianus Hugenius*, ætatis ſuperioris geometrarum facile principes, regulas congreſſuum & reflexionum durorum corporum ſeorſim invenerunt, & eodem fere tempore cum *Societate Regiâ* communicarunt, inter ſe (quoad has leges) omnino conſpirantes: & primus quidem *Wallisius*, deinde *Wrennus* & *Hugenius* inventum prodiderunt. Sed & veritas comprobata eſt à *Wrenno* coram *Regiâ Societate* per experimentum pendulorum: quod etiam

LEGES MOTUS.

86. Si grave deſcendat per curvam quamlibet A B C D, ductis lineis A a, B b, C c, horizonti parallelis, & ex puncto curvæ infimo D, rectâ D E, ad horizontem normali, patet (85) gravis per arcum A D, vel a D, deſcendentis eandem eſſe velocitatem in punctis æquè altis B & b, C & c. Quarè cum ex A, pervenit ad punctum infimum D, ex impetu per lapſum acquiſito aſcendit per arcum D a, ad punctum a, æquè altum, in quo omnis velocitas extinguitur, & in punctis correſpondentibus B & b, C & c, eandem tam in aſcenſu quam in deſcenſu habet velocitatem (26). Si verò arcus D a, arcui D A, ſimilis & æqualis fuerit, ſinguli arcus æquè alti C D & D c, B D & D b, A D & D a, æqualibus reſpectivè temporibus percurruntur (26).

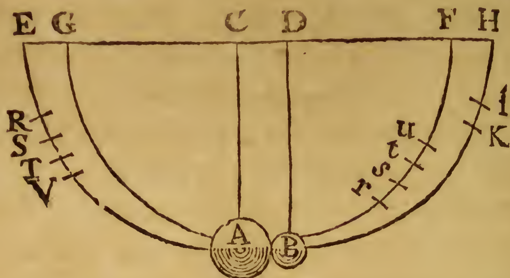
87. Velocitas gravis per quemvis circuli arcum E B, deſcendentis in puncto infimo B, eſt ad velocitatem quam lapſu perpendiculari per totam diametrum A B acquireret, ut chorda E B, ad diametrum A B..... Dem... Ductâ E G, horizonti parallelâ adeóque ad diametrum A B, perpendiculari, velocitas per arcum E B, acquiſita, æqualis eſt velocitati acquiſitæ per G B (85). Eſt ergò ad velocitatem per A B, acquiſitam in ratione ſubduplicatâ G B, ad A B (28). Sed



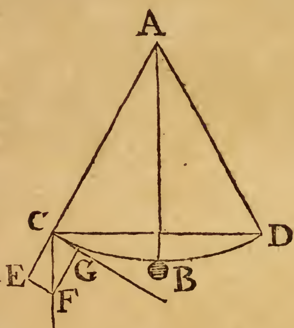
propter triangula rectangula ſimilia A E B, B G E, G B : E B = E B : A B, adeóque E B, ad A B, in ratione ſubduplicatâ G B ad A B; velocitas igitur per arcum E B, acquiſita in B, eſt ad velocitatem per A B, acquiſitam ut chorda E B, ad diametrum A B. Q. e. D.

88. Coroll. Ductâ quâvis alterâ chordâ D B, erit etiam velocitas per arcum D B, acquiſita in B, ad velocitatem per diametrum A B, ut D B, ad A B, ac proindè velocitates per arcus D B, E B, acquiſitæ in puncto infimo B, ſunt inter ſe ut horum arcuum chordæ; undè ſi capiantur arcus B 1, B 2, B 3, B 4, quorum chordæ ſint reſpectivè ut 1. 2. 3. 4. velocitas gravis per arcus illos deſcendentis in puncto B, erunt ut 1. 2. 3. 4.

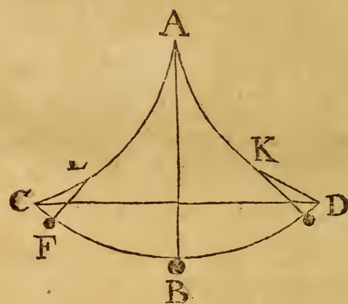
AXIOMATA, SIVE etiam *Clarissimus Mariottus* libro integro exponere mox dignatus est. Verùm, ut hoc experimentum cum theoriis ad amussim congruat, habenda est ratio, cùm resistentiæ aëris, tum etiam vis elasticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora sphærica *A*, *B* filis parallelis & æqualibus *A C*, *B D*, à centris *C*, *D*. His centris &



inter-



89. Si pendulum B, circà punctum fixum A, rotetur, & globus B, filo A B, appensus instar puncti consideretur, arcum circuli C B D, describet, idemque globo huic motus accidet ac si in superficie sphæricâ immotâ & perfectè lævigatâ sublato filo volveretur .... Dem ... Ad punctum C, adducatur globus B, & exindè demittatur; & recta C F, horizonti perpendicularis vim gravitatis acceleratricem in perpendiculo exponat; ea vis resolvatur in duas vires, quarum una exhibeatur rectâ C E, ad arcum seu tangentem in C, perpendiculari; altera verò tangente C G; vis C E, quâ filum A C, directè trahitur ad globi motum nihil confert & solâ vi ut C G, urgetur; arcus verò C B D, considerari potest ut polygonum cujus latus unum in C, positionem habet tangentis C G, & si globus per planum C G, vi gravitatis urgeatur, sublato filo vis C E, plano C G, tota sustinetur, & globus solâ vi C G, ad motum in plano C G, sollicitatur. Cum igitur idem in omnibus punctis arcûs C B D, eodem modo demonstrari possit, patet filum A C, superficiei C B D, vices subire, & in utroque casu motum globi per arcum C B D, eâdem ratione perfici. Q. e. D.



90. Coroll. 1. Pendulum A B, inter duas laminas curvas A L C, A K D, immotas & sese contingentes in A, ità oscilletur ut filum A B, in situ ad horizontem perpendiculari utramque laminam tangat in A; dum verò oscillatur pendulum, curvis laminis filum circumplicetur easque perpetuò tangat ut in L & K; per hanc fili ad laminas applicationem continuò impeditur motus penduli in circulo, aliamque curvam C B D, describere cogitur; & eodem quo usi fuimus ratiocinio (89), demonstratur pendulum in hæc curvâ eodem modo moveri ac si grave B, libere & absque filo per curvam immotam & perfectè lævigatam C B D, incederet.

91. Coroll. 2. Quapropter omnia quæ de motu gravium in curvis superficiebus demonstrata fuere, motui penduli per easdem curvas oscillantis conveniunt. Nempe 1°. Penduli velocitas semper æqualis est velocitati quam acquireret cadendo per altitudinem perpendicularem arcui percurso correspondentem (85). 2°. Pendulum ex C demissum, vi gravitatis urgen-

intervallis deſcribantur ſemicirculi *EAF*, *GBH* radiis *CA*, *DB* biſecti. (b) Trahatur corpus *A* ad arcûs *EAF* punctum quodvis *R*, & (ſubducto corpore *B*) demittatur inde, redeatque poſt unam oſcillationem ad punctum *V*. Eſt *RV* retardatio ex reſiſtentia aeris. Hujus *RV* fiat *ST* pars quarta ſita in medio, ita ſcilicet ut *RS* & *TV* æquentur, ſitque *RS* ad *ST* ut 3 ad 2. Et iſta *ST* exhibebit retardationem in deſcenſu ab *S* ad *A* quam proximè. Reſtituatur corpus *B* in locum ſuum. Cadat corpus *A* de puncto *S*, & velocitas ejus in loco reflexionis *A* ſine errore ſenſibili tanta erit, ac ſi in vacuo cecidiſſet de loco *T*. Exponatur igitur

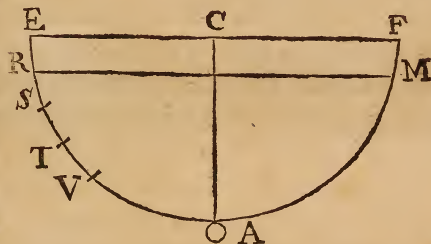
LEGES MOTUS.

te ad punctum infimum B, deſcendet, & ex impetu concepto, per arcum B D, aſcendet ad eandem altitudinem D, ibique omni velocitate amiſsâ, vi gravitatis impellente ad punctum infimum B. relabetur, amiſſamque recuperans velocitatem redibit ad punctum C, atque ità continuas oſcillationes itu & reditu in curvâ C B D, perficiet (86).

92. Coroll. 3. Si nulla foret medii reſiſtentia, nullaque circà laminas incurvatas aut centrum rotationis frictio, æquales & perpetuæ forent pendulorum oſcillationes; verùm has ob cauſas ſingulis vibrationibus, licet inſenſibiliter, minuitur penduli velocitas, arcuſque continuò breviores deſcribit ac tandem omninò quieſcit.

93. Coroll. 4. Velocitates ejuſdem penduli in circuli peripheriam excurrentis, ſunt in puncto infimo ut arcuum deſcriptorum chordæ (88).

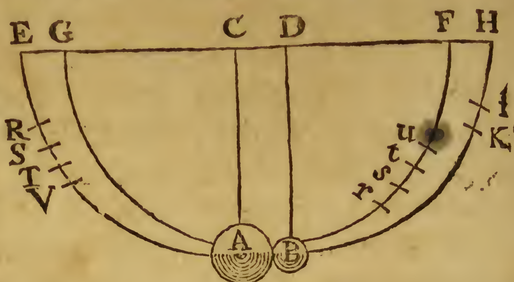
(b) 94. Trahatur corpus A, ad arcûs E A F, punctum quodvis R, & demittatur indè, ſublatâ medii reſiſtentiâ ad eandem altitudinem M, aſcendere & rursùs ad punctum R, redire debet (92). Cum autem poſt unam oſcillationem ex itu & reditu compoſitam perveniat (ex hyp.) ad punctum V, arcus R V exponet medii retardationem in duplici aſcenſu & deſcenſu; quarè ut habeatur medii retardatio in uno tantum deſcenſu ſumenda eſt quarta pars totius retardationis id eſt quarta pars arcus R V, dummodo ille deſ-

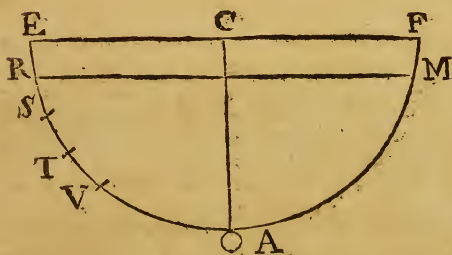


cenſus neque ex puncto ſupremo R neque ex infimo V ordiatur, nam cum major ſit medii retardatio in arcu majori quàm in minori, ſemperque fiant minores arcus à pendulo oſcillante deſcripti, inæquales quoque erunt retardationes in ſingulis arcubus, & retardatio deſcenſus per R A, major erit quartâ parte totius retardationis R V ut retardatio ultimi aſcenſus A V, minor erit quartâ parte totius retardationis R V. Hoc autem aut ſimili calculo determinavit Newtonus punctum S tale ut retardatio in deſcenſu per S A ſit quarta pars totius retardationis R V. Dicatur arcus R A, 1, arcus R V, 4 *b*, arcus quæſitus S A *x*; ſintque retardationes arcubus deſcriptis proportionales, erit arcus S A (*x*) ad arcum R A (1) ut retardatio arcus S A quæ ſtatuitur eſſe *b*, ſeu quarta pars totius R V, ad retardationem primi arcus R A quæ erit $b : x$. Quærantur ſucceſſivè

AXIOMATA, SIVE

tur hæc velocitas per chordam arcus *T A*. Nam velocitatem penduli in puncto infimo esse ut chordam arcûs, quem cadendo descripsit, propositio est geometris notissima. Post reflexionem perveniat corpus *A* ad locum *s*, & corpus *B* ad locum *k*. Tollatur corpus *B* & inveniatur locus *v*; â quo si corpus *A* demittatur & post unam oscillationem redeat ad locum *r*, sit *s t* pars quarta ipsius *r v* sita in medio, ita videlicet ut *r s* & *t v* æquentur; & per chordam arcus *t A* exponatur velocitas, quam corpus *A* proxime post reflexionem habuit in loco *A*. (c) Nam *t* erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus *A*, sublatâ aeris resistentiâ, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus *k*, ad quem corpus *B* ascendit, & inveniendus locus *l*, ad quem corpus illud ascen-





sive retardationes secundi, tertii, quartive arcus eâdem ratione; arcus autem secundus est æqualis primo R A, dempta ejus retardatione *b* : *x*. Tertius arcus æqualis secundo demptâ ejus retardatione, & sic deinceps, omnes verò illæ retardationes simul sumptæ æquabuntur toti retardationi R V seu 4 *b*; unde fit æquatio ex quâ valor arcus S A, seu *x*, obtinebitur, per approximationem autem invenietur æqualis 1—3 : 2. *b*, sumatur itaque R S æqualis quartæ parti cum ejus semisse totius retardationis R V, retardatio per arcum S A erit æqualis S T quartæ parti totius retardationis R V, ideòque cadat corpus ex puncto S, ejus celeritas in A eadem est, sine errore sensibili, ac si in vacuo decidisset ex T.

(c) 95. t, (fig. Newt.), erit locus verus & correctus ad quem corpus A, sublatâ aëris resistentiâ ascendere debuisset; nam corpus A, ex t, in medio non resistente descendens, in puncto infimo A, eam haberet velocitatem quâ posset arcum A t, ascendendo describere (91), & quâ ob aëris resistentiam, nonnisi arcum A s, (94) percurreret, ergò cum post reflexionem ascendat ad s, eam habet in A velocitatem, quâ in medio non resistente ad punctum t ascenderet.

96. Ex-

ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia, perinde ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus *A* (ut ita dicam) in chordam arcûs *TA*, quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco *A* proximè ante reflexionem; deinde in chordam arcus *tA*, ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime post reflexionem. Et sic corpus *B* ducendum erit in chordam arcûs *Bl*, ut habeatur motus ejus proximè post reflexionem. Et simili methodo, ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, inveniendi sunt motus utriusque tam ante, quam post reflexionem; & tum demum conferendi sunt motus inter se & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, putà pedum octo vel duodecim vel sexdecim, concurrerent; reperi semper sine errore trium digitorum in mensuris, ubi corpora sibi mutuo directè occurrebant, æquales esse mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatæ, atque ideo actionem & reactionem semper esse æquales. Ut si corpus *A* incidebat in corpus *B* quiescens cum novem partibus motûs, & amissis septem partibus pergebat post reflexionem cum duabus; corpus *B* resiliebat cum partibus istis septem. Si corpora obviam ibant, *A* cum duodecim partibus & *B* cum sex, & redibat *A* cum duabus; redibat *B* cum octo, factâ detractione partium quatuordecim utrinque. De motu ipsius *A* subducantur partes duodecim & restabit nihil: subducantur aliæ partes duæ, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam: & sic de motu corporis *B* partium sex subducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quod si corpora ibant ad eandem plagam, *A* velocius cum partibus quatuordecim, & *B* tardius cum partibus quinque, & post reflexionem pergebat *A* cum quinque partibus; pergebat *B* cum quatuordecim, facta translatione partium novem de *A* in *B*. Et sic in reliquis. A congressu & collisione corporum nunquam mutabatur quantitas motus, quæ ex summâ motuum con-

AXIOMATA, SIVE

ſpirantium & differentiâ contrariorum colligebatur. Nam errorem digiti unius & alterius in menſuris tribuerim difficultati peragendi ſingula ſatis accuratè. Difficile erat, tum pendula ſimul demittere ſic, ut corpora in ſe mutuo impingerent in loco infimo *A B*; tum loca *s*, *k* notare, ad quæ corpora aſcendebant poſt concurſum. Sed & in ipſis corporibus pendulis inæqualis partium denſitas, & textura aliis de cauſis irregularis, errores inducebant.

Porro nequis objiciat regulam, ad quam probandam inventum eſt hoc experimentum, præſupponere corpora vel abſolutè dura eſſe, vel ſaltem perfectè elaſtica, cujuſmodi nulla reperiuntur in compoſitionibus naturalibus; (d) addo quod experimenta jam deſcripta ſuccedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum à conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam ſi regula illa in corporibus non perfectè duris tentanda eſt, debebit ſolummodo reflexio minui in certâ proportione pro quantitate vis elaſticæ. In theoriâ *Wrenni* & *Hugenii* corpora abſolutè dura redeunt ab invicem cum velocitate congreſſus. (e) Certius id affirmabitur de perfectè elaſticis. (f) In imperfectè elaſticis velocitas reditus minuenda eſt ſimul cum vi elaſticâ; propterea quod vis illa, (niſi ubi partes corporum ex congreſſu læduntur, vel extenſionem aliqualem quaſi ſub

(d) 96. Experimenta jam deſcripta ſuccedunt in corporibus mollibus & non elaſticis æquè ac in duris & elaſticis, ut potè non à conditione duritiei & elaſticitatis, ſed tantum ab actionis & reactionis æqualitate & oppoſitione pendentia; nam ſi regula illa in corporibus non perfectè elaſticis tentanda eſt, ut ex ipſorum motibus antè conflictum inveniantur motus poſt conflictum, debebit ſolum modò reflexio minui in certâ proportione, pro quantitate vis elaſticæ (52).

(e) 97. Certius id affirmabitur de perfectè elaſticis; corpora enim perfectè dura ſeu quorum partes nullâ vi finitâ ſeparari aut flecti poſſunt, nullâ quoque vi reſtitutivâ aut repulſivâ pollere videntur; adeóque cum nihil ſine causâ fiat, corporum perfectè durorum concurrentium nulla videtur eſſe poſſe reflexio.

(f) 98. In imperfectè elaſticis, velocitas reditûs minuenda eſt cum vi elaſticâ, propterea quod vis illa, licet imperfecta, certa tamen ac determinata eſt, in iiſdem corporibus, niſi ubi partes corporum ex congreſſu læduntur, vel extenſionem aliqualem quaſi ſub malleo patiuntur; dum enim corporis elaſtici fibræ ex ictu flectuntur, ſi aliqua abrumpatur fibra, ea non ſeſe reſtituit, adeóque vis corporis reſtitutiva minuitur; ſi verò fibræ extendantur, ut ferri lamina repetitis mallei ictibus in longum diducitur, pars ictûs huic fibrarum extenſioni adhibita, vi reſtitutivæ detrahitur. His cauſis addi poteſt inteſtinus partium corporis percuſſi motus ſono

ſub malleo patiuntur,) certa ac determinata ſit (quantum ſentio) faciatque ut corpora redeant ab invicem cum velocitate relativâ, quæ ſit ad relativam velocitatem concurſus in datâ ratione. Id in pilis ex lanâ arctè conglomeratâ & fortiter conſtrictâ ſic tentavi. Primum demittendo pendula & menſurando reflexionem, inveni quantitatem vis elaſticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis caſibus concurſuum, & reſpondebant experimenta. Redibant ſemper pilæ ab invicem cum velocitate relativâ, quæ eſſet ad velocitatem relativam concurſus ut 5 ad 9 circiter. Eadem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex ſubere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto lex tertia quoad ictus & reflexiones per theoriam comprobata eſt, quæ cum experientiâ plane congruit.

LEGES MOTUS.

In

ſono ipſo ſatis indicatus, qui in reflexionem non impenditur. Hæc materia variis Rizzeti experimentis illuſtratur in Commentariis inſtituti Bononienſis. Tria globulorum vitreorum paria ſibi paravit Rizzetus; globuli primi paris diametrum habebant trium unciarum, ſecundi duarum, tertii unius, ità ut eſſent diverſorum parium diametri inter ſe, ut 3. 2. 1. fecit ut globuli primi paris filo appenſi ſimul congrederentur, notavitque velocitatem reſpectivam quam habuerunt vel antè vel poſt ictum, detractâ tamen more Newtoniano aëris reſiſtentiâ; idemque tentavit tum in 2°. tum in 3°. pari. In 1°. globulorum pari cum velocitas reſpectiva antè ictum fuiſſet 11, fuit poſt ictum 10; in 2°. pari cum fuiſſet antè ictum 16, fuit poſt ictum 15; in 3°. pari cum fuiſſet ante ictum 31; fuit poſt ictum 30. Undè velocitatis reſpectivæ defectus erat in primo pari 1 : 11. in 2°. pari 1 : 16. in 3°. pari 1 : 31; illi autem defectus ſunt ferè diametris 3, 2, 1. proportionales. Aliud experimentum tentavit Rizzetus. Chordam calybeam duos pedes longam horizontaliter poſitam variis modis tendebat, donec tandem repererit tres chordæ tenſiones, quæ efficerent ut tempora quibus chorda pulſa ſeſe reſtituebat, forent ut 3. 2. 1. Eas autem tenſiones ſe aſſecutum eſſe ex graviori vel acutiori chordarum ſono intelligebat; in ſingulis tenſionibus globum eburneum cujus diameter erat duarum unciarum, filo decem pedes longo appenſum & in medio tantiſper complanatum in chordam demittebat, & detractâ aëris reſiſtentiâ, velocitatem reſpectivam antè & poſt ictum notabat. Obſervavit autem velocitatem antè ictum eſſe ad velocitatem poſt ictum, ut 11, ad 10, in 1ª tenſione, cum chorda pulſa reſtitueretur tempore 3; ut 16 ad 15 in 2ª tenſione, cum chorda reſtitueretur tempore 2; tandem ut 31, ad 30, in 3ª tenſione, cum chorda reſtitueretur tempore 1; undè concludit defectus ſingulos velocitatis poſt ictum, temporibus reſtitutionum eſſe proportionales. Manente igitur corporum homogeneorum magnitudine & figurâ, conſtans obſervatur ratio velocitatis reſpectivæ poſt ictum ad velocitatem reſpectivam antè ictum; ſed mutatâ magnitudine, experimenta Rizzeti oſtendunt defectus velocitatis reſpectivæ poſt ictum in globis homogeneis eſſe in ratione diametrorum, aut etiam in ratione temporum quibus globi compreſſi reſtituuntur.

99. Si

AXIOMATA, SIVE In attractionibus rem ſic breviter oſtendo. Corporibus duobus quibuſvis *A*, *B*, ſe mutuo trahentibus, concipe obſtaculum quodvis interponi, quo congreſſus eorum impediatur. Si corpus alterutrum *A* magis trahitur verſus corpus alterum *B*, quam illud alterum *B* in prius *A*, obſtaculum magis urgebitur preſſione corporis *A* quam preſſione corporis *B*; proindeque non manebit in æquilibrio. Prævalebit preſſio fortior, facietque ut ſyſtema corporum duorum & obſtaculi moveatur in directum in partes verſus *B*, motuque in ſpatiis liberis ſemper accelerato abeat in infinitum. Quod eſt abſurdum & legi primæ contrarium. Nam per legem primam debebit ſyſtema perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, proindeque corpora æqualiter urgebunt obſtaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. (g) Tentavi hoc in magnete & ferro. Si hæc in vaſculis propriis ſeſe contingentibus ſeorſim poſita, in aquâ ſtagnante juxta fluitent; neutrum propellet alterum, ſed æqualitate attractionis utrinque ſuſtinebunt conatus in ſe mutuos, ac tandem in æquilibrio conſtituta quieſcent.

Sic etiam gravitas inter terram & ejus partes mutua eſt. Secetur terra *F I* plano quovis *E G* in partes duas *E G F* & *E G I*: & æqualia erunt harum pondera in ſe mutuo. Nam ſi plano alio *H K* quod priori *E G* parallelum ſit, pars major *E G I* ſecetur in partes duas *E G K H* & *H K I*, quarum *H K I* æqualis ſit parti prius abſciſſæ *E F G*: manifeſtum eſt quod pars media *E G K H* pondere proprio in neutram partium extremarum propendebit, ſed



(g) 99. Si magnes ſuberis fruſto, ſimiliterque ferrum alio ſuberis fruſto imponantur, ut tam magnes quam ferrum in aquâ liberè ſtagnent, æquali motûs quantitate ſibi mutuo obviam eunt, ità ut eorum celeritates ſint in ratione ponderum reciprocâ; dum verò ad contactum pervenerunt, in æquilibrio conſiſtunt. Quarè hoc experimento manifeſtum eſt æqualem eſſe ferri in magnetem & magnetis in ferrum actionem. Similiter ſi quis in cymbâ aquis innatante poſitus, cymbam alte-

sed inter utramque in æquilibrio, ut ita dicam, suspendetur, & quiescet. Pars autem extrema *HKI* toto suo pondere incumbet in partem mediam, & urgebit illam in partem alteram extremam *EGF*; ideoque vis quâ partium *HKI* & *EGKH* summa *EGI* tendit versus partem tertiam *EGF*, æqualis est ponderi partis *HKI*, id est ponderi partis tertiæ *EGF*. Et propterea pondera partium duarum *EGI*, *EGF* in se mutuo sunt æqualia, uti volui ostendere. Et nisi pondera illa æqualia essent, terra tota in libero æthere fluitans ponderi majori cederet, & ab eo fugiendo abiret in infinitum. LEGES MOTUS.

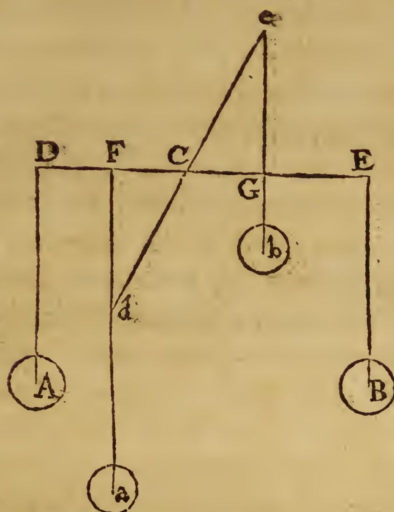
Ut corpora in concursu & reflexione idem pollent, quorum velocitates sunt reciprocè ut vires insitæ: (h) sic in movendis instrumentis mechanicis agentia idem pollent & conatibus contrariis se mutuo sustinent, quorum velocitates secundum determinationem virium æstimatæ, sunt reciprocè ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia libræ, quæ oscillante librâ sunt reciprocè ut eorum velocitates sursum & deorsum: hoc est pondera, si rectà ascendunt & descendunt, æquipollent, quæ sunt reciprocè ut punctorum à quibus suspenduntur distantiæ ab axe libræ; sin planis obliquis aliisve admotis obstaculis impedita ascendunt vel descendunt obliquè, æquipollent, quæ sunt reciprocè ut ascensus & descensus, quâtenus facti secundum perpendiculum: idque ob determinationem gravitatis deorsum. Similiter in trochlea seu polyspasto vis manûs funem directè trahentis, quæ sit ad pondus vel directè vel obliquè ascendens ut velocitas ascensus perpendicularis ad velocitatem manus funem trahentis, sustinebit pondus. In horologiis & similibus instrumentis, quæ ex rotulis commissis constructa sunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum

alteram liberè fluitantem ope funis trahat, vel conto aliove instrumento repellat, cymbæ in partes contrarias cum æquali motûs quantitate ferentur, ità ut earum velocitates sint in ratione reciprocâ ponderum.

(h) 100. In movendis instrumentis mechanicis, agentia idem pollent & conatibus contrariis se mutuo sustinent, quorum velocitates secundùm directionem virium æstimatæ sunt reciprocè ut vires absolutæ . . . . Dem . . . . .

 Duæ

AXIOMATA, SIVE dum & impediendum, si sunt reciprocè ut velocitates partium rotularum in quas imprimuntur, sustinebunt se mutuò. (i) Vis cochleæ ad premendum corpus est ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii eâ in parte ubi à



Duæ potentiæ, seu, quod idem est, duo pondera ope machinæ cujusvis datæ in se mutuò ità agant, ut pondus unum secundum propriam directionem moveri nequeat, quin pondus alterum contrà propriam illius directionem rapiat; si loco machinæ datæ substituatur vectis cujus longitudo & hypomoclion talia sint, ut duo pondera data, vectis extremitatibus appensa, eâdem celeritate ac in machinâ datâ sese mutuò moveant, iidem erunt in vecte & in machinâ datâ conatus ponderum in se mutuò, eadem ipsorum momenta; vis enim eadem requiritur ad eandem velocitatem secundùm eandem directionem in iisdem corporibus producendam. Itaque vectis D E, horizontalis, cum appensis ponderibus A & B, rotetur circa hypomoclion C, ut situm d e, obtineat, & producatur filum a d, usque ad F; pondus A, secundum propriam directionem percurrit spatium F d; & pondus B, contrà propriam directionem eodem tempore percurrit spatium G e; adeóque horum ponderum velocitates sunt semper ut spatia F d, G e, eodem tempore percursa. Momentum ponderis a, est ut a × F C; momentum ponderis b, est ut b × C G, (47). Sed ob similitudinem triangulorum F C D, e C G; F C : C G = F d : G e. Ergò momenta ponderum a & b, sunt inter se ut a × F d, & b × G e; seu sunt ut facta ex ponderibus in sua respective spatia eodem tempore percursa, adeóque etiam ut facta ex ponderibus in suas respectivè velocitates; quare si facta illa æqualia sint, aut quod idem est, si pondera seu vires sint reciproce ut velocitates secundùm directiones virium æstimatæ, erit æquilibrium. Q. e. D.

101. Coroll. Cum ex demonstratis, momenta virium sint semper ut facta ex vi quâlibet in suam velocitatem, seu in spatium quod dato tempore secundùm propriam directionem ex dispositione machinæ percurrere debet, omnium machinarum vires metiri licet.

(i) 102. Vis cochleæ ad premendum corpus est ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii eâ in parte ubi à manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum. Nam si resistentia corporis comprimendi ut pondus movendum consideretur, erit (101) momentum vis manubrium circumagentis, ut factum ex vi illâ in suam velocitatem, & momentum resistentiæ ut factum ex resistentiâ in suam quoque velocitatem; ut ergò sit æquilibrium, debet esse resistentia ad vim manûs, ut circularis velocitas manûs ad velocitatem resistentiæ, sive ad velocitatem progressivam cochleæ; aut quia manus describit circulum cujus radius est manubrii longitudo, è centro cochleæ usque ad manum sumpta, dum interea cochlea per altitudinem seu distantiam duarum helicum progreditur, vis cochleæ ad premendum corpus erit ad vim manûs manubrium

à manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum. (k) Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fissi sunt ad vim mallei in cuneum, ut progressus cunei secundum determinationem vis à malleo in ipsum impressæ, ad velocitatem quâ partes ligni cedunt cuneo, secundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par est ratio machinarum omnium.

Harum efficacia & usus in eo solo consistit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contra: Unde solvitur in omni aptorum instrumentorum genere problema, *Datum pondus datâ vi movendi*, aliamve datam resistentiam vi datâ superandi. Nam si machinæ ita formentur, ut velocitates agentis & resistentis sint reciprocè ut vires; agens resistentiam sustinebit: & majori cum velocitatum disparitate (l) eandem vincet. Certè si tanta sit velocitatum disparitas, ut vincatur etiam resistentia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter se labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem separandorum cohæsione & elevandorum ponderibus oriri solet; superatâ omni eâ resistentiâ, vis redundans accelerationem motus sibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore resistente producet. Cæterum mechanicam tractare

nubrium circumagentis ut peripheria circuli prædicto radio descripti ad distantiam duarum helicum.

(k) 103. Momentum cunei est ut factum (101), ex vi impressâ à malleo in cunei velocitatem, seu in spatium quod dato tempore percurrit cuneus secundùm directionem vis à malleo impressæ; momentum verò resistentiæ ligni cuneo findendi est ut factum ex illâ resistentiâ in velocitatem, quâ partes ligni cedunt cuneo secundùm lineas faciebus cunei perpendiculares, juxtà quarum directionem partes ligni à cuneo moventur; est etiam momentum resistentiæ ut factum ex resistentiâ ligni in spatium quod partes ligni dato tempore describunt, secundùm lineas faciebus cunei perpendiculares. Quoniam igitur cuneus agens secundùm lineam basi ipsius perpendicularem, totam suam altitudinem percurrit, dum partes ligni totâ basis cunei latitudine à se invicem removentur, erit (in casu æquilibrii) vis cunei ad ligni resistentiam, ut cunei altitudo ad latitudinem ipsius basis.

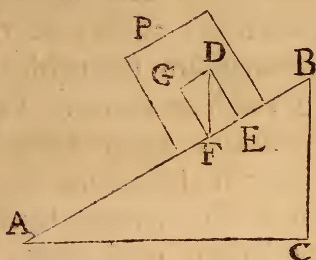
(l) 104. Attritionem seu frictionem, aliasque resistentias ex crassitie rigiditate & funium flexione ortas in machinis considerare necessum est, graves alioquin in praxi errores nascerentur.

Hanc difficilem materiam Sturmius, Leibnitius, Amontonius, Parentius, La-Hirius & alii tractarunt. Bulfingerus Tom. 2°. Comment. Acad. Petropol. ad tentandam experimentis frictionum mensuram duo proponit theoremata quæ ob eorum facilitatem & usum hic exscribere non abs re erit.

 Suprà

AXIOMATA, SIVE

re non est hujus instituti. Hisce volui tantùm ostendere, quàm latè pateat quàmque certa sit lex tertia motûs. Nam si æstimetur agentis actio ex ejus vi & velocitate conjunctim; & similiter resistentis reactio æstimetur conjunctim ex ejus partium singularum velocitatibus & viribus resistendi ab earum attritione, cohæsione, pondere, & acceleratione oriundis; erunt actio & reactio, in omni instrumentorum usu, sibi invicem semper



Suprà horizontem A C, experimento sæpius instituto, elevetur planum A B, ad angulum B A C, ita ut si corpus plano A B, ad hunc angulum elevato imponatur, tantùm non descendat; descendat autem si angulus nonnihil augeatur; & hæreat cum aliquâ adversus descensum renitentiâ, si angulus minuatur. Hic angulus dicitur angulus quietis, eoque invento sic inferatur.

Uti sinus totus ad sinum rectum anguli quietis, ità pondus absolutum P, ad frictionem ejus super plano ad prædictum angulum inclinato. Atque iterùm.

Uti Radius ad tangentem anguli quietis, ità pondus absolutum P, ad frictionem ejus super plano horizontali, cùm trahitur in directione ad horizontem parallelâ .... Dem ... Linea D F, horizonti perpendicularis, pondus absolutum P, seu vim totam quâ corpus in perpendiculo descendere nititur, exponat; & ductâ D E, ad planum A B, normali; vis D F, in binas vires nempè D E, plano perpendicularem, & E F, seu D G, plano parallelam resolvitur (41); vis D E, à plano A B, etiam perfectè lævigato tota sustinetur, & solâ vi D G, seu E F, pondus P, nititur juxtà plani directionem descendere; Cùm igitur ob frictionem in plano aspero A B, tantùm non descendat, erit frictio æqualis vi E F; est itaque pondus absolutum P, ad frictionem ejus super plano inclinato A B, ut D F, ad F E, hoc est, ob angulum E rectum & angulum F D E æqualem angulo quietis B A C, ut sinus totus ad sinum anguli quietis. Q. erat 1um.

Jam ut idem transferatur ad planum horizontale, debet vis D E, plano perpendicularis, considerari ut pondus absolutum, & ità planum A B, se habebit ut planum horizontale respectu ponderis D E; vis autem F E, seu frictio consideranda est tanquam vis in æquilibrio constituta cum vi æquali trahente pondus D E, secundùm directionem plano A B, parallelam; & ob triangulorum F D E, B A C, similitudinem, manifestum est pondus D E, esse ad frictionem E F, seu pondus absolutum in plano horizontali horizontaliter tractum, esse ad frictionem ejus, ut Radius ad tangentem anguli quietis. Q. erat 2um.

105. Coroll. In his duobus casibus, frictiones, cæteris omnibus paribus, sunt pressionibus proportionales; nam frictio in plano inclinato dicatur f; in plano horizontali F, & erit per 1um. theor. P : f = A B : B C; & per 2um. theorema P : F = A C; B C. seu F : P = B C : A C; adeóque per compositionem rationum P. F : P. f = A B × B C : B C × A C, ac proinde F : f = A B : A C = F D : D E; hoc est, frictio in plano horizontali

per æquales. Et quatenus actio propagatur per inſtrumentum & ultimò imprimitur in corpus omne reſiſtens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis ſemper erit contraria. LEGES MOTUS.

tali eſt ad frictionem in plano ad angulum quietis inclinato, ut preſſio in plano horizontali ad preſſionem in plano inclinato.



DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.

SECTIO I.

De methodo rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur.

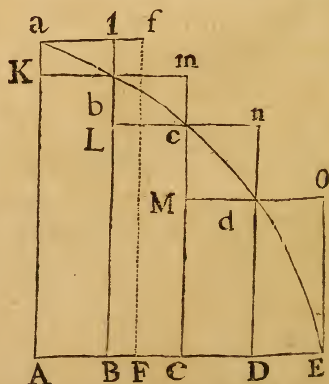
LEMMA I.

Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito constanter tendunt, & ante finem temporis illius propiùs ad invicem accedunt quàm pro datâ quavis differentiâ, fiunt ultimò æquales.

SI negas; fiant ultimò inæquales, & sit earum ultima differentia *D*. Ergo nequeunt propiùs ad æqualitatem accedere quam pro datâ differentiâ *D*: contra hypothesin.

LEMMA II.

Si in figurâ quâvis A a c E, *rectis* A a, A E *& curvâ* a c E *comprehensâ, inscribantur parallelogramma quotcunque* A b, B c, C d, &c. *sub basibus* A B, B C, C D, &c. *æqualibus, & lateribus* B b, C c, D d, &c. *figuræ lateri* A a *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* a K b l, b L c m, c M d n, &c. *Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes quas habent ad se invicem figura inscripta* A K b L c M d D, *circumscripta* A a l b m c n d o E, *& curvilinea* A a b c d E, *sunt rationes æqualitatis.*



Nam

Nam figuræ inſcriptæ & circumſcriptæ differentia eſt ſumma parallelogrammorum *K l*, *L m*, *M n*, *D o*, hoc eſt (ob æquales omnium baſes) rectangulum ſub unius baſi *K b* & altitudinum (m) ſumma *A a*, id eſt, rectangulum *A B l a*. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus *A B* in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per lemma 1) figura inſcripta & circumſcripta & multo magis figura curvilinea intermedia fiunt ultimò æquales. *Q. E. D.*

LEMMA III.

Eædem rationes ultimæ ſunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines A B, B C, C D, &c. *ſunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim *A F* æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelo-

(m) 106. Si fuerint quotcumque & cujuſvis generis quantitates decreſcentes, A a, B b, C c, D d, erunt omnium differentiæ ſimul ſumptæ æquales exceſſui maximæ ſuprà minimam. Nam perſpicuum eſt A a − B b + B b − C c + C c − D d = A a − D d: unde ſi ultima ſeriei quantitas ſit o, ut in ſerie A a, B b, C c, D d, o, ſumma differentiarum K a + L b + M c + D d, æqualis erit quantitati maximæ A a.

107. Linea B b, motu ſibi ſemper parallelo accedat ad lineam A a, & interim punctum b, ita moveatur in linea B b, ut ſemper reperiatur in arcu b a; decreſcente linearum A a, B b, diſtantiâ A B, decreſcit quoque earum differentia K a, ac tandem evaneſcente A B, evaneſcit K a, & B b, ſeu A K, fit ultimò æqualis lineæ A a; evaneſcunt autem A B & K a, cum lineæ A a, B b, neque diſtantes, neque prorſus congruentes dici poſſunt, ſed ſimul, ut ita dicam, conjungi incipiunt. In illo ſtatu evaneſcentiæ, linearum A a, B b, differentia K a, minor eſt quâvis lineâ datâ, ſeu infinitè parva eſt, aut inaſſignabilis reſpectu A K & B b; quantitas autem evaneſcens, ſeu infinitè parva, eſt ad quantitatem finitam ut finitum ad infinitum; quare cum notum ſit infinitum ex finiti additione vel ſubtractione non mutari, aut tanquam immutatum haberi poſſe, liquet lineas B b ſeu A K & A a, ſeu A K + K a, pro æqualibus poſſe uſurpari. Similiter, quia evaneſcente K a, trianguli K a b, & parallelogrammi K l, areæ infiniteſimæ ſunt reſpectu parallelogrammi evaneſcentis A b, parallelogrammum iſtud A b, uſurpari poteſt pro parallelogrammo A l, aut etiam pro figurâ A B b a, hoc eſt, pro differentia arearum curvilinearum A E c a, B E c b.

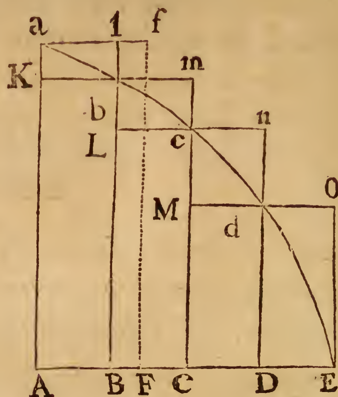
108. Ex his ſequitur diverſos eſſe infiniteſimorum ordines; nam oſtenſum eſt (107) parallelogrammum K l, infiniteſimum eſſe reſpectu parallelogrammi A b, hoc verò parallelogrammum infiniteſimum eſſe reſpectu areæ curvilineæ A E c a.

109. Figura A E c a, circa axem ſuum A E, revolvatur, & quælibet ordinata A a, B b, deſcribet circulum, cujus eſt ordinata ipſa radius, quodlibet rectangulum evaneſcens ut K B, a B, deſcribet cylindrum evaneſcentem, & rectangula, K l, L m, M n, D o, ſingula deſcribent annulos ſolidos, quorum ſumma æqualis erit

De Motu Corporum.

rallelogrammum *F A a f*. (n) Hoc erit majus quàm differentia figuræ inſcriptæ & figuræ circumſcriptæ; at latitudine ſuâ *A F* in infinitum diminutâ, minus fiet dato quovis rectangulo. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſumma ultima parallelogrammorum evaneſcentium coincidit omni ex parte cum figurâ curvilineâ.



Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evaneſcentium arcuum *a b*, *b c*, *c d*, &c. comprehenditur, coincidit ultimo cum figurâ curvilineâ.

Corol. 3. Ut & figura rectilinea circumſcripta quæ tangentibus eorumdem arcuum comprehenditur.

Corol. 4. (o) Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros *a c E*,) non ſunt rectilineæ, ſed rectilinearum limites curvilinei.

LEMMA IV.

Si in duabus figuris A a c E, P p r T, *inſcribantur (ut ſupra) duæ parallelogrammorum ſeries, ſitque idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ*

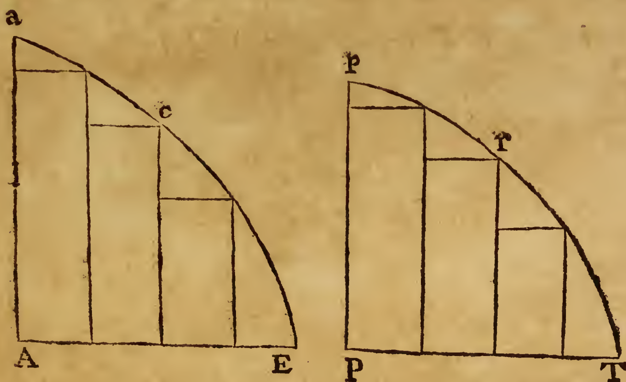
erit cylindro ex rotatione rectanguli A l deſcripto. Quare cum hic cylindrus ſit infiniteſimus, patet (per lemma 1) ultimam rationem ſolidi ex cylindris omnibus compoſiti ad ſolidum ex rotatione figuræ curvilineæ A E c a, genitum eſſe rationem æqualitatis.

(n) 110. Nam ſi ſingulorum parallelogrammorum latitudo æqualis eſſet lineæ A F, figuræ inſcriptæ & figuræ circumſcriptæ differentia foret parallelogrammum A f, (lem. 11); cùm igitur ſingulorum parallelogrammorum latitudo minor ſit latitudine A F, (ex hyp.) prædicta figurarum differentia minor quoque eſt parallelogrammo A f.

(o) 111. Propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros a c E) non ſunt rectilineæ, ſeu non ſunt ex lateribus rectis quocumque numero finito compoſitæ, ſed ſunt figurarum rectilinearum quarum latera numero augentur & longitudine minuuntur in infinitum, limites curvilinei. Dum enim ordinatarum A a, B b, ac proindè chordarum a b, b c, numerus in infinitum augetur, & diſtantiæ A B, B C, in infinitum minuuntur, puncta a, b, K, l, & b, c, L, m, &c. coeunt & curvam a c E formant.

112. De-

timæ parallelogrammorum in unâ figurâ ad parallelogramma in alterâ, singulorum ad singula, sint eædem; dico quod figuræ duæ AacE, PprT, *sunt ad invicem in eâdem illâ ratione.*



Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula, ita (componendo) fit summa omnium ad summam omnium, & ita figura ad figuram; existente nimirum figurâ priore (per lemma III) ad summam priorem, & figurâ posteriore ad summam posteriorem in ratione æqualitatis. *Q. E. D.*

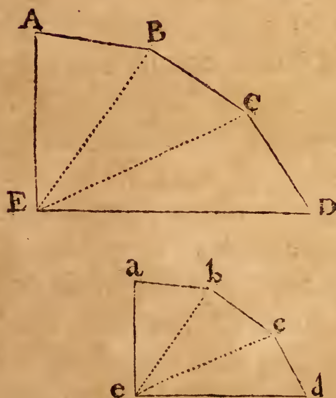
Corol. Hinc si duæ cujuscunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque suo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eâdem illâ datâ ratione. Nam si in lemmatis hujus figuris sumantur parallelogramma inter se ut partes, summæ partium semper erunt ut summæ parallelogrammorum; atque ideo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultimâ ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est (per hypothesin) in ultimâ ratione partis ad partem.

De Motu Corporum.

LEMMA V.

Similium figurarum latera omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea; & areæ sunt in duplicata ratione laterum. (P)

LEM.

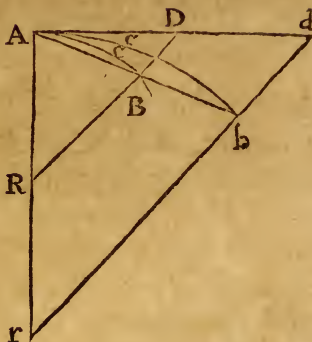


(P) 112. Demonstr.... Duæ figuræ, A D E, a d e, similes dicuntur, quarum latera omnia sibi mutuò respondentia, ut A B, a b, B C, b c, proportionalia sunt, & angulos æquales, ut A B C, a b c, continent; undè jam patet summas laterum utriusque figuræ esse inter se ut duo quævis latera correspondentia A B, a b. Ductis ex E, & e, ad omnes angulos lineis E B, E C, e b, e c, figuræ in sua triangula dividantur; & quoniam anguli D & d, æquales sunt, lateraque E D, e d, D c, d c, proportionalia, (per definit.), duo triangula E C D, e c d, erunt similia, adeóque anguli E C D, e c d, æquales, & latera E C, e c, lateribus C D, c d proportionalia; quare cum anguli B C D, b c d sint etiam æquales (per definit.), æquantur quoque anguli, E C B, e c b, & quia B C : b c = C D : c d = E C : e c, triangula duo E B C, e b c similia erunt. Idem eâdem ratione de aliis triangulis E B A, e b a demonstratur. Verùm areæ singulorum triangulorum similium, quæ in duabus figuris sibi mutuò respondent, sunt inter se in duplicatâ ratione laterum homologorum; ac proinde in datâ ratione; ergò summæ triangulorum, in utrâque figurâ, hoc est, figurarum areæ rationem habent laterum homologorum duplicatam. Jam numerus laterum A B, B C, &c. a b, b c, &c. augeatur & eorum longitudo minuatur in infinitum, & (per Cor. 4. Lem. III.) figuræ A B C D, a b c d, fient curvilineæ; similium igitur figurarum latera omnia, quæ sibi mutuò respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea, & areæ sunt in duplicatâ ratione laterum. Q. E. D.

113. Cur-

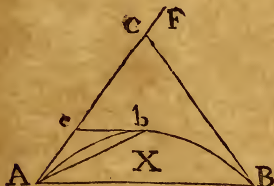
LEMMA VI.

Si arcus quilibet positione datus ACB *subtendatur chordâ* A B, *& in puncto aliquo* A, *in medio curvaturæ* (q) *continuæ, tangatur à rectâ utrinque productâ* A D; *dein puncta* A, B *ad invicem accedant & coëant; dico quod angulus* B A D, *sub chordâ & tangente contentus, minuetur in infinitum & ultimò evanescet.*



Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus *ACB* cum tangente *AD* angulum rectilineo æqualem, & propterea curvatura ad punctum *A* non erit continua, contra hypothesin.

LEM-



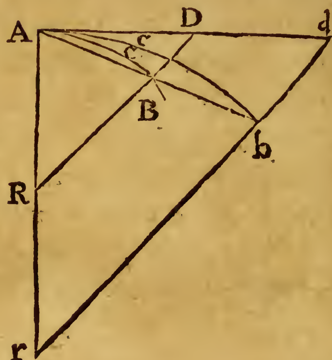
(q) 113. Curva continua BA, considerari potest tanquam descripta motu puncti B continuò mutantis directionem suam quâ per rectam tangentem BC, progredi nititur. Unde si arcus AB, sit ubique versus eamdem partem X, cavus, semperque ducantur tangentes AF, BC, sese intersecantes in C, accedente puncto B, ad A, anguli BCF, BAC, CBA, quos tangentes & chordæ complectuntur, continuò, non verò per saltum, decrescunt, & evanescente chordâ A b, evanescunt, atque nulli fiunt, dum punctum b, idem omninò est cum puncto A. Necesse igitur est ob continuitatem decrementorum, ut angulus C A b, per omnes magnitudinis gradus inter angulum C A B, & o, seu nihilum medios transeat priusquam nullus omnino sit; quod generatim statuendum est de omnibus quantitatibus, quæ nascuntur & continuò crescunt, vel quæ continuò decrescunt & tandem evanescunt; non possunt enim continuò crescere vel decrescere, nec ab uno extremo ad alterum pervenire, quin per omnes gradus magnitudinis inter duo extrema medios transeant. Itaque inter tangentem A F, & chordam infinitesimam A b, nulla duci potest linea recta, quæ angulum finitum cum chordâ vel tangente efficiat; ideoque inter arcum A B, & tangentem A F, nulla duci potest linea recta quæ arcum non secet.

De Motu Corporum.

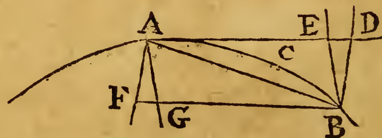
LEMMA VII.

Iisdem positis; dico quod ultima ratio arcûs, chordæ, & tangentis ad invicem est ratio æqualitatis.

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur semper *A B* & *A D* ad puncta longinqua *b* ac *d* produci, & (r) secanti *B D* parallela agatur *b d*. Sitque arcus *A c b* semper similis arcui *A C B*. Et punctis *A*, *B* coeuntibus, angulus *d A b*, per lemma superius, evanescet; ideoque rectæ semper finitæ *A b*, *A d*, & arcus intermedius *A c b* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hisce semper proportionales rectæ *A B*, *A D*, & arcus intermedius *A C B* evanescent, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. *Q. E. D.*



Corol. 1. Undè si per *B* ducatur tangenti parallela *B F*, rectam quamvis *A F* per *A* transeuntem perpetuo secans in *F*, hæc *B F* ultimo ad arcum evanescentem *A C B* rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo *A F B D* rationem semper habet æqualitatis ad *A D*.



Corol.

(r) 114. Secans R D, supponitur semper efficere cum tangente A D & chordâ A B, angulos finitos, aut angulos ad quos angulus evanescens B A D, rationem habet infinitesimam; nam si anguli A B D, B A D, essent ejusdem ordinis infinitesimi, trianguli A B D latera finitam haberent inter se rationem. Angulus enim externus B D d, æqualis duobus internis oppositis D A B, D B A, esset ejusdem ordinis cum illis angulis; & quoniam in omni triangulo latera sunt ut sinus angulorum oppositorum, latera A B, B D, A D, finitam rationem haberent sinuum angulorum ejusdem ordinis B D d, D A B, A B D; cùm autem anguli A & B, supponuntur infinitesimi, angulus A D B est obtusus, adeóque chorda A B, majori angulo opposita, ad tangentem A D, datam habebit majoris inæqualitatis rationem.

Corol. 2. Et si per *B* & *A* ducantur plures rectæ *B E*, *B D*, *A F*, *A G*, secantes tangentem *A D* & ipsius parallelam *B F*; ratio ultima abscissarum omnium *A D*, *A E*, *B F*, *B G*, chordæque & arcus *A B* ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA VIII.

Si rectæ datæ A R, B R *cum arcu* A C B, *chordâ* A B *& tangente* A D, *triangula tria* R A B, R A C B, R A D *constituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, & ultima ratio æqualitatis.*

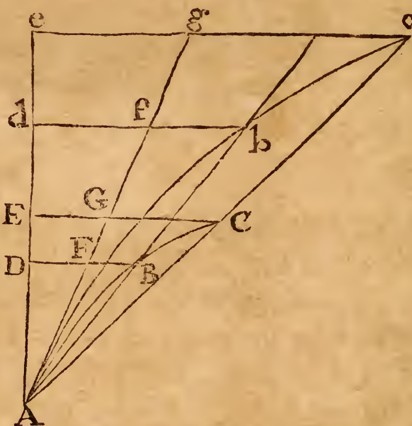
Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur semper *A B*, *A D*, *A R* ad puncta longinqua *b*, *d* & *r* produci, ipsique *R D* parallela agi *r b d*, & arcui *A C B* similis semper sit arcus *A c b*. Et coeuntibus punctis *A*, *B*, angulus *b A d* evanescet, & propterea triangula tria semper finita *r A b*, *r A c b*, *r A d* coincident, suntque eo nomine similia & æqualia. Unde & hisce semper similia & proportionalia *R A B*, *R A C B*, *R A D* fient ultimo sibi invicem similia & æqualia. *Q. E. D.*

Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA IX.

Si recta A E *& curva* A B C *positione datæ se mutuo secent in angulo dato* A, *& ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur* B D, C E, *curvæ occurrentes in* B, C, *dein puncta* B, C, *simul accedant ad punctum* A: *dico quod areæ triangulorum* A B D, A C E *erunt ultimo ad invicem in duplicatâ ratione laterum.*

Etenim dum puncta *B*, *C* accedunt ad punctum *A*, intelligatur semper *A D* produci ad puncta longinqua *d* & *e*, ut sint *A d*, *A e* ipsis *A D*, *A E* proportionales, & erigantur ordinatæ *d b*, *e c* ordinatis *D B*, *E C* parallelæ quæ occurrant ipsis *A B*, *A C* productis in *b* & *c*. Duci intelligatur, tum curva *A b c* ipsi *A B C* similis, tum recta *A g*, quæ tangat curvam utramque in *A*, & secet ordinatim applicatas *D B*, *E C*, *d b*, *e c* in *F*, *G*, *f*, *g*. (f) Tum manente longitudine *A e* coeant puncta *B*, *C* cum puncto *A*; & angulo *c A g* evanescente, coincident areæ curvilineæ *A b d*, *A c e* cum rectilineis *A f d*, *A g e*; ideoque (per lemma v.) erunt in duplicata ratione laterum *A d*, *A e*: Sed his areis proportionales semper sunt areæ *A B D*, *A C E*, & his lateribus latera *A D*, *A E*. Ergo & areæ *A B D*, *A C E* sunt ultimo in duplicatâ ratione laterum *A D*, *A E*. *Q. E. D.*



LEM-

(f) 115. Tum manente longitudine finitâ A e, & mutatâ, si necessum fuerit, longitudine A d, ut sit semper A d : A e = A D : A E, coeant puncta B, C, cum puncto A, &c.

116. Spa-

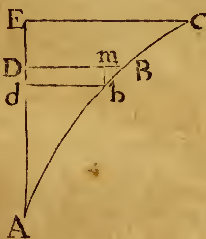
LEMMA X.

Spatia quæ corpus urgente quâcunque vi finitâ describit, sive vis illa determinata & immutabilis sit, sive eadem continuò augeatur vel continuò diminuatur, sunt ipso motus initio in duplicatâ ratione temporum.

Exponantur tempora per lineas *A D*, *A E*, & velocitates genitæ per ordinatas *D B*, *E C*; (t) & spatia his velocitatibus descripta, erunt ut areæ *A B D*, *A C E* his ordinatis descriptæ, hoc est, ipso motus initio (per lemma IX) in duplicatâ ratione temporum *A D*, *A E*. *Q. E. D.*

Corol. 1. (u) Et hinc facile colligitur, quod corporum similes similium figurarum partes temporibus proportionalibus descri-

(t) 116. Spatia his velocitatibus descripta erunt ut areæ A B D, A C E, his ordinatis descriptæ. Nam ductâ d b, ipsi D B, infinitè propinqua, ita ut D d, sit infinitesima seu evanescens respectu A D, A E, lineæ D B, d b, & rectangulum d m, ac figura D d b B, pro æqualibus respective usurpari possunt (107), adeò ut per tempusculum infinitesimum, D d, velocitas D B, tanquam uniformis haberi possit; spatium autem æquabili velocitate d b, percursum, est ut factum ex velocitate d b, & tempusculo D d, (5), hoc est, ut rectangulum D d × d b, seu ut area D B b d; si igitur areæ A C E, A D B, in infinita numero atque infinitesima rectangula, ut d m, divisæ concipiantur, erunt summæ spatiorum percursorum, seu spatia temporibus A E, A D, percursa, ut summæ horum rectangulorum, hoc est, ut areæ ipsæ A C E, A B D, (Lem. III).



117. Cor. Vis acceleratrix finita, utcumque variabilis, ipso motûs initio considerari potest, tanquam vis determinata & immutabilis. Spatia enim, quæ corpus urgente vi acceleratrice constante describit, sunt semper in duplicatâ temporum ratione (27); & contra, si spatia percursa duplicatam habeant temporum rationem, vis acceleratrix constans est; nam si mutabilis esset vis, illa quoque temporum & spatiorum proportio mutaretur. Ergò (Lem. X) vis quælibet acceleratrix finita, utcumque variabilis, ipso motûs initio tanquam immutabilis spectari potest.



(u) 118. Corpora duo A & a, curvas similes A B E, a b e, illarumque partes similes A B, a b, B E, b e, temporibus proportionalibus describant; duobus hisce corporibus, cum ad puncta B & b, pervenerint, accedunt novæ vires acceleratrices inter se æquales & similiter applicatæ, quæ prioribus viribus additæ corpora deferant per arcus B C, b c. Jungan-

De Motu Corporum.

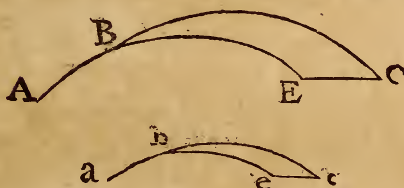
deſcribentium errores, qui viribus quibuſvis æqualibus ad corpora ſimiliter applicatis generantur, & menſurantur per diſtantias corporum à figurarum ſimilium locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iiſdem proportionalibus ſine viribus iſtis pervenirent, ſunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proximè.

Corol. 2. (x) Errores autem qui viribus proportionalibus ad ſimiles figurarum ſimilium partes ſimiliter applicatis generantur, ſunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. (y) Idem intelligendum eſt de ſpatiis quibuſvis quæ corpora urgentibus diverſis viribus deſcribunt. Hæc ſunt, ipſo motus initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 4. Ideoque vires ſunt ut ſpatia, ipſo motus initio, deſcripta directè & quadrata temporum inversè.

Corol.



gantur rectæ E C, e c, quæ errores ſolâ virium perturbantium actione genitos exponent; Lineæ enim illæ ſunt ſpatia ſolâ virium perturbantium actione deſcripta. Cum autem vires perturbantes ſupponantur æquales & ſimiliter applicatæ, idem contingere debet ac ſi corpus aliquod eâdem vi acceleratrice ſollicitatum ſpatia E C, e c, diverſis temporibus deſcriberet, adeoque ſpatia illa ſunt, ipſo motus initio, ut quadrata temporum quibus percurruntur (Lem. X) B C, b c, & quibus abſque virium perturbantium actione percurrerentur arcus ſimiles B E, b e; ſi igitur vires illæ perturbantes ſupponantur conſtantes, ſpatia E C, e c, non ſolùm motus initio, ſed & tempore finito deſcripta, erunt ut prædictorum temporum quadrata (27). Undè ſi admodum exigua ſit virium perturbantium variatio, ſpatia ſeu errores erunt quam proximè ut quadrata temporum.

(x) 119. Errores autem qui viribus proportionalibus, ſeu viribus in datâ ratione exiſtentibus, ad ſimiles figurarum ſimilium partes ſimiliter applicatis generantur, ſunt ut vires & quadrata temporum conjunctim. Nam ſi tempora ſunt eadem, errores ſunt in data ratione virium; ſi vires ſunt eædem, errores ſunt in duplicata ratione temporum quibus generantur; cum igitur vires & tempora variant, errores ſunt in ratione compoſitâ ex datâ virium ratione & duplicatâ temporum.

(y) 120. Nam vires motus initio tanquam conſtantes haberi poſſunt (117); dupla autem ſpatia, adeóque ſimplicia ſpatia, quæ corpora urgentibus viribus conſtantibus deſcribunt, ſunt ut vires & quadrata temporum conjunctim (30); ergo ſpatia quæ corpora urgentibus diverſis viribus deſcribunt, ſunt, ipſo motus initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim. Si itaque vires acceleratrices, motus initio, ſint G, g, ſpatia S, s, tempora T, t, erit $S:s = GTT:gtt$, ideoque $G:g = S:TT:s:tt$, & $TT:tt = S:G:s:g$, hoc eſt, vires ſunt ut ſpatia motus initio deſcripta directè & quadrata temporum inverse; Temporum verò quadrata ſunt ut deſcripta ſpatia directè & vires inversè.

121. Cir-

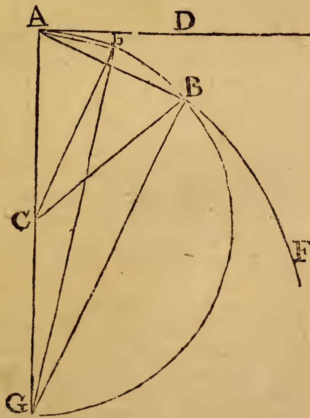
Corol. 5. Et quadrata temporum ſunt ut deſcripta ſpatia directè & vires inversè. LIBER PRIMUS.

Scholium.

Si quantitates indeterminatæ diverſorum generum conferantur inter ſe, & earum aliqua dicatur eſſe ut eſt alia quævis directè vel inversè: ſenſus eſt, quòd prior augetur vel diminuitur in eâdem ratione cum poſteriore, vel cum ejus reciprocâ. Et ſi earum aliqua dicatur eſſe ut ſunt aliæ duæ vel plures directè aut inversè: ſenſus eſt, quod prima augetur vel diminuitur in ratione quæ componitur ex rationibus in quibus aliæ vel aliarum reciprocæ augentur vel diminuuntur. Ut ſi A dicatur eſſe ut B directè & C directè & D inversè: ſenſus eſt, quod A augetur vel diminuitur in eadem ratione cum $B \times C \times \frac{1}{D}$ hoc eſt, quod A & $\frac{BC}{D}$ ſunt ad invicem in ratione datâ.

L E M M A XI.

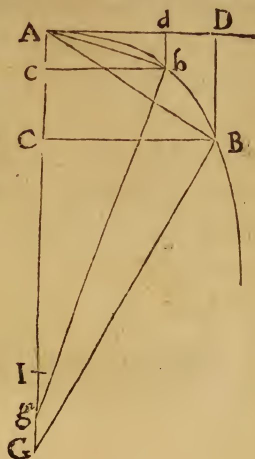
Subtenſa evaneſcens anguli contactus, in curvis omnibus (z) *curvaturam finitam ad punctum contactus habentibus, eſt ultimo in ratione duplicatâ ſubtenſæ arcus contermini.* *Caſ.*



(z) 121. Circuli curvatura eſt in omnibus circumferentiæ punctis eadem, ſeu uniformis; in variis autem circulis eo major eſt, quo minor eſt circuli radius, adeò ut circuli curvatura ſit ſemper in ratione inversâ radii. Aliarum linearum curvatura in ſingulis punctis determinatur per curvaturam arcus circularis qui cum arcu infiniteſimo curvæ in puncto dato congruit, ſeu, quod idem eſt, qui curvam in puncto dato oſculatur. Eſt igitur lineæ cujuſvis in puncto dato curvatura inversè ut radius circuli curvam lineam in dato puncto oſculantis.

Sumantur duo curvæ A F, puncta A & B, ducanturque rectæ A C, B C, ad curvam perpendiculares, & ex puncto interſectionis C, tanquam centro, radiis C A, C B, duo deſcribantur circuli, quorum unus radio C A, deſcriptus tanget curvam in A, alter autem radio C B, deſcriptus tanget eam in B. Si ad ſe mutuò accedant puncta A & B, donec arcus A B evaneſcat, duæ perpendiculares A C, B C, pro æqualibus uſurpari poterunt (Lem. 1), con-

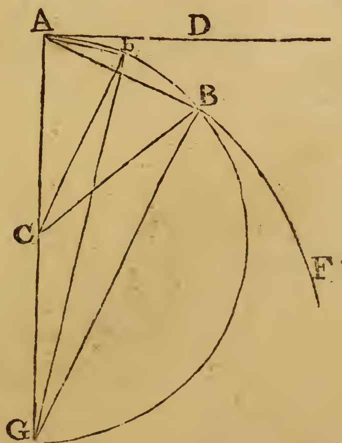
Cas. 1. Sit arcus ille *A B*, tangens ejus *A D*, subtensa anguli contactus ad tangentem perpendicularis *B D*, subtensa arcus *A B*. Huic subtensæ *A B* & tangenti *A D* perpendiculares erigantur *A G*, *B G*, concurrentes in *G*; dein accedant puncta *D*, *B*, *G*, ad puncta *d*, *b*, *g*, sitque *J* intersectio linearum *B G*, *A G* ultimo facta ([a]) ubi puncta *D*, *B* accedunt usque ad *A*. Manifestum est quod distantia *G J* minor esse potest quam assignata quævis. Est autem (ex natura circulorum per puncta *A B G*, *A b g* transeuntium) *A B quad.* æquale *A G* × *B D*, & *A b quad.* æquale *A g* × *b d*; ideoque ratio *A B quad.* ad *A b quad.* componitur ex rationibus *A G* ad *A g* & *B D* ad *b d*. Sed quoniam *G J* assumi potest minor longitudine quâvis assignatâ, fieri potest ut ratio *A G* ad *A g* minùs differat à ratione æqualitatis quam pro differentiâ



quâvis

conjungentur duo puncta contactus A & B; duoque circuli tangentes abibunt in unum A B G, qui curvam osculabitur in A, vel B, adeoque curvatura lineæ A F, in A, est in ratione inversâ radii A C circuli osculantis. Si ergo finitus sit radius osculi A C, finita quoque erit curvatura in A; si vero radius sit infinitus, curvatura erit infinitesima; ac tandem si radius sit infinitesimus, curvatura erit infinita. Quoniam autem eo magis curva à tangente A D deflectit, quo circuli osculantis radius A C minor est, & contra, patet angulum contactûs crescere & decrescere cum curvaturâ & in eâdem ratione inversâ radii.

122. Ducantur chordæ A B, B G; angulus A B G, in semicirculo rectus est; ac proindè si in curvâ quâcumque curvaturam finitam in puncto aliquo A habente ducantur chordæ evanescentes A b, A B, ad easque agantur perpendiculares B G, b G, hæ lineæ convenient in puncto G, junctisque punctis A & G, recta A G ad tangentem A d perpendicularis erit, & fini-



tam habebit magnitudinem, ut pote quæ æqualis est duplo radio finito A C, circuli curvam osculantis in A.

([a]) 123. Ubi puncta D, B, accedunt usque ad A, linea A J (122) est diameter circuli curvam A b B osculantis in

quâvis assignatâ, ideoque ut ratio *A B quad.* ad *A b quad.* minùs differat à ratione *B D* ad *b d*, quàm pro differentiâ quâvis assignatâ. Est ergo, per lemma 1, ratio ultima *A B quad.* ad *A b quad.* eadem cum ratione ultimâ *B D* ad *b d.* *Q. E. D.* LIBER PRIMUS.

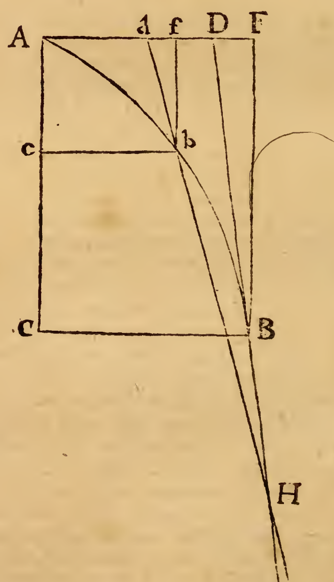
Cas. 2. ([b]) Inclinetur jam *B D* ad *A D* in angulo quovis dato, & eadem semper erit ratio ultima *B D* ad *b d*, quæ priùs, ideoque eadem ac *A B quad.* ad *A b quad.* *Q. E. D.*

Cas. 3. ([c]) Et quamvis angulus *D* non detur, sed recta *B D* ad datum punctum convergat, vel aliâ quâcunque lege constituatur; tamen anguli *D d* communi lege constituti ad æqualitatem semper vergent & propiùs accedent ad invicem quàm pro differentiâ quâvis assignatâ, ideoque ultimo æquales erunt, per lem. 1, & propterea lineæ *B D*, *b d* sunt in eâdem ratione ad invicem ac priùs. *Q. E. D.* *Co-*

in A, & quoniam accedente puncto B, ad A, accedit punctum G, ad J, atque evanescente arcu A B, evanescit quoque distantia G J, manifestum est quod distantia G J minor esse potest quam assignata quævis; quia verò anguli A b g, A B G, recti sunt (per hyp.) circuli duo diametris A g, A G, descripti per puncta b, B, transeunt, adeóque horum circulorum chordæ A b, A B, sunt mediæ proportionales inter suas respectivè abscissas A c, A C, seu æquales d b, D B, & diametros A g, A G, ac proindè $AB^2 = AG \times BD$ & $Ab^2 = Ag \times bd$ &c.

([b]) 124. Inclinentur jam B D, b d, ad A D, in angulo quovis dato B D F, b d f, eadem semper erit ratio ultima B D, ad, b d, quæ priùs. Ductis enim B F, b f, ad A C, parallelis, erit ob triangula æquiangula B F D, b f d, $BD : bd = BF : bf$; sed (123) $BF : bf = AB^2 : Ab^2$; est igitur $BD : bd = AB^2 : Ab^2$.

([c]) 125. Et quamvis angulus D, non detur, sed rectæ, D B, d b, ad datum punctum H, convergant, vel aliâ quâcumque communi lege constituantur, tamen anguli D d, communi lege constituti (punctis b & B ad A & ad se mutuò accedentibus) ad æqualitatem semper vergent, & evanescente arcu B b, adeóque coincidentibus lineis H D, H d, propiùs accedent



ad invicem quam pro differentiâ quâvis assignatâ ac proinde ultimò æquales erunt (per Lem. I), & propterea lineæ B D, b d, sunt ultimò parallelæ & in eâdem ratione ad invicem ac priùs (124).

126.

DE MOTU CORPORUM.

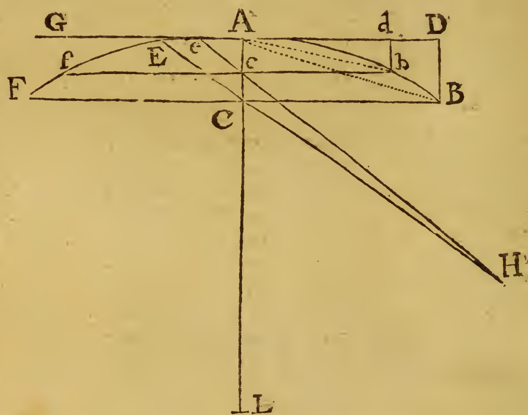
Corol. 1. Unde cum tangentes *A D*, *A d*, arcus *A B*, *A b*, & eorum ſinus *B C*, *b c* fiant ultimo chordis *A B*, *A b* æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut ſubtenſæ *B D*, *b d*.

Corol. 2. (d) Eorundem quadrata ſunt etiam ultimo ut ſunt arcuum ſagittæ, quæ chordas biſecant & ad datum punctum convergunt. Nam ſagittæ illæ ſunt ut ſubtenſæ *B D*, *b d*.

Corol. 3. (e) Ideoque ſagitta eſt in duplicatâ ratione temporis quo corpus datâ velocitate deſcribit arcum.

Corol. 4. (f) Triangula rectilinea *A D B*, *A d b* ſunt ultimo in triplicatâ ratione laterum *A D*, *A d*, inque ſeſquiplicata

cata

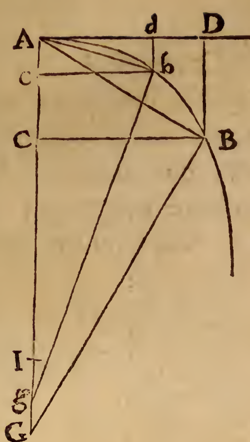


(d) 126. Sit F A B, arcus circuli curvam datam oſculantis in A, tangens A D, radius oſculi A L, chordæ F B, f b, ad radium A L, & rectæ B D, b d, ad tangentem A D, normales, per puncta C c, ſemper ducantur lineæ E C, e c, ad datum punctum H, convergentes, evaneſcente arcu A B, rectæ D B, d b, & ipſis æquales ſagittæ A C, A c, ſunt ut tangentium A D, A d, arcuum A B, A b, & chordarum A B, A b, quadrata (coroll. 1.) adeóque ut duplorum arcuum F A B, f A b, & chordarum f b, F B, iis arcubus evaneſcentibus (Lem. 7.) congruentium, atque etiam tangentium quadrata. Jam ubi punctum C, uſque ad A, accedit, chorda evaneſcens A E, cum tangente A G, coincidit (Lem. 6.) & coeuntibus quoque lineis E H, e H, triangula C E A, c e A, fiunt ſimilia, ac proindè E C eſt ad e c, ut A C, ad A c, hoc eſt ut arcuum evaneſcentium F A B, f A b, chordarum F B, f b, & tangentium quadrata.

(e) 127. Ideóque ſagittæ A C, A c, vel E C, e c, ſunt in duplicatâ ratione temporum quibus corpus datâ velocitate percurrit arcus evaneſcentes F A B, f A b, vel dimidios A B, A b; ſpatia enim datâ velocitate percurſa ſunt ut tempora (5), adeóque pro temporibus ſubſtitui poſſunt arcus F A B, f A b, ſed ſagittæ ſunt in ratione duplicatâ eorum arcuum, (126), ergò & temporum.

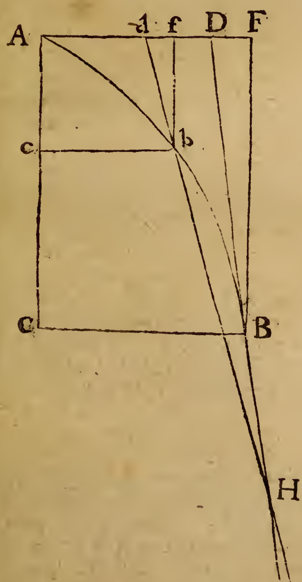
(f) 128. Triangula rectilinea A B D, A b d, ſunt ultimò in triplicatâ ratione laterum A D, A d, inque ſeſquiplicatâ laterum B D, b d; ductis enim B F, b f, ad tangentem A B, perpendicularibus, erit ob triangulorum B D F, b d f, ſimilitudinem B D : b d = B F : b f, & propterea areæ triangulorum A B D, A b d, ſunt in ratione compoſitâ laterum A D, ad A d, & B D, ad b d; ſed (124. 125. cor. 1.) B D : b d = A D² : A d², adeóque $\sqrt{BD} : \sqrt{bd}$ = A D : A d; ergò triangula A B D, A b d, ſunt in ratione compoſitâ A D, ad A d, & A D², ad A d², hoc eſt, in ratione triplicatâ laterum A D, A d; ſunt etiam in ratione compoſitâ B D, ad b d, & $\sqrt{BD}$, ad $\sqrt{bd}$, hoc eſt, in ratione B D × $\sqrt{BD}$ ad b d × $\sqrt{bd}$.

catâ laterum *D B*, *d b*; utpote in compoſitâ ratione laterum *A D* & *D B*, *A d* & *d b* exiſtentia. Sic & triangula *A B C*, *A b c* ſunt ultimo in triplicatâ ratione laterum *B C*, *b c*. Rationem verò ſeſquiplicatam voco triplicatæ ſubduplicatam, quæ nempè ex ſimplici & ſubduplicatâ componitur.



Corol. 5. Et quoniam *D B*, *d b* ſunt ultimo parallelæ & in duplicatâ ratione ipſarum *A D*, *A d*: erunt areæ ultimæ curvilineæ *A D B*, *A d b* ([g] ex naturâ parabolæ) ([h]) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum *A D B*, *A d b*; & ſegmenta *A B*, *A b* partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ & hæc ſegmenta erunt in triplicatâ ratione tum tangentium *A D*, *A d*; tum chordarum & arcuum *A B*, *A b*.

Scho-



(g) 129. Arcus evaneſcens A B, in curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactûs A, habentibus, pro arcu parabolæ uſurpari poteſt. Ductâ enim A C, lineis B F, b f, parallelâ, completiſque parallelogrammis A B, A b, erunt, ex demonſtratis, rectæ F B, f b, & ipſis æquales abſciſſæ A C, A c, ut ordinatarum C B, c b, quadrata, quæ eſt notiſſima parabolæ proprietas.

130. Quare arcus evaneſcens ſpectari poteſt tanquam arcus parabolæ cujus latus rectum eſt æquale diametro circuli oſculantis. Nam in arcu circulari A B, (vid. fig. textûs) ordinata C B, ad diametrum perpendicularis, eſt media proportionalis inter abſciſſam A C, & reliquam diametri partem, ſeu totam diametrum, cum A C, evaneſcit (Lem. 1.), adeóque quadratum ordinatæ C B, æquale eſt rectangulo ex abſciſsâ evaneſcente A C, & diametro circuli, quæ eſt proprietas parabolæ cujus latus rectum æquale eſt prædictæ diametro.

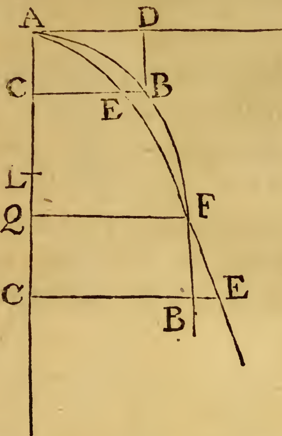
(h) 131. Parabolæ ſegmentum A b B, eſt tertia pars trianguli rectilinei A C B, vel æqualis A D B, adeóque area curvilinea A D B b A, æqualis eſt duabus tertiis partibus ejuſdem trianguli rectilinei A D B. Vid. Gregor. à S. Vincentio cor. 1. Prop. 232. Lib. V. quadraturæ circuli, aut Archimed. Prop. 17. quadrat. Parabolæ.

DE MOTU CORPORUM.

Scholium.

Cæterum in his omnibus ſupponimus angulum contactus nec infinitè majorem eſſe angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus ſuis, nec iiſdem infinitè minorem; hoc eſt, curvaturam ad punctum *A*, nec infinitè parvam eſſe, nec infinitè magnam, ſeu intervallum *AJ* finitæ eſſe magnitudinis. (i) Capi enim poteſt *DB* ut AD^3: quo in caſu circulus

(i) 132. Sit parabolæ Apollonianæ A E F, axis A C, vertex A, tangens in vertice A D, ordinata C E, latus rectum A L, circulus diametro A L, deſcriptus parabolam oſculatur in A, (130.) eundemque ac parabola contactûs angulum efficit in A.



Ad eundem axem A C, & verticem A, deſcribatur ſuperioris generis parabola cujus ordinatæ C B ſint ſemper in ſubtriplicatâ abſciſſarum A C, vel parallelarum & æqualium D B, ratione; & erit angulus contactûs B A D, angulo contactûs E A D, infinitè minor . . . . Dem . . . Parabolæ A F E, latus rectum A L, dicatur *A*; parabolæ A B B, latus rectum ſit *B*, & erit ex harum curvarum naturâ $A \times AC = CE^2$ & $B^2 \times AC = CB^3$, adeóque $AC = CE^2 : A = CB^3 : B^2$, undè reperitur $CB^3 = CE^2 \times B^2 : A$, & CB ad $B^2 : A = CE^2$ ad CB^2 ergo cum erit $CB = B^2 : A$, tunc erit $CE^2 = CB^2$, atque adeò parabolæ A E E, A B B, ordinatam habebunt communem quæ dicatur Q F, & ſeſe interſecabunt in puncto F; jam verò ſi fuerit C B minor quam $B^2 : A$, erit quoque CE^2 minor quàm CB^2, adeóque C E minor quàm C B; ſed omnes ordinatæ inter verticem A, & ordinatam communem Q F, (quæ eſt $= B^2 : A$) minores ſunt eâ, ergo omnes C E inter A & F comprehenſæ ſunt minores ordinatis correſpondentibus C B; tota igitur parabolæ Appollonianæ portio A E F, quâ ordinatæ C E terminantur, cadit intrà portionem A B F, alterius parabolæ, ac proindè angulus contactûs B A D, ſemper minor eſt angulo contactûs E A D, cum ergò angulus E A D, aucto in infinitum latere recto A L, poſſit ſine fine minui, manifeſtum eſt angulum contactûs B A D, quovis angulo dato E A D, infinitè minorem eſſe. Q. e. D.

133. Ad eundem axem A C, & verticem A, ſucceſſivè deſcribantur curvæ A E E, ejus naturæ, ut abſciſſarum A C, & ordinatarum C E, relatio exprimatur æquatione generali $A^m\,AC = CE^{m+1}$. Si loco exponentis, m, ſucceſſivè ponantur in æquatione numeri quilibet poſitivi, integri vel fracti continuò creſcentes vel decreſcentes, obtinebuntur infinitæ ſeries diverſæ angulorum contactuum, quorum quilibet eſt infinitè minor priore, dum numerus, m, ſemper creſcit, & infinitè major dum numerus, m, ſemper decreſcit . . . Dem . . . Numerus, m, augeatur numero poſitivo, n, integro vel fracto, & deſcribatur curva A B B, cujus æquatio ſit $B^{m+n} \times AC = CB^{m+n+1}$. Ex hac æquatione & ſuperiori $A^m\,AC = CE^{m+1}$, reperitur $AC = CB^{m+n+1} : B^{m+n} = CE^{m+1} : A^m$, adeóque $CB^{m+n+1} = CE^{m+1} \times B^{m+n} : A^m$ atque CB^n ad $B^{m+n} : A^m = CE^{m+1}$ ad CB^{m+1}; ſit $CB^n = B^{m+n} : A^m$, & erit $CB^{m+1} = CE^{m+1}$, adeóque $CB = CE = QF$. Quarè cum inter verticem A, & communem ordinatam Q F, omnes ordinatæ ſint minores ipsâ Q F, patet ut ſuprà (132), totam portionem A E F, curvæ A E E, cadere intrà portionem A B F, alterius curvæ A B B, ac proindè angulum contactûs B A D, quovis dato angulo contactûs E A D infinitè minorem eſſe, & reciprocè angulum E A D, eſſe angulo B A D infinitè majorem. Q. e. D.

nullus per punctum A inter tangentem AD & curvam AB duci poteſt, proindeque angulus contactus erit infinitè minor circularibus. ([k]) Et ſimili argumento ſi fiat DB ſucceſſivè ut AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c. habebitur ſeries angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet poſterior eſt infinitè minor priore. Et ſi fiat DB ſucceſſivè ut AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia ſeries infinita angulorum contactus, quorum primus eſt ejuſdem generis cum circularibus, ſecundus infinitè major, & quilibet poſterior infinitè major priore. Sed & inter duos quoſvis ex his angulis poteſt ſeries utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inſeri, quorum quilibet poſterior èrit infinitè major minorve priore. Ut ſi inter terminos AD^2, & AD^3, inſeratur ſeries $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rurſus inter binos quoſvis angulos hujus ſeriei inſeri poteſt ſeries nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem.

([l]) Quæ de curvis lineis deque ſuperficiebus comprehenſis demonſtrata ſunt facilè applicantur ad ſolidorum ſuperficies cur-

([k]) 134. In æquatione $A^m \times AC = GE^{m+1}$, loco exponentis m, ſucceſſivè ponantur numeri 1, 2, 3, 4, 5 &c., & erit AC ſucceſſivè, ut CE^2, CE^3, CE^4, CE^5 &c., & habebitur (133) ſeries angulorum contactûs pergens in infinitum quorum quilibet poſterior eſt infinitè minor priore. Loco m ſubſtituantur ſucceſſivè numeri decreſcentes, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, &c. erit AC, ſucceſſivè ut CE^2, $CE^{\frac{3}{2}}$, $CE^{\frac{4}{3}}$, $CE^{\frac{5}{4}}$, &c., & habebitur alia ſeries infinita angulorum contactûs, quorum primus eſt ejuſdem generis cum circularibus (132), ſecundus infinitè major, & quilibet poſterior infinitè major priore (133). Loco m, ſubſtituantur numeri 1, $1+\frac{1}{6}$, $1+\frac{1}{5}$ $1+\frac{1}{4}$, $1+\frac{1}{3}$, $1+\frac{1}{2}$, $1+\frac{2}{3}$, $1+\frac{3}{4}$ $1+\frac{4}{5}$, $1+\frac{5}{6}$ &c., erit AC, ſucceſſivè ut CE^2, $CE^{\frac{13}{6}}$, $CE^{\frac{11}{5}}$, $CE^{\frac{9}{4}}$ &c., & habebitur ſeries infinita angulorum contactûs, quorum quilibet poſterior eſt infinitè minor priore (133), & inter binos quoſvis angulos hujus alteriuſve ſeriei inſeri poteſt ſeries nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium; ut enim ea ſeries inveniatur, ſufficit inter duos numeros datos, v. G. 1, $1+\frac{1}{6}$, ſeriem invenire numerorum creſcentium vel decreſcentium, quorum quilibet major ſit altero ex numeris datis, minor altero, quod facillimum eſt.

([l]) 135. Id exemplo facili illuſtrare ſatis erit. Pyramidis & coni ſit idem vertex eademque altitudo, & baſis pyramidis ſit polygonum inſcriptum circulo qui baſis eſt coni, numerus laterum polygoni augeatur, & eorum longitudo minuatur in infi-

curvas & contenta. (m) Præmisi verò hæc lemmata, ut effugerem tædium deducendi longas demonstrationes, more veterum geometrarum, ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium. Sed quoniam durior est indivisibilium hypothesis, & propterea methodus illa minus geometrica censetur; (n) malui demonstra-

infinitum, & polygoni ac circuli ultima ratio (Lem. 7.) erit ratio æqualitatis, ac proindè ultima ratio pyramidis illiusque superficiei ad conum & illius superficiem curvam erit quoque ratio æqualitatis; undè curva superficies coni æqualis est summæ ultimæ triangulorum evanescentium, quorum communis vertex est vertex coni, bases verò latera evanescentia polygoni circulo inscripti.

(m) 136. Quam magnos progressus geometria fecerit hinc cognoscere licet. Veteres geometræ in iis quæstionibus quæ infiniti considerationem involvunt, suas demonstrationes ad absurdum revocabant & ex falsis suppositionibus verum eruebant. Ut inter duas quantitates quæ ad æqualitatem constanter vergunt, & tandem propiùs ad invicem accedunt quàm pro datâ quâvis differentiâ rationem æqualitatis intercedere demonstrarent, priùs supponebant inter eas quantitates esse vel majoris vel minoris inæqualitatis rationem, deindè utrumque falsum demonstrabant, & ex hâc reductione quam ad absurdum vocant, inter illas quantitates perfectam æqualitatem esse concludebant. Quam autem perplexus sit & tædiosus hic demonstrandi modus nemo non videt. Verùm licèt imperfecta admodùm fuerit veterum geometria, non iis tamen omninò ignota fuerunt methodi infinitesimalis principia. Quantitates infinitè parvas seu evanescentes pro nihilo habendas esse in multis demonstrationibus tanquam axioma posuerunt Euclides & Archimedes; in exemplum afferemus unicum vulgaris Geometriæ theorema. Ut demonstrarent circulos esse inter se ut quadrata diametrorum, fingebant iis circulis inscripta esse vel circumscripta polygona similia quorum latera numero augerentur & longitudine minuerentur in infinitum, ità ut polygonorum inscriptorum vel circumscriptorum à circulo differentia foret quâvis datâ magnitudine minor; quia verò hæc polygona sunt ut quadrata diametrorum circulorum quibus inscribuntur vel circumscribuntur, circulos pariter esse ut quadrata diametrorum concludebant. Varios infinitorum ordines supponit illud idem theorema licèt non adverterent veteres. Nam considerabant polygona circulis inscripta tanquam composita ex infinitis numero atque infinitè parvis seu evanescentibus lateribus; manifestum autem est differentiam polygoni inscripti à circulo quâvis datâ minorem componi ex infinitis numero atque infinitè parvis seu evanescentibus circuli segmentis quorum latera polygoni sunt chordæ; hæc verò segmenta sunt minimæ quantitates illæ quas secundi ordinis infinitesimas dicunt Recentiores. Hic pedem fixerant veteres, primusque longiùs progredi ausus est celeberrimus Geometra Bonaventura Cavalerius qui anno 1635. indivisibilium methodum in geometriam introduxit. Hoc primum posuit suæ methodi decretum, lineas nempè ex infinitis punctis constare, superficies ex infinitis lineis, & solida ex infinitis superficiebus; Deindè indivisibilia illa elementa totamque eorum summam comparat in unâ magnitudine cum singulis elementis eorumque summâ in aliâ magnitudine, & sic duarum magnitudinum rationem determinat. Hæc autem quantitatum indivisibilium hypothesis durior minusque geometrica Newtono visa est.

(n) 137. Newtonus ut indirectas & perplexas vitaret veterum demonstrationes, earum tamen certitudinem & evidentiam conservaret, veterum principium Lemmate primo generaliter expressit, illudque in Lemmatis sequentibus ad curvas generatim applicavit, & indè directas perbrevesque

trationes rerum ſequentium ad ultimas quantitatum evaneſcentium ſummas & rationes, primaſque naſcentium, id eſt, ad limites (°) ſummarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonſtrationes quâ potui brevitate præmittere. His enim idem præſtatur quod per methodum indiviſibilium; & principiis demonſtratis jam tutiùs utemur. Proinde in ſequentibus, ſi quando quantitates tanquam ex particulis conſtantes conſideravero, vel ſi pro rectis uſurpavero lineolas curvas; nolim indiviſibilia, ſed evaneſcentia diviſibilia, non ſummas & rationes partium (p) determinatarum, ſed ſummarum & rationum limites ſemper intelligi; vimque talium demonſtrationum ad methodum præcedentium lemmatum ſemper revocari.

Objectio eſt, quod quantitatum evaneſcentium nulla ſit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non eſt ultima, ubi evanuerunt, nulla eſt. Sed & eodem argumento æque contendi poſſet nullam eſſe corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, pervenientis (q) velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non eſſe ultimam, ubi attingit, nullam eſſe. Et reſponſio facilis eſt: Per velo-

veſque demonſtrationes in toto operis decurſu deduxit. Ut autem methodi indiviſibilium brevitatem aſſequeretur, tutius tamen & accuratius procederet, loco indiviſibilium evaneſcentia diviſibilia ſubſtituit, & quantitates Mathematicas non ut ex partibus quam minimis conſtantes, ſed ut motu continuo deſcriptas conſiderat; ſupponit nimirum lineas deſcribi ac deſcribendo generari non per appoſitionem partium, ſed per motum continuum punctorum, ſuperficies per motum linearum, & ſolida per motum ſuperficierum, angulos per rotationem laterum, tempora per fluxum continuum & ſic in cæteris.

(°) 138. Ubi area curvilinea in parallelogramma rectilinea dividitur, & eorum numerus augetur atque latitudo minuitur in infinitum, horum parallelogrammorum ſumma (Lem. 2.), nunquam poteſt eſſe major areâ curvilineâ, ſed hæc area eſt terminus ad quem parallelogrammorum decreſcentium ſumma ſemper accedit & quem tandem attingit, ubi parallelogramma evaneſcunt aut naſcuntur. Idem dicendum de evaneſcentibus curvarum chordis reſpectu perimetri curvilineæ.

(p) 139. Quantitates evaneſcentes concipi non debent velut determinatæ aut determinabiles quædam portiones quantitatum quæ certam & definitam parvitatem obtineant. Quaſcumque enim portiunculas linearum, ſuperficierum aut corporum acceperimus aut deſignaverimus, hæ ſemper reipsâ finitæ erunt, non evaneſcentes; itaque non ſunt intrà certos terminos quantumvis proximos coarctandæ, undè hæ quantitates ſemper ut decreſcentes ac perpetuò diminuendæ accipi debent.

(q) 140. Exempli cauſâ, gravis ſursùm projecti & ad altiſſimum locum pervenientis.

velocitatem ultimam intelligi eam, quâ corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum & motus cessat, neque postea, sed tunc cum attingit; id est, illam ipsam velocitatem quâcum corpus attingit locum ultimum & quâcum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium, intelligendam esse rationem quantitatum, non antequam evanescunt, non postea, sed quâcum evanescunt. Pariter & ratio prima nascentium est ratio quâcum nascuntur. Et summa prima & ultima est quâcum esse (vel augeri aut minui) incipiunt & cessant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & cessantium. Cumque hic limes sit certus & definitus, problema est verè geometricum eundem determinare. Geometrica verò omnia in aliis geometricis determinandis ac demonstrandis legitimè usurpantur.

Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & sic quantitas omnis constabit ex indivisibilibus, contra quam *Euclides* de incommensurabilibus, in libro decimo elementorum, demonstravit. Verum hæc objectio falsæ innititur hypothesi. Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum (r) ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant; & quas propius assequi possunt quam pro datâ quâ-

(r) 141. Seu, quantitatum determinatarum & indivisibilium, sed &c.

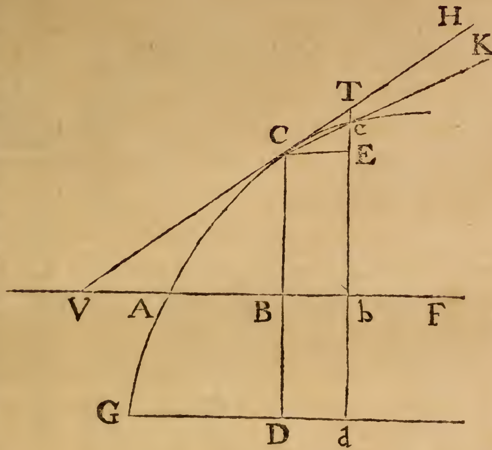
142. Ut quantitatum evanescentium aut nascentium relationes atque proprietates inveniantur, considerantur quantitates finitæ, harum investigantur relationes & proprietates & lex quâ continuò crescunt vel decrescunt; quibus cognitis facilè intelligitur quænam proprietates quantitatibus illis crescentibus ac decrescentibus semper conveniant, adeóque & cum in infinitum minuuntur & evanescunt vel cum nascuntur. Imò verò ex Lemmate primo aliisque sequentibus invenitur quænam sint proprietates quæ licèt quantitatibus finitis non conveniant, evanescentibus tamen & nascentibus competunt, cum nempè quantitates finitæ decrescentes ad illas proprietates, ut ità dicam perpetuò accedunt, & ad eas tempore dato accedunt magis quàm pro differentiâ quâvis datâ.

Ex præcedentibus Lemmatis facilè deducitur ac demonstratur Newtoniana fluxionum methodus cujus generalia principia ut potè nobis in posterum profutura breviter explicabimus.

143.

quâvis differentiâ, nunquam verò transgredi, neque priùs attingere quàm quantitates diminuuntur in infinitum. Res clariùs intelligetur in infinitè magnis. Si quantitates duæ quarum data est differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideò dabuntur quan-

143. Quantitates indeterminatæ quæ continuò crescunt vel decrescunt, variabiles aut fluentes dicuntur; constantes verò aut determinatæ vocantur, quæ aliis continuò crescentibus vel decrescentibus, eædem manent. Ordinatæ B C, B D, super basi A F, motu sibi semper parallelo ità progrediantur, ut ordinatâ B D, eâdem semper manente, punctum D, rectam G D d describat, & interim continuò crescente vel decrescente ordinatâ B C, punctum C describat curvam A C c; abscissa A B, ordinata B C, curvæ arcûs A c, areæ A C B, A G D B, sunt quantitates indeterminatæ seu fluentes; recta verò B D, est quantitas constans.



144. Quantitates fluentes, ut A B, B C, æqualibus temporibus crescentes & crescendo genitæ, pro velocitate majori vel minori quâ crescunt, ac generantur, evadunt majores vel minores; Si enim punctum B, velociùs semper progrediatur quam punctum C, in lineâ B C, incrementa B b, fluentis A B, majora erunt incrementis E c, fluentis B C, eodem tempore genitis. Velocitates quibus illa incrementa ut B b, E c, eodem tempore genita, primò nascuntur, dum nempe b c, coincidit cum B C, dicuntur *fluxiones*, & methodus ex fluentibus inveniendi fluxiones, methodus fluxionum directa vocatur; methodus verò ex fluxionibus inveniendi fluentes, methodus fluxionum inversa appellatur.

145. Velocitates quibus fluentium quantitatum incrementa eodem tempore genita, primò nascuntur, sunt uniformes... Dem... Cum curva A C c, motu puncti C, velocitate quâvis finitâ progredientis describi possit, si illiùs puncti velocitas secundùm directionem C E, lineæ A B parallelam, supponatur uniformis, velocitas ejusdem secundùm directionem E c, pro variâ curvæ A C c naturâ, varia quidem erit in diversis curvæ punctis v. gr. in C, & c; sed quò magis punctum c, ad C, accedet, eò minor erit velocitatis secundùm directionem E c, variatio in punctis C, & c, adeò ut dum punctum c, coincidit cum puncto C, omnis velocitatis per E c, variatio expiret. Quare (Lem. 1.) velocitates quibus fluentium incrementa eodem tempore genita primò nascuntur, sunt uniformes. Q. e. D.

146. Cum ergò velocitates uniformes sint spatiis eodem tempore percurrendis proportionales (5), manifestum est fluxiones (143) esse in ratione incrementorum eodem tempore genitorum, dum primò nascuntur vel ultimò evanescunt; adeòque ut fluxionum relatio inveniatur sumere oportet incrementa fluentium eodem tempore genita, & primam eorum incre-

men-

DE MOTU CORPORUM.

quantitates ultimæ ſeu maximæ quarum iſta eſt ratio. In ſequentibus igitur, ſi quando facili rerum conceptui conſulens dixero quantitates quàm minimas, vel evaneſcentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, ſed cogita ſemper diminuendas ſine limite.

SEC.

mentorum naſcentium, vel ultimam evaneſcentium rationem conſiderare tanquam relationem fluxionum.

147. Hinc ſumma fluxionum eſt ut ſumma incrementorum naſcentium vel evaneſcentium, ſumma verò incrementorum omnium naſcentium eſt ipſa quantitas fluens; nam ſi tota area A c b diviſa intelligatur in parallelogramma ut B E, eorumque numerus augeatur & latitudo B b minuatur in infinitum, ſumma omnium incrementorum naſcentium B b, ab A uſque ad b, erit ipſa fluens A b, ſumma omnium incrementorum E c, ab A, uſque ad c, erit fluens b c, ſumma omnium C c, erit arcus fluens A c, & ſumma omnium parallelogrammorum B E, erit area A c b fluens (106. 107.); ergò ſumma fluxionum eſt ut ipſa quantitas fluens.

148. Quoniam in figurâ ſuperiori fluxio aliqua, vel abſciſſæ A B, vel ordinatæ C B, aut arcûs A C, ad arbitrium tanquam uniformis ſpectari poſſit, (Ex dictis 145.) patet ex pluribus fluxionibus unam tanquam conſtantem poſſe conſiderari & quantitate finitâ conſtanti exponi, dum aliæ fluxiones variâ ratione mutari & quantitatibus variabilibus exponi poſſunt.

149. Quare cum quantitates variabiles ſuas habeant fluxiones quæ rursùs poſſunt eſſe variabiles, liquet dari fluxiones fluxionum, ſeu varios imò infinitos fluxionum ordines. Fluentium finitarum fluxiones dicuntur fluxiones primæ; harum fluxiones primæ dicuntur fluentium finitarum fluxiones ſecundæ, & ità porrò in infinitum.

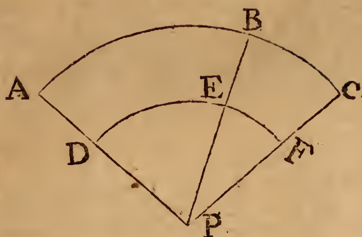
150. Ductâ rectâ V T H, quæ curvam tangat in C, ipſiſque b c & B A productis occurrat in T & V; linea b c in locum ſuum priorem B C redeat, & ultima forma triangulorum evaneſcentium C E c, C E c, C E T, eſt ſimilitudinis & ultima ratio æqualitatis (Lem. VIII.) ideóque fluxiones primæ ipſarum A B, B C, A C,

A C, ſunt (146.) ut trianguli C E T, latera C E, E T, & C T, & per eadem latera exponi poſſunt, vel quod perindè eſt, per latera V B, C B, & V C, trianguli V B C, ſimilis triangulo C E T.

151. Quoniam areæ B b c C, B b d D, eodem tempore deſcribuntur communi ordinatarum B C, B D motu, erunt areæ illæ naſcentes vel evaneſcentes ut fluxiones arearum A C B, A B D G, (146); ſed area naſcens B b c C, non differt à parallelogrammo B E, (107); ergò fluxiones arearum A C B, A B D G, ſunt in ratione primâ parallelogrammorum B E, B d naſcentium, ſeu ob commune latus B b, in ratione ordinatarum C B, B d.

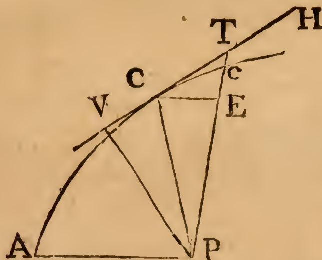
152. Si circulus centro B, radio fluente B C, deſcriptus per longitudinem abſciſſæ A B, ad angulos rectos progrediatur, deſcribet ſolidum idem quod ex rotatione figuræ A C B, circà axem A B generaretur, & fluxio ſolidi geniti erit ut factum ex areâ circuli illius in incrementum naſcens B b, abſciſſæ A B, & fluxio ſuperficiei ſolidi geniti erit ut factum ex perimetro ejuſdem circuli in arcum C c, vel tangentem C T, naſcentem... Dem.... Rectangulum naſcens B E, non differt à figurâ B b c C naſcente (107), adeòque incrementum naſcens ſolidi ex rotatione figuræ A C B, geniti æquale eſt ſolido ex rotatione rectanguli B E, circà latus B b, genito; hoc autem ſolidum eſt cylindrus æqualis facto ex areâ circuli radio C B deſcripti in altitudinem B b; ſolidi igitur motu circuli C B per axem A B geniti incrementum naſcens adeòque & ipſius fluxio (146) eſt ut factum ex areâ circuli in incrementum naſcens B b, abſciſſæ A B. Similiter cum arcus naſcens C c, cum tangente C T coincidat, (Lem. 7.) ſuperficies naſcens ex rotatione figuræ B b c C, genita æqualis eſt ſuperficiei coni truncati, adeòque æqualis facto ex ſemiſummâ peripheriarum, quarum ſunt radii B C, b c, in latus C T, ſeu ob b c = B C (107) æqualis facto ex peripheriâ circuli, cujus radius B C, in latus C T, vel arcum c t, naſcentem; ergò factum iſtud eſt incrementum naſcens ſuperficiei curvæ ex rotatione A C deſcriptæ, adeòque eſt ut illius ſuperficiei fluxio (146) Q. e. D.

153. Anguli rectilinei A P B, E P F, ſunt inter ſe directè ut arcus A B, E F,



qui angulos ſubtendunt & reciprocè ut arcuum radii A P, E P... Dem... eſt angulus A P B, ad angulum B P C, ſeu E P F, ut arcus A B, ad arcum B C, adeòque ut A B : A P, ad B C : A P; ſed ob arcus ſimiles B C, E F, eſt B C : A P = E F : E P; ergò angulus A P B, eſt ad angulum E P F, ut A B : A P, ad E F : E P. Q. e. D.

154. Hinc ſequitur 1°. quemlibet angulum A P B exprimi poſſe arcu A B qui ipſum ſubtendit diviſo per radium A P. 2°. Quemlibet arcum circuli A B, eſſe ut factum ex angulo A P B in radium A P, atque adeò hoc facto exprimi poſſe. 3°. Incrementum naſcens anguli fluentis A P B, adeòque & illius anguli fluxionem (146) eſſe in ratione directâ arcûs circularis naſcentis & inversâ radii illius.



155. Recta P C fluens circà datum polum P revolvatur, & punctum illius extremum C, curvam A C c, deſcribat quam tangit in C recta V C H in quam ex polo P, demiſſa ſit perpendicularis P V. Sit A punctum in curvâ A C c fixum, progrediaturque recta P C de lo-

co ſuo P C, in locum novum P c, & producta P c, tangentem ſecet in T. Capiatur P E = P C, & producta P c, tangentem ſecet in T. Capiatur P E = P C, ſeu radio P C deſcribatur circuli arcus C E, ut habeantur E c, incrementum rectæ P C, C c, incrementum curvæ A c, P C c, incrementum areæ P A C P, angulus C P c, incrementum anguli A P C, eodem tempore genita. Redeat jam P C, in locum ſuum priorem P C, ut incrementa illa omnia evaneſcant & horum incrementorum evaneſcentium ratio ultima erit ratio fluxionum quantitatum fluentium quarum ſunt incrementa (145).

156. Quoniam autem perveniente P c, in locum P C, triangula C E c, C E T, evaneſcentia ſunt ultimò ſimilia & æqualia (Lem. 8.) circuli arcus C E, cum chordâ ipſius coincidit, ipſique æqualis eſt (Lem. 7), & prætereà evaneſcente angulo C P E, anguli P C E, P E C, ſunt inter ſe & duobus rectis æquales, adeóque C E, ad P T, normalis. Manifeſtum eſt..... 1°. Triangulum T V P eſſe triangulo T E C, adeóque & triangulo evaneſcenti c E C, ſimile, ac proinde fluxiones arcûs A C, & rectæ P C, eſſe inter ſe ut duo latera V T, T P, ſeu V C, P C... 2°. Fluxionem anguli A P C, eſſe ut C E : P C (154)... 3°. Fluxionem areæ A C P, eſſe ut factum ex rectâ C P, in normalem C E evaneſcentem; nam area trianguli P C T, æqualis dimidio rectangulo P T × C E, ſeu ob evaneſcentem E T, dimidio rectangulo P C × C E (Lem. 1.).

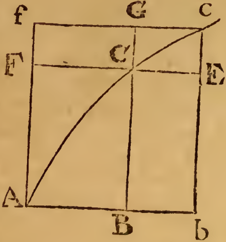
157. Similibus argumentis ex fluentibus calculo expreſſis fluxiones inveniri poſſunt, in quantitatibus finitis analyſim inſtituendo, & finitarum naſcentium vel evaneſcentium rationes primas vel ultimas inveſtigando. Hæc autem ſunt calculi fluxionum principia. Nimirùm ... 1°. Cum fluxiones ſint in primâ ratione incrementorum naſcentium & ultimâ evaneſcentium (146), fluxiones iis incrementis primò naſcentibus vel ultimò evaneſcentibus poſſunt exprimi... 2°. ... Quantitates quæ nonniſi ſuo incremento naſcente aut evaneſcente differunt ſunt æquales (Lem. 1.)... 3°. ... Quantitatum conſtantium nullæ ſunt fluxiones, nulla incrementa vel decrementa.... 4°. Si inter quantitates indeterminatas aliquæ decreſcant, dum aliæ creſcunt, decreſcentium fluxiones ſunt negativæ, ſunt enim ut incrementa negativa, ſeu ut decrementa.

158. Quantitates fluentes deſignantur ultimis alphabeti litteris z, y, x, v; conſtantes indicantur aliis a, b, c &c. fluentium fluxiones primas aut ipſis proportionalia incrementa naſcentia vel evaneſcentia Newtonus notat iiſdem litteris quibus fluentes exponuntur, ſed iis punctuatis ſic $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{v}$; Leibnitius litteram d, incrementi naſcentis vel evaneſcentis notam characteriſticam fluentibus præponit ſic dz, dy, dx, dv. Fluxiones ſecundæ deſignantur ſic $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$, vel ſic ddz, ddy, ddx, ddv; fluxiones tertiæ ſic $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\dddot{v}$, vel ſic $dddz$, $dddy$, $dddx$, $dddv$, vel ſic d^3z, d^3y, d^3x, d^3v, & ità deinceps in infinitum.

159. Fluxio quantitatis ex pluribus terminis per additionem vel ſubtractionem compoſitæ, æqualis eſt omnibus ſingulorum terminorum fluxionibus per eadem ſigna + vel − junctis; ità fluxio quantitatis compoſitæ $a + z - y$, erit $dz - dy$... Dem... Totius quantitatis $a + z - y$, incrementum tempore dato genitum æquale eſt differentiæ incrementorum ipſarum z & y, cum nullum ſit conſtantis a, incrementum (156) adeóque incrementum naſcens vel evaneſcens quantitatis $a + z - y$ æquale eſt differentiæ incrementorum naſcentium vel evaneſcentium ipſarum z & y, ſed fluxiones ſunt in primâ ratione incrementorum naſcentium (145), ergò fluxio totius quantitatis $a + z - y$, eſt $dz - dy$. Q. e. D. Si creſcente quantitate z, decreſceret y, ipſius y, fluxio foret negativa nempè $- dy$ (157) adeóque fluxio

$dz - dy$, fieret $dz + dy$. Quod in ſequentibus ſemper eſt obſervandum.

160. Fluxio quantitatis fluentis ex pluribus variabilibus per multiplicationem compoſitæ, æqualis eſt ſummæ factorum ex ſingularum variabilium componentium fluxionibus in aliarum variabilium facta ductis, hoc eſt fluxio quantitatis zy, eſt $zdy + ydz$, fluxio quantitatis az eſt adz, fluxio quantitatis zyx eſt $yxdz + zxdy + zydx$ ... Dem ... Recta CB, fluens ſuper rectâ AB cui normalis eſt, progrediatur, illiuſque punctum extremum C, deſcribat curvam A C c, perveniat BC in locum bc, & compleantur rectangula BF, bf, BE, cf, EG; AB, dicatur z, BC dicatur y, adeóque rectangulum BF erit zy. Dum BC, pervenit in bc, incrementum rectanguli BF ſeu zy, æquale eſt ſummæ rectangulorum BE, EG, Cf; eſt autem rectangulum EG, ad rectangulum EB, ut Ec ad BC, & ad rectangulum Cf ut CE, vel Bb, ad FC, ſeu AB; quarè redeunte bc, in locum ſuum priorem BC, & decreſcentibus continuò Ec, & EC atque tandem ultimò evaneſcentibus, decreſcit quoque & tandem evaneſcit, ſeu fit inaſſignabilis ratio rectanguli EG, ad rectangula EB & cf; adeóque (Lem. 1.) ſumma duorum rectangulorum BE, cf, fit ultimò æqualis ſummæ trium rectangulorum BE, EG, Cf; ergò incrementum naſcens rectanguli BF, ſeu zy, æquale eſt ſummæ duorum rectangulorum BE, Cf, naſcentium, ſeu ſummæ factorum ex z, in incrementum naſcens ipſius y, & ex y, in incrementum naſcens ipſius z, adeóque fluxio facti xy (146) eſt $zdy + ydz$. Undè etiam fluxio az, eſt adz, quia a, conſtans nullam habet fluxionem. Q. e. D.



Jam in facto zyx ponatur $zy = v$, & erit $zyx = vx$, adeóque fluxio facti zyx æqualis fluxioni facti vx; fluxio autem facti vx, eſt $xdv + vdx$, & fluxio facti $zy = v$, eſt $zdy + ydz = dv$, id eſt ſi in fluxione $xdv + vdx$, pro v & dv ſcribantur zy, & $zdy + ydz$, fluxio facti zyx, nempè $xdv + vdx$, erit $xzdy + yxdz + zydx$; & par eſt ratio aliorum factorum quorumcumque Q. e. D.

161. Cor. 1 ... Ponantur ſingulæ fluentes z, y, x, &c. ſibi mutuò ſemper æquales & ipſius zz, fluxio erit $zdz + zdz = 2zdz$: fluxio cubi z^3 erit $zzdz + zzdz = 3zzdz = 3z^{3-1}dz$: fluxio potentiæ z^4 erit $4z^3dz = 4z^{4-1}dz$: & eodem argumento fluxio potentiæ cujuſcumque z^m erit $mz^{m-1}dz$.

162. Cor. 2 .... Fluxio quantitatis $z^{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}-1}dz = \frac{dz}{2z^{\frac{1}{2}}}$ nam ponatur $z^{\frac{1}{2}} = y$ & erit $z = yy$, $dz = 2ydy$ (161) $dy = d.(z^{\frac{1}{2}}) = dz:2y = dz:2z^{\frac{1}{2}}$ & generaliter fluxio quantitatis $z^{\overline{m:n}}$ eſt $\frac{m}{n}z^{\frac{m}{n}-1}dz = \frac{m}{n}z^{\overline{m-n:n}}dz$.

163. Cor. 3 ... Fluxio fractionis $z:y$ ſeu zy^{-1} eſt $\overline{ydz - zdy}:yy$. Nam fiat $z:y = x$, erit $z = yx$, $dz = ydx + xdy$ & $dx = \overline{dz:y - xdy}:y = dz:y - zdy:yy = \overline{ydz - zdy}:yy$: fluxio quantitatis $az^m y^n$ eſt $amy^n z^{m-1}dz + anz^m y^{n-1}dy$ (160).

164. Fluxiones ſecundæ ex primis fluxionibus, tertiæ ex ſecundis, iiſdem regulis colliguntur quibus primæ fluxiones ex fluentibus finitis eruuntur. Ubi tamen ſic pergitur ad fluxiones ſecundas, tertias & ſequentes, convenit quantitatem aliquam ut uniformiter fluentem conſiderare, & pro ejus fluxione primâ unitatem ſcribere, pro ſecundâ verò & ſequentibus nihil (148). Exemplum unicum afferemus; ſit quærenda fluxio fluxionis $ydy:dx$, ſupponendo quantitatem x uniformiter fluere, adeóque dx conſtantem ſeu $= 1$, invenitur fluxio $yddy + dy^2:dx$.

165. Ex fluxionibus fluentes inveniuntur operationes inſtituendo iis contrarias quibus ex fluentibus reperiuntur fluxiones; quarè, litterâ S, ſignificante fluentem fluxionis cui præponitur ſeu ſummam primam incrementorum naſcentium, vel ultimam evaneſcentium (147) methodi fluxionum inverſæ fundamentales formulæ erunt.

LIBER PRIMUS.

1. S.

DE MOTU CORPORUM.

1. $S. dz = z$. & $S. adz = az$. $S. dz : a = z : a$.

2. $S. mz^{m-1} dz = z^m$,
& $S. maz^{m-1} dz = az^m$,
& $S. \frac{m}{n} z^{m-n:n} dz = z^{m:n}$.

3. $S. (dz \mp dy) = z \mp y$.

4. $S. (zdy + ydz) = yz$.
& $S. (a m y^n z^{m-1} dz + anz^m y^{n-1} dy) = az^m y^n$.

5. $S. (ydz - zdy) : yy = z : y$.

166. Si fluxio cujus fluens quæritur nulli harum formularum similis fuerit, per novarum variabilium substitutionem aliasque artes quas hic tractare nobis non licet, ad illas sæpè reduci potest. Sit in exemplum fluxio $\overline{cb + cx}^{\frac{1}{2}} \times dx$, ponatur $\overline{cb + cx}^{\frac{1}{2}} = z$ & erit $cb + cx = zz$, & $cdx = 2zdz$, & $dx = \frac{2zdz}{c}$ adeóque $\overline{cb + cx}^{\frac{1}{2}} \times dx = 2zzdz : c$. Hæc autem fluxio similis est formulæ $maz^{m-1} dz$, estque $z^2 = z^{m-1}$, adeóque $m = 3$, $ma = 3a = 2 : c$, & $a = 2 : 3c$, adeóque $S. maz^{m-1} dz = az^m = 2z^3 : 3c$ loco z, scribatur ipsius valor $\overline{cb + cx}^{\frac{1}{2}}$, & invenietur $S. \overline{cb + cx}^{\frac{1}{2}} \times dx = \frac{2}{3c}(cb + cx) \times \overline{cb + cx}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(b + x) \times \overline{cb + cx}^{\frac{1}{2}}$.

167. Superiorum formularum auxilio ex fluxionibus secundis primæ, ex tertiis secundæ &c. inveniuntur. Exempla sint $S. ddx = dx$. $S. dx. ddx = \frac{1}{2} dxdx = \frac{1}{2} dx^2$. Nam ponatur $dx = y$, & erit $ddx = dy$, & $dx\, ddx = ydy$, & per formulam secundam invenitur $S : ydy = \frac{1}{2} yy$, & si loco y substituatur ipsius valor, dx, erit $S. ydy = S. dxddx = \frac{1}{2} dx^2$. Similiter. $S. (dy^2 + yddy) : dx = ydy : dx$, supponendo dx constantem, nam fiat $ddy = dv$, adeóque $dy = v$, & fluxio proposita evadet, $\overline{vdy + ydv} : dx$, cujus fluens (per formulam 4^am^) est $vy : dx$, ob dx constantem. Cum autem sit $v = dy$, erit $vy : dx = ydy : dx$.

168. Postquam fluentes ex fluxionibus collectæ sunt, si de veritate conclusionis dubitatur, fluxiones fluentium inventarum vicissim colligendæ sunt, & cum fluxionibus sub initio propositis comparandæ. Nam si prodeunt æquales, conclusio rectè se habet; sin minus, corrigendæ sunt fluentes sic, ut earum fluxiones fluxionibus sub initio propositis æquentur. Nam & fluens pro lubitu assumi potest, & assumptio corrigi, ponendo fluxionem fluentis assumptæ æqualem fluxioni propositæ, & terminos homologos inter se comparando.

169. Quoniam constantis quantitatis nulla est fluxio, & eadem proinde fluxio dz ex fluentibus z, & $z \mp a$, colligitur; fluens omnis quæ ex fluxione primâ colligitur, augeri potest vel minui quantitate aliquâ constante; quæ ex fluxione secundâ colligitur, augeri potest vel minui quantitate cujus fluxio secunda nulla est; quæ ex fluxione tertia colligitur, augeri potest vel minui quantitate cujus fluxio tertia nulla est. Et sic deinceps in infinitum.

170. Cum fluens composita, quæ ex propositâ fluxione collecta est, unicam variabilem includit, ut fluens $\frac{2}{3}(b + x) \times \overline{bc + cx}^{\frac{1}{2}}$, quæ (166) deducta est ex fluxione $\overline{cb + cx}^{\frac{1}{2}} \times dx$, ita determinari solet constans adjungenda vel detrahenda: in fluente inventâ loco variabilis x, ponitur 0; tum si fluens ipsa fit etiam 0, completa est. Si quid verò residuum fuerit, ut hic remanet $+ \frac{2}{3} b \sqrt{bc}$, hoc residuum cum signo contrario fluenti primò inventæ adjicitur, ut habeatur fluens completa, $\frac{2}{3}(b + x) \times \overline{bc + cx}^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} b \sqrt{bc}$. Hujus regulæ ratio est, quod fluens inventa supponi possit exhibere aream curvæ alicujus, cujus sit abscissa variabilis x, adeo ut dum $x = 0$, area, fluente expressâ, sit etiam 0; unde si in fluente primò inventâ loco x, substituatur 0, sitque aliquod residuum, illud ex fluente detrahi debet. Generaliter, quantitas constans adjicienda vel subducenda ex naturâ quæstionis determinatur, aut arbitraria est.

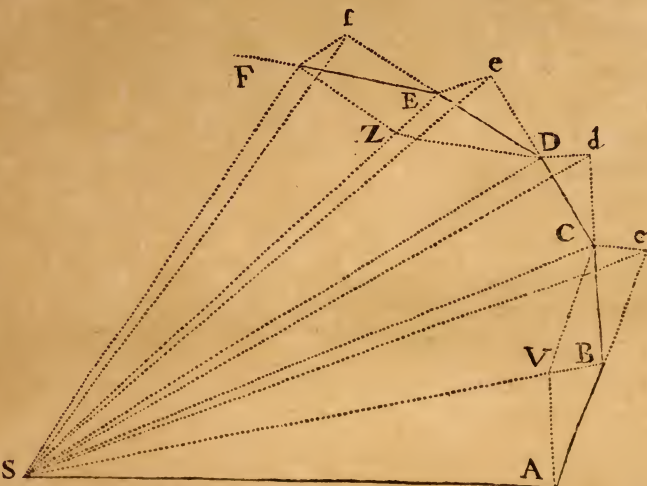
SEC

SECTIO II.

De inventione virium centripetarum.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.

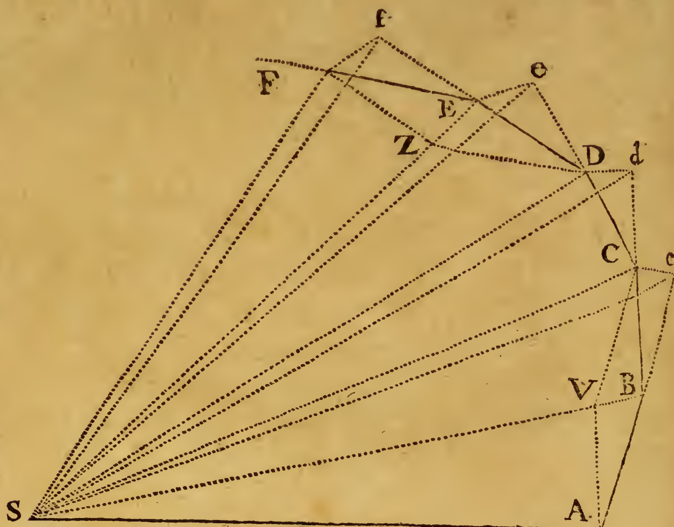


Dividatur tempus in partes æquales, & primâ temporis parte describat corpus vi insitâ rectam *A B*. Idem secundâ temporis parte, si nil impediret, rectà pergeret ad *c*, (per leg. 1.) describens lineam *B c* æqualem ipsi *A B*; adeò ut radiis *A S*, *B S*, *c S* ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ *A S B*, *B S c*. Verum ubi corpus venit ad *B*, agat vis centripeta impulsu unico sed magno, efficiatque ut corpus de recta *B c* declinet & pergat in rectâ *B C*. Ipsi *B S* parallela agatur *c C*, occurrens *B C* in *C*; & completâ secundâ temporis parte, corpus (per legum corol. 1.) reperietur in *C*, in eodem ([a]) plano cum triangulo *A S B*. Junge *S C*; & triangulum *S B C*, ob parallelas *S B*, *C c*, æquale erit triangulo *S B c*, atque ideo etiam

([a]) 171. Reperitur in C, in eodem plano cum triangulo A S B; nam diagonalis B C, quam viribus conjunctis mobile describit est in plano parallelogrammi V B C c, cujus latera B V, B c, viribus separatis describenda, sunt in plano trianguli A S B.

De Motu Corporum.

etiam triangulo *SAB*. Simili argumento si vis centripeta successivè agat in *C*, *D*, *E*, &c. faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas *CD*, *DE*, *EF*, &c. jacebunt hæ omnes in eodem plano; & triangulum *SCD* triangulo *SBC*, & *SDE* ipsi *SCD*, & *SEF* ipsi *SDE* æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto describuntur: & componendo, sunt arearum summæ quævis *SADS*, *SAFS* inter se, ut sunt tempora descriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum; & eorum ultima perimeter *ADF*, (per corollarium quartum lemmatis tertii) erit linea curva: ideóque vis centripeta, quâ corpus à tangente hujus curvæ perpetuò retrahitur, aget indesinenter; areæ verò quævis descriptæ *SADS*, *SAFS* temporibus descriptionum semper proportionales, erunt iisdem temporibus in hoc casu proportionales. *Q. E. D.*



Corol. 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti est in spatiis non resistentibus reciprocè ut perpendiculum à centro illo in orbis tangentem rectilineam demissum. (b) Est enim velocitas in locis illis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, ut sunt bases æ-

(b) 172. Est enim velocitas in locis illis A, B, C, D, E, ut sunt bases æqualium triangulorum AB, BC, CD, DE, EF, æqualibus temporibus uniformi motu descriptæ (5); æqualium autem triangulorum bases sunt reciprocè ut eorum altitudines, hoc est, reciprocè ut perpendicula ex centro virium S, in bases demissa.

qualium triangulorum AB, BC, CD, DE, EF; & hæ bases sunt reciprocæ ut perpendicula in ipsas demissa.

Corol. 2. Si arcuum duorum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus ab eodem corpore successivè descriptorum chordæ AB, BC compleantur in parallelogrammum $ABCU$, & hujus diagonalis BU in eâ positione quam ultimò habet ubi arcus illi in infinitum diminuuntur, producatur utrinque; (c) transibit eadem per centrum virium.

Corol. 3. Si arcuum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus descriptorum chordæ AB, BC ac DE, EF compleantur in parallelogramma $ABCU$, $DEFZ$; vires in B & E sunt ad invicem in ultimâ ratione diagonalium BU, EZ, ubi arcus isti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus BC & EF componuntur (per legum corol. 1.) ex motibus Bc, BU & Ef, EZ: atqui BU & EZ, ipsis Cc & Ff æquales, in demonstratione propositionis hujus generabantur ab impulsibus vis centripetæ in B & E, ideóque sunt his impulsibus proportionales.

Corol. 4. Vires quibus corpora quælibet in spatiis non resistentibus à motibus rectilineis retrahuntur ac detorquentur in orbes curvos, sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus descriptorum sagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, & chordas bisecant ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. (d) Nam hæ sagittæ sunt semisses diagonalium, de quibus egimus in corollario tertio.

Corol.

sa. Cum igitur evanescentibus triangulis A S B, B S C &c. ultima perimeter A B C D E F, sit linea curva quam (113) rectæ A c, B d, C e, D f, tangunt in punctis A, B, C, D, E, manifestum est velocitates in illis punctis esse reciprocè ut perpendicula à centro S, in tangentes demissa.

(c) 173. Transibit eadem per centrum virium. Nam ex demonstratione propositionis hujus, sumptâ B V = C c, erit V C, æqualis & parallela lineæ B c, seu A B, adeóque V A, B C, erunt etiam æquales & parallelæ, & B V, quæ producta transit per centrum S, erit diagonalis parallelogrammi A B C V.

174. Si ducantur per puncta quævis B, & D, perimetri curvæ vel diversarum curvarum tangentes B c, D e, & demittantur angulorum contactuum subtensæ C c, E e, radiis S B, S D, ad centrum virium convergentibus parallelæ, sintque arcus B C, D E, æqualibus temporibus descripti, patet ex corollario 3. vires centripetas in B & D, esse ad invicem in ultimâ ratione subtensarum C c, E e.

(d) 175. Nam hæ sagittæ sunt semisses diagonalium B V, E Z, diagonales enim A C, D F, quæ sunt chordæ arcuum evanescentium A B C, D E F, alias diagonales B V, E Z, bisecant.

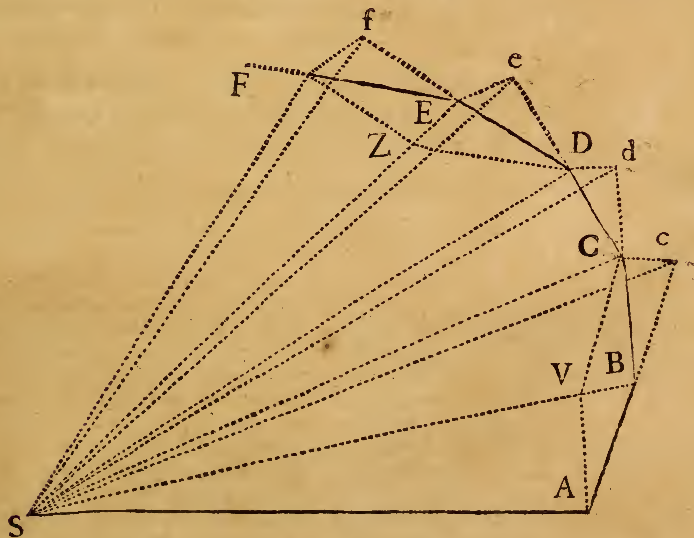
Corol. 5. Ideoque vires eædem ſunt ad (c) vim gravitatis, ut hæ ſagittæ ad ſagittas horizonti perpendiculares arcuum parabolicorum, quos projectilia eodem tempore deſcribunt.

Corol. 6. Eadem omnia obtinent per legum corol. v. ubi plana, in quibus corpora moventur, unà cum centris virium, quæ in ipſis ſita ſunt, non quieſcunt, ſed moventur uniformiter in directum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Corpus omne, quod movetur in lineâ aliquâ curvâ in plano deſcriptâ, & radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, deſcribit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur à vi centripetâ tendente ad idem punctum.

Caſ.



(c) 176. Vis enim gravitatis per lineas parallelas ad horizontem perpendiculares agit & gravia obliquè projecta parabolas deſcribunt (40), quod etiam in figurâ ſuperiori contingeret, ſi centrum virium S, in infinitum abiret, & vis centripeta in omnibus punctis A, B, C, D, eadem maneret.

177.

Cas. 1. Nam corpus omne, quod movetur in lineâ curvâ, detorquetur de cursu rectilineo per vim aliquam in ipsum agentem (per leg. 1.) Et vis illa, quâ corpus de cursu rectilineo detorquetur, & cogitur triangula quam minima *SAB*, *SBC*, *SCD*, &c. circa punctum immobile *S* temporibus æqualibus æqualia describere, (f) agit in loco *B* secundum lineam parallelam ipsi *c C* (per prop. XL. lib. 1. elem. & leg II.) hoc est, secundum lineam *BS*; & in loco *C* secundum lineam ipsi *d D* parallelam, hoc est, secundum lineam *SC*, &c. Agit ergo semper secundum lineas tendentes ad punctum illud immobile *S*. *Q. E. D.*

Cas. 2. Et, per legum corollarium quintum, perinde est, sive quiescat superficies, in quâ corpus describit figuram curvilineam, sive moveatur eadem unà cum corpore, figurâ descriptâ, & puncto suo *S* uniformiter in directum.

Corol. 1. In spatiis vel mediis non resistentibus, si areæ non sunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concursum radiorum; (g) sed indè declinant in consequentia, seu versus plagam in quam fit motus, si modo arearum descriptio acceleratur: sin retardatur, declinant in antecedentia.

Corol.

(f) 177. Agit in loco B, secundùm lineam parallelam ipsi C c, hoc est, secundùm lineam B S; nam solâ vi insitâ in A, corpus uniformi cum motu progrederetur per rectam A B c, & æqualibus temporibus æquales lineas A B, B c, describeret; verùm per vim centripetam in B, detorquetur à rectâ B c, ut aliam rectam B C, eodem tempore describat quo descripsisset B c; adeóque junctâ C c, vis centripeta agit in B, secundùm directionem parallelam ipsi C c (per coroll. 1. Leg.), sed ob A B = B c, & ob triangulum S B C, æquale triangulo S A B, (per hyp.), erit triangulum S A B = triang. S B c = triang. S B C, adeóque per prop. 40. vel 39. lib. 1. Elem. communis triangulorum S B C, S B c æqualium basis B S, parallela est rectæ C c, quæ illorum triangulorum vertices jungit; cum igitur, per demonstrata, vis centripeta in B, agat secundùm directionem parallelam lineæ C c, necessum est ut agat secundùm directionem rectæ B S, hoc est, ut tendat ad centrum S.

(g) 178. Sed indè declinant in consequentia, si modò arearum descriptio acceleratur: sin retardatur, declinant in antecedentia. Nam si triangulum S B C, æquale non est triangulo S A B, seu S B c, eodem tempore descripto, recta C c, non erit parallela lineæ B S, sed producta cum lineâ S B, ità converget ut tendat in plagam motûs, si triangulum S B C, triangulo S B c, majus est, & tendat in plagam contrariam si triangulum S B C, triangulo S B c, minus. Quarè vis centripeta in B, agens secundùm directionem parallelam lineæ C c, in primo casu declinat in consequentia, in secundo casu declinat in antecedentia.

De Motu Corporum.

Corol. 2. ([h]) In mediis etiam resistentibus, si arearum descriptio acceleratur, virium directiones declinant à concursu radiorum versus plagam, in quam fit motus.

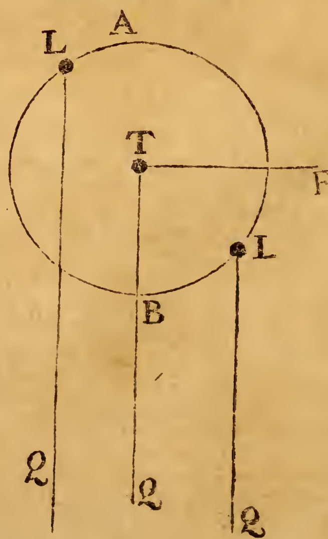
Scholium.

Urgeri potest corpus à vi centripetâ compositâ ex pluribus viribus. In hoc casu sensus propositionis est, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum *S*. ([i]) Porro si vis aliqua agat perpetuò secundum lineam superficiei descriptæ perpendicularem; hæc faciet ut corpus deflectatur à plano sui motus: sed quantitatem superficiei descriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compositione virium negligenda est.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius utcunque moti ducto describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compositâ ex vi centripetâ tendente ad corpus illud alterum, & ex vi omni acceleratrice quâ corpus illud alterum urgetur.

([k]) Sit corpus primum *L*, & corpus alterum *T*: & (per



([h]) 179. Cum enim medium resistat accelerationi descriptionis arearum, liquet arearum descriptionem etiam sublatâ medii resistentiâ accelerari oportere, ac proindè per Coroll. 1. virium directiones declinare à concursu radiorum, in S, versùs plagam in quam fit motus.

([i]) 180. Porrò si vis illa perpetuò secundùm lineam superficiei descriptæ perpendicularem agat, planum subjectum duntaxat premit, & corpus in illo plano motum in neutram partem impellit, ac proindè nec superficiei descriptæ quantitatem auget nec minuit, & propterea in compositione virium in plano agentium negligenda est.

([k]) 181. Corpus L, circà alterum T, in curvâ A L B, ità revolvatur, ut circà illius centrum T, semper describat areas temporibus proportionales, dùm interim corpus T, urgetur vi acceleratrice secundùm directionem T Q, & per Leg. Coroll. 6. si vi novâ acceleratrice quæ æqualis & contraria sit illi quâ corpus T secundùm directionem T Q urgetur, urgea-

legum corol. VI.) si vi novâ, quæ æqualis & contraria sit illi, quâ corpus alterum *T* urgetur, urgeatur corpus utrumque secundum lineas parallelas; perget corpus primum *L* describere circa corpus alterum *T* areas easdem ac priùs: vis autem, qua corpus alterum *T* urgebatur, jam destruetur per vim sibi æqualem & contrariam; & propterea (per leg. I.) corpus illud alterum *T* sibimet ipsi jam relictum vel quiescet, vel movebitur uniformiter in directum: & corpus primum *L* urgente differentiâ virium, id est, urgente vi reliquâ perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum *T* describere. Tendit igitur (per theor. II.) differentia virium ad corpus illud alterum *T* ut centrum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpus unum *L* radio ad alterum *T* ducto describit areas temporibus proportionales; atque de vi totâ (sive simplici, sive ex viribus pluribus juxta legum corollarium secundum compositâ) quâ corpus prius *L* urgetur, subducatur (per idem legum corollarium) vis tota acceleratrix, qua corpus alterum urgetur: vis omnis reliqua, quâ corpus prius urgetur, tendet ad corpus alterum *T* ut centrum.

Corol. 2. Et, si areæ illæ sunt temporibus quamproximè proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum *T* quamproximè.

Corol. 3. Et vice versâ, si vis reliqua tendit quamproximè ad corpus alterum *T*, erunt areæ illæ temporibus quamproximè proportionales.

Corol. 4. Si corpus *L* radio ad alterum corpus *T* ducto describit areas, quæ cum temporibus collatæ sunt valde inæquales; & corpus illud alterum *T* vel quiescit, vel movetur uniformiter

geatur corpus utrumque secundùm lineas parallelas Q T, Q L; perget corpus L, describere circà corpus T, areas easdem ac priùs; vis autem acceleratrix quâ corpus T urgebatur jam destruetur per vim sibi æqualem & contrariam; & propterea, per Leg. I. corpus illud T, sibimet ipsi jam relictum vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum; nimirum quiescet, si nullâ aliâ vi præter acceleratricem secundùm directionem T Q, antè urgebatur; movebitur verò æquabiliter per rectam aliquam T F, si præter vim acceleratricem per T Q, agentem, aliâ vi non acceleratrice ferebatur juxtà directionem T F, &c.

De Motu Corporum.

formiter in directum: actio vis centripetæ ad corpus illud alterum *T* tendentis vel nulla est, vel miscetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: visque tota ex omnibus, si plures sunt vires, composita ad aliud (sive immobile sive mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur; si modo vis centripeta sumatur, quæ restat post subductionem vis totius in corpus illud alterum *T* agentis.

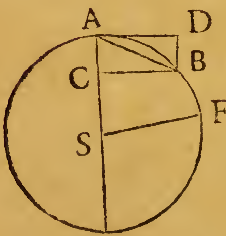
Scholium.

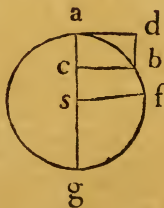
Quoniam æquabilis arearum descriptio index est centri, quod vis illa respicit, quâ corpus maximè afficitur, quâque retrahitur à motu rectilineo, & in orbita sua retinetur; quidni usurpemus in sequentibus æquabilem arearum descriptionem ut indicem centri, circum quod motus omnis circularis in spatiis liberis peragitur?

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Corporum, quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere; & esse inter se, ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.

(l) Tendunt hæ vires ad centra circulorum per prop. II. & corol. 2. prop. I. & sunt inter se ut arcuum æqualibus tempo-





(l) 182. Corpora duo A & a, circulos A B G A, a b g a, æquabili motu describant, & areæ seu sectores A S F, F S G, & a s f, f s g, erunt in singulis circulis ut arcus A F, F G, & a f, f g; hoc est (5) ut tempora quibus describuntur, ac proindè vires quibus corpora A & a, in peripheriis A B G A, a b g a retinentur tendunt ad centra S & s. Sint arcus A B, a b, æqualibus temporibus quam minimis descripti, & ductis tangentibus A D, a d, & ad eas perpendicularibus B D, b d, completisque parallelogrammis C D, c d, vires centripetæ in A & a, erunt inter se ut rectæ D b, d b, seu ut sinus versi A C, a c, (174). Verum

poribus quàm minimis deſcriptorum ſinus verſi per corol. 4. prop. 1. hoc eſt, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circulorum applicata per lem. VII. & propterea, cum hi arcus ſint ut arcus temporibus quibuſvis æqualibus deſcripti, & diametri ſint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis ſimul deſcriptorum quadrata applicata ad radios circulorum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Cum arcus illi ſint ut velocitates corporum, vires centripetæ erunt in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione velocitatum directè, & ratione ſimplici radiorum inversè. (m)

Corol. 2. (n) Et, cum tempora periodica ſint in ratione compoſitâ ex ratione radiorum directè, & ratione velocitatum inversè; (o) vires centripetæ ſunt in ratione compoſitâ ex ratione radiorum directè, & ratione duplicatâ temporum periodicorum inversè.

Corol. 3. (p) Unde ſi tempora periodica æquentur, & prop-

rùm ductis chordis A B, a b, eſt A C : A B = A B : A G, & a c : a b = a b : a g, undè $AC = \frac{AB^2}{AG}$, & $ac = \frac{ab^2}{ag}$; cum igitur chordæ & arcus naſcentes æquales ſint (per Lem. VII.) erit A C : a c, hoc eſt, vis centripeta in A, ad vim centripetam in a, ut quadratum arcûs evaneſcentis A B diametro A G diviſum, ad quadratum arcus evaneſcentis, a b, diametro a g, diviſum & propterea cum hi arcus &c.

(m) 183. Vis centripeta quâ corpus in peripheriâ circuli uniformiter incedens retinetur, eſt in omnibus peripheriæ punctis eadem, ut pote ſemper proportionalis conſtantis velocitatis quadrato ad radium conſtantem applicato.

(n) 184. Tempora periodica, hoc eſt, tempora quibus integræ peripheriæ deſcribuntur ſunt in ratione compoſitâ ex ratione radiorum directè & ratione velocitatum inversè. Nam (5) velocitates ſunt ut peripheriæ ad tempora periodica applicatæ, ſed peripheriæ ſunt ut radii, ergo velocitates ſunt ut radii ad tempora periodica applicati, ac proindè tempora periodica ſunt ut radii directè & velocitates inversè. Si corporum A & a, tempora periodica dicantur T & t, celeritates C & c, radii A S, a s, dicantur R & r, erit $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$ ideóque $T : t = \frac{R}{C} : \frac{r}{c}$.

(o) 185. Vires centripetæ ſunt reciprocè ut quadrata temporum periodicorum applicata ad circulorum radios; nam vires centripetæ corporum A & a, dicantur V & v, erit (per coroll. 1.) $V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$, ſed quoniam (184) $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, adeóque $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$, erit $\frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r} = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$, ergò $V : v = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2} = t^2 R : T^2 r = \frac{t^2}{r} : \frac{T^2}{R}$.

(p) 186. Undè ſi tempora periodica æquentur & propterea (184) velocitates ſint ut radii, erunt etiam vires centripetæ ut radii, nam cum ſit (185) $V : v = t^2 R : T^2 r$, ſi $T^2 = t^2$, erit $V : v = R : r$.

propterea velocitates ſint ut radii ; erunt etiam vires centripetæ ut radii : & contra.

Corol. 4. (q) Si & tempora periodica, & velocitates ſint in ratione ſubduplicatâ radiorum ; (r) æquales erunt vires centripetæ inter ſe : & contra.

Corol. 5. (ſ) Si tempora periodica ſint ut radii, & propterea velocitates æquales ; vires centripetæ erunt reciprocè ut radii : & contra.

Corol. 6. (t) Si tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicatâ radiorum, & propterea velocitates reciprocè in radiorum ratione ſubduplicatâ ; (u) vires centripetæ erunt reciprocè ut quadrata radiorum : & contra.

Corol.

Et contrà ſi vires centripetæ ſint ut radii, tempora periodica æquantur. Cum enim ſit (185) $V : v = t^2 R : T^2 r$, ſi ponatur $V : v = R : r$, erit $R : r = t^2 R : T^2 r$, undè $r t^2 R = R T^2 r$, adeóque $t^2 = T^2$, & $t = T$.

(q) 187. Si tempora periodica ſint in ratione ſubduplicatâ radiorum, velocitates erunt in eâdem ratione. Nam (184) $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$ adeóque $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$. Undè ſi fuerit $T : t = R^{\frac{1}{2}} : r^{\frac{1}{2}}$ ac proindè $T^2 : t^2 = R : r$, erit $C^2 : c^2 = R : r$.

Et contrà ſi fuerit $C^2 : c^2 = R : r$, erit $\frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2} = R : r$, adeóque $\frac{R}{T^2} = \frac{r}{t^2}$, & $R t^2 = r T^2$, undè $T^2 : t^2 = R : r$.

(r) 188. Si & tempora periodica ac proindè velocitates (187) ſint in ratione ſubduplicatâ radiorum, æquales erunt vires centripetæ inter ſe. Cum ſit (185) $V : v = t^2 R : T^2 r$, ſi ponatur $T^2 : t^2 = R : r$, erit $t^2 R = T^2 r$, undè $V = v$.

Et contrà ſi $V = v$, cum ſit (185) $V : v = t^2 R : T^2 r$, erit $t^2 R = T^2 r$, & proindè $T^2 : t^2 = R : r$.

(ſ) 189. Si tempora periodica ſunt ut radii & propterea (184) velocitates æquales, vires centripetæ erunt reciprocè ut radii. Quoniam enim (per coroll. 1.) $V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$, ſi $C^2 = c^2$, erit $V : v = \frac{1}{R} : \frac{1}{r}$.

Et contrà ſi fuerit $V : v = \frac{1}{R} : \frac{1}{r}$, cum ſit (coroll. 1.) $V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$, erit $\frac{1}{R} : \frac{1}{r} = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$, adeóque $C^2 = c^2$, & $C = c$.

(t) 190. Si tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicatâ radiorum, erunt velocitates reciproce in ratione radiorum ſubduplicatâ ; nam quoniam (184) $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, adeóque $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$ ſi fuerit $T^2 : t^2 = R^3 : r^3$, erit $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{R^3} : \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{R} : \frac{1}{r} = r : R$.

Et contrà ſi fuerit $C^2 : c^2 = r : R$, erit $\frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2} = r : R$, adeóque $\frac{R^3}{T^2} = \frac{r^3}{t^2}$ & $R^3 : r^3 = T^2 : t^2$.

(u) 191. Si tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicatâ radiorum & propterea (190) velocitates reciproce in radiorum ratione ſubduplicatâ, vires centripetæ erunt reciproce ut quadrata radiorum. Nam cum ſit (185) $V : v = t^2 R : T^2 r$; ſi fuerit $T^2 : t^2 = R^3 : r^3$, erit $V : v = r^3 R : R^3 r = r^2 : R^2$.

Et contrà ſi $V : v = r^2 : R^2$, erit (185) $r^2 : R^2 = t^2 R : T^2 r$ ac proindè $t^2 R^3 = T^2 r^3$, & $R^3 : r^3 = T^2 : t^2$.

192.

Corol. 7. Et univerſaliter, ſi (x) tempus periodicum ſit ut radii R poteſtas quælibet R^n, & propterea velocitas reciprocè ut radii poteſtas R^{n-1}; (y) erit vis centripeta reciprocè ut radii poteſtas R^{2n-1}: & contra. LIBER PRIMUS.

Corol. 8. (z) Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora ſimiles figurarum quarumcunque ſimilium, centraque in figuris illis ſimiliter poſita habentium, par-

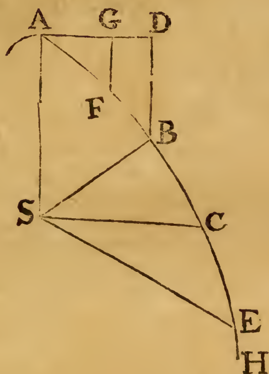
(x) 192. Si tempora periodica ſint ut radiorum poteſtates quælibet R^n, r^n, velocitates erunt reciproce ut radiorum poteſtates R^{n-1}, r^{n-1}. Nam ponatur $T:t = R^n:r^n$, & quoniam (184) $C:c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, erit $C:c = \frac{R}{R^n} : \frac{r}{r^n}$ $= \frac{1}{R^{n-1}} : \frac{1}{r^{n-1}} = r^{n-1} : R^{n-1}$.

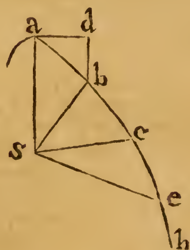
Et contrà ſi fuerit $C:c = r^{n-1}$, R^{n-1}, erit $\frac{R}{T} : \frac{r}{t} = r^{n-1} : R^{n-1}$, adeóque $\frac{R^n}{T} = \frac{r^n}{t}$, undè $R^n : r^n = T:t$.

(y) 193. Et univerſaliter ſi tempora periodica ſint ut radiorum poteſtates quælibet R^n, r^n, & propterea (192) velocitates reciprocè ut radiorum poteſtates R^{n-1}, r^{n-1}, erunt vires centripetæ reciprocè ut radiorum poteſtates R^{2n-1}, r^{2n-1}. Nam ponatur $T:t = R^n:r^n$, adeóque $T^2:t^2 = R^{2n}:r^{2n}$: & cum ſit (185) $V:v = t^2R:T^2r$, erit $V:v = Rr^{2n}:rR^{2n} = r^{2n-1}:R^{2n-1}$.

Et contrà ſi fuerit $V:v = r^{2n-1}:R^{2n-1}$; cum ſit $V:v = t^2R:T^2r$, erit $r^{2n-1}:R^{2n-1} = t^2R:T^2r$, adeóque $t^2R^{2n} = T^2r^{2n}$, undè $T^2:t^2 = R^{2n}:r^{2n}$ & $T:t = R^n:r^n$.

(z) 194. Corpora A & a, figurarum ſimilium A B H, a b h, centra S, s, in figuris illis ſimiliter poſita habentium, partes ſimiles A B E, a b e, ità deſcribant ut areæ A S B, A S C &c. a s b, a s c &c. circà centra S, s, in ſingulis figuris deſcriptæ temporibus quibus deſcribuntur ſint reſpectivè proportionales, & per prop. 11. vires centripetæ ad centra S, s, tendent. Per puncta A & a, in curvis ſimiliter poſita agantur tangentes A D, a d,



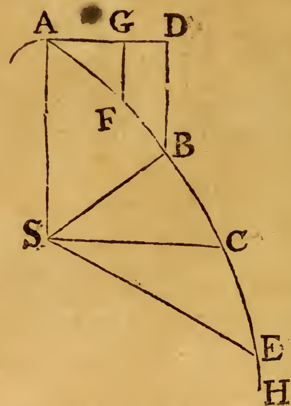


ſintque arcus minimi, A F, a b, eodem tempore in utrâque curvâ deſcripti, & ductis rectis F G, b d, radiis vectoribus A S, a s, parallelis, vis centripeta in A, eſt ad vim centripetam in a, ut F G, ad b d, (174). Sumatur autem ar-

De Motu Corporum.

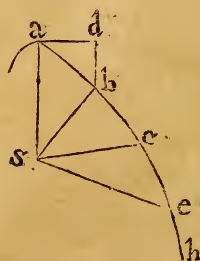
partes deſcribunt, conſequuntur ex demonſtratione præcedentium ad hoſce caſus applicatâ. Applicatur autem ſubſtituendo æquabilem arearum deſcriptionem pro æquabili motu, & diſtantias corporum à centris pro radiis uſurpando.

Qu-



arcus A B ſimilis a b, (ita ut ſit a s : A S = a b : A B, ac proinde ſit $AB = \frac{ab \times AS}{as}$) ducaturque B D radio A S parallela, erit per coroll. 1. Lem. XI. $FG : BD = AF^2 : AB^2$, & quia figuræ ABD & a b d, ſunt ſimiles, eſt B D: b d = A B: a b, itaque per compoſitionem rationis eſt $FG : bd = AF^2 \times AB : AB^2 \times ab = AF^2 : AB \times ab$ (& quia $AB = \frac{ab \times AS}{as}$) $= AF^2 : \frac{ab \times AS}{as} \times ab = \frac{AF^2}{AS} : \frac{ab^2}{as}$. Cum igitur demonſtratum fuerit vires centripetas in A & a, eſſe inter ſe ut ſunt G F, b d, erunt vires illæ ut quadrata arcuum A F, a b, ſimul deſcriptorum applicata ad radios homologos A S, a s.

195. Coroll. 1. Quoniam velocitates finitæ corporum A & a, per arcus naſcentes A F, a b, ſunt uniformes, erunt illæ ut arcus A F, a b, æqualibus temporibus deſcripti (5). Unde vires centripetæ in A, & a, erunt ut velocitatum in A & a, quadrata, ad radios A S, a s applicata.

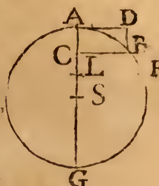


196. Corol. 2. Figuræ ſimiles A S E, a s e, diviſæ concipiantur in innumeros ſectores æquales A S B, B S C &c., & a s b, b s c, &c. ſibi mutuò in duabus figuris ſimiles, & ob æquabilem arearum ſeu ſectorum in ſingulis figuris deſcriptionem, ſectores æquales æqualibus temporibus deſcribentur ac proindè arcus A B, B C, & arcus a b, b c, &c. æqualibus reſpectivè temporibus percurrentur, erit igitur tempus per A B, ad tempus per a b, ut tempus per A E, ad tempus per a e, hoc eſt, tempora quibus deſcribuntur arcus ſimiles A B, a b, ſunt ut tempora quibus deſcribuntur alii quicumque ſimiles arcus, A E, a e, adeóque ut tempora periodica. Cum igitur (195) velocitates in A & a, ſint inter ſe ut arcus A B, a b, ad ſua reſpectivè tempora applicati, erunt quoque velocitates illæ inter ſe ut arcus A B, a b, ſeu ob figurarum ſimilitudinem, ut radii A S, a s, ad tempora periodica applicati, id eſt, celeritates in punctis correſpondentibus A & a, ſunt in ratione compoſitâ ex ratione radiorum homologorum directè & ratione temporum periodicorum inversè, adeóque tempora periodica ſunt ut radii directè & velocitates inversè.

197. Coroll. 3. Celeritates in A & a, dicantur

Corol. 9. (a) Ex eâdem demonstratione consequitur etiam; quod arcus, quem corpus in circulo datâ vi centripetâ uniformiter revolvendo tempore quovis describit, medius est pro-por-

dicantur C, c, vires centripetæ V, v, radii vectores homologi R, r; tempora periodica T, t, & erit (196) $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, & $T : t = \frac{R}{C} : \frac{r}{c}$, & $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$. Et quoniam (195) $V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$, erit $V : v = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2} = t^2 R : T^2 r = \frac{t^2}{r} : \frac{T^2}{R}$, hoc est, vires centripetæ sunt reciprocè ut quadrata temporum periodicorum ad radios homologos applicata. Cum igitur cætera omnia de temporibus, velocitatibus & viribus in circulis corollaria, ex superioribus proportionibus deducta sint, evidens est eadem omnia convenire temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcumque similium, centraque in figuris illis similiter posita habentium, partes describunt.



(a) 198. Corpus A, uniformiter revolvatur in circuli peripheriâ A B G A, & idem vel aliud corpus ex puncto A, per radium A S, eâdem vi centripetâ quâ corpus A in circuli peripheriâ retinetur continuò ità urgeatur ut (vi illâ centripetâ constanti permanente, quemadmodum fit in corporibus vi gravitatis constante cadentibus) corpus illud cadendo percurrat A L, eodem tempore quo corpus A, uniformiter describit arcum A F. Quoniam vis acceleratrix per radium A S, constans est & continuò agit (per hyp.) corpus per A S, motu uniformiter accelerato cadit (25) & spatia percursa sunt ut quadrata temporum quibus percurruntur (27), ducatur per A, tangens A D, & sumpto arcu minimo A B, in tangentem demittatur perpendicularis B D, & compleatur rectangulum C D; eodem tempore quo corpus A, æquabili motu describit arcum A B, per vim centripetam percurrit D B, seu A C, (ex coroll. 3. Prop. 1æ.) erit igitur A C, ad A L, ut quadratum temporis per A B, ad quadratum temporis per A F, hoc est, ob motum in circulo æquabilem A C : $AL = AB^2 : AF^2 = \frac{AB^2}{AG} : \frac{AF^2}{AG}$; cum igitur ob arcum nascentem A B, suæ chordæ æqualem, fit $AC = \frac{AB^2}{AG}$, erit quoquè $AL = \frac{AF^2}{AG}$ atquè adeò $AL \times AG = AF^2$ & proindè $AL : AF = AF : AG$.

199. Coroll. 1. Velocitas quâ corpus A, peripheriam circuli A F G A, uniformiter describit, æqualis est velocitati quam acquireret cadendo per dimidium radium A S, si vi centripetâ constanti continuò urgeretur æquali illi quâ corpus A in peripheriâ circuli retinetur: Nam sit A L altitudo per quam A cadere debet ut acquirat velocitatem quâ peripheria circuli describitur, sitque A F arcus eo tempore descriptus quo A cadit per A L eodem etiam tempore motu æquabili percurreretur, 2 A L per velocitatem eam in L acquisitam (30), adeóque erit $AF = 2AL$ siquidem eodem tempore eademque celeritate æquabili percurruntur, sed est semper $AF^2 = AL \times AG$ (198) cum igitur sit $2AL = AF$ ac proinde $4AL^2 = AF^2$ erit $4AL^2 = AL \times AG$ & $4AL = AG$ & $AL = \frac{AG}{4} = \frac{AS}{2}$.

200. Coroll. 2. Tempus revolutionis per integram peripheriam est ad tempus descensûs uniformiter accelerati per dimidium radium, ut peripheria ad radium. Nam eodem tempore quo dimidius radius motu uniformiter accelerato percurritur, totus radius describeretur cum æquabili velocitate lapsu per dimidium radium acquisitâ (30) eâ verò ipsa celeritate corpus circuli peripheriam

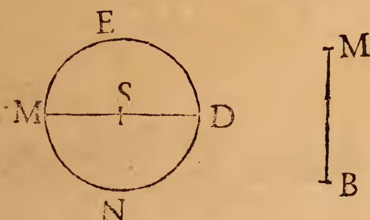
De Motu Corporum.

portionalis inter diametrum circuli, & descensum corporis eâdem datâ vi eodemque tempore cadendo confectum.

Scho.

(199) describit. Ergo cum spatia eâdem velocitate uniformi percursa, sint ut tempora (5) patet propositum.

201. Coroll. 3. Hinc datâ vi centripetâ quâlibet in datâ à centro distantiâ, facile est reperire velocitatem quâ corpus projici debet ut circà prædictum centrum in datâ distantiâ circulum uniformiter describat; velocitas enim illa æqualis est velocitati quam corpus acquireret cadendo per dimidiam distantiam à centro, si datâ vi centripetâ continuò urgeretur (199). Dato autem circuli radio, datur peripheria, & datâ æquabili in circulo velocitate cum peripheriâ, invenitur tempus periodicum, & arcus dato quovis tempore descriptus habetur.



202. Coroll. 4. Datis circuli radio & velocitate corporis in eo revolventis, facilè colligitur proportio vis centripetæ in eo circulo ad vim quamlibet notam qualis est vis gravitatis. Primum enim inveniatur tempus revolutionis unius in eo circulo peractæ (5), mox invenietur tempus quo corpus vi illâ centripetâ continuò sollicitatum per dimidium radium caderet (200). Ex datâ autem vi gravitatis seu ex dato spatio quod grave liberè cadendo, dato quodam tempore percurrit, invenitur (27) spatium ab eodem gravi percursum eo tempore quo corpus vi centripetâ sollicitatum per dimidium radium cadit, sed vires acceleratrices constantes, rationem habent spatiorum quæ dato tempore percurrere faciunt (30) est ergo vis ea centripeta ad vim gravitatis, ut dimidius circuli radius ad spatium id quod grave percurreret eo tempore quo corpus vi centripeta sollicitatum dimidium illum radium percurrit.

Exempli causâ. Corpus M, ope fili MS clavo in S alligati, circà centrum S uniformiter describat circulum MNDE, in plano horizontali positum, eaque sit corporis revolventis celeritas quæ acquiritur à gravi per altitudinem MB cadente, quæritur ratio vis centripetæ in circulo ad vim gravitatis. Tempus quo grave cadit per altitudinem MB, dicatur T, & velocitas in B acquisita, quâ (ex hyp.) corpus M circuli peripheriam uniformiter describit, erit $\frac{2\,MB}{T}$ (30), peripheria circuli dicatur p, & cum tempus periodicum in circulo sit æquale peripheriæ ad velocitatem $\frac{2\,MB}{T}$ applicatæ (5) erit id Tempus Periodicum $\frac{p\times T}{2\,MB}$; jam verò est peripheria ad radium (200) ut tempus Periodicum ad tempus quo corpus M, solâ vi centripetâ constante sollicitatum, dimidium radium MS percurrit, sive $p : MS = \frac{p\times T}{2\,MB}$ ad tempus per dimidium radium quod est ideo $\frac{T\times MS}{2\,MB}$. Cum autem grave tempore T altitudinem MB sit emensus & in motu uniformiter accelerato spatia percursa sint ut quadrata temporum quibus percurruntur (27) erit T^2 ad $\frac{T^2\times MS^2}{4\,MB^2}$, seu $4\,MB^2$ ad MS^2 ut spatium MB tempore T percursum ad spatium percursum tempore $\frac{T\times MS}{2\,MB}$, quo corpus M, vi centripetâ percurrit dimidium radium, quod erit $\frac{MS^2\times MB}{4\,MB^2} = \frac{MS^2}{4\,MB}$ est igitur (13) vis centripeta in circulo ad vim gravitatis ut $\frac{MS}{2}$, ad $\frac{MS^2}{4\,MB}$ sivè ut 2 MB ad MS.

103.

Scholium.

([b]) Casus corollarii sexti obtinet in corporibus cœlestibus, (ut seorsum collegerunt etiam nostrates *Wrennus*, *Hookius* & *Hallæus*) & propterea quæ spectant ad vim centripetam decrescentem in duplicatâ ratione distantiarum à centris, decrevi fusiùs in sequentibus exponere.

Porro præcedentis propositionis & corollariorum ejus beneficio, colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis est ea gravitatis. Nam si corpus in circulo terræ concentrico vi gravitatis suæ revolvatur, hæc gravitas est ipsius vis centripeta. Datur autem ex descensu gravium, & tempus revolutionis unius, & arcus dato quovis tempore descriptus, per hujus corol. IX. Et ([c]) hujusmodi propositionibus *Hugenius* in eximio suo tractatu *de Horologio Oscillatorio* vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

([d]) Demonstrari etiam possunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis describi intelligatur polygonum laterum quotcunque. Et si corpus in polygoni lateribus datâ cum velocitate

([b]) 203. Ex observationibus colligunt astronomi planetas secundarios, ut sunt Jovis vel Saturni Satellites, radiis ad suum planetam primarium ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro planetæ primarii; planetas verò primarios radiis ad solem ductis, areas describere temporibus proportionales eorumque tempora periodica esse in ratione sesquiplicatâ radiorum. Quarè casus corollarii VI. in corporibus cœlestibus obtinet, id est, planetarum velocitates sunt reciprocè in ratione subduplicatâ radiorum & vires centripetæ sunt reciprocè ut quadrata radiorum.

([c]) 204. Hugenius ad calcem tractatûs de horologio oscillatorio, de viribus centrifugis in circulo earumque cum vi gravitatis proportione 13. theoremata sine demonstratione proposuit. Eorum aliqua in corollariis propos. hujusce IV. demonstravit Newtonus, viamque aperuit cui insistendo cætera omnia facili negotio absolvi possunt, quod posteà perfecerunt multi insignes Mathematici.

([d]) 205. Duo intelligantur polygona similia & regularia circulis duobus inscripta, quorum latera numero crescant & longitudine minuantur in infinitum, & corpora duo in polygonorum lateribus æquabili velocitate ferantur, atque ad singulos angulos à circulo reflectantur. Manifestum est corporum in polygonis revolventium vires centrifugas non esse mensurandas ex solâ velocitate quâ in singulis angulis incurrunt in circulum & quâ ab illo reflectuntur, sed insuper habendam esse rationem frequentiæ impactuum aut

De Motu Corporum.

tate movendo ad ejus angulos ſingulos à circulo reflectatur; vis, quâ ſingulis reflexionibus impingit in circulum, erit ut ejus velocitas: ideoque ſumma virium in dato tempore erit ut velocitas illa, & numerus reflexionum conjunctim: hoc eſt (ſi polygonum detur ſpecie) ut longitudo dato illo tempore deſcripta, & aucta vel diminuta in ratione longitudinis ejuſdem ad circuli prædicti radium; id eſt, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad radium: ideoque, ſi polygonum lateribus infinitè diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore deſcripti applicatum ad radium. Hæc eſt vis centrifuga, quâ corpus urget circulum; & huic æqualis eſt vis contraria, quâ circulus continuo repellit corpus centrum verſus.

PRO-

aut reflexionum, ità ut ſi eadem fuerit duorum corporum revolventium celeritas, vires centrifugæ ſint ut numeri impactuum aut reflexionum tempore dato peractarum; nam quò plures ſunt tempore dato impactus & reflexiones, eò magis corpus circulum urget ut à centro recedat & viceversâ eò magis ad centrum urgetur per circuli reactionem æqualem & contrariam actioni. Quarè ſi varia fuerit corporum in polygonis revolventium celeritas æquabilis, vires centrifugæ erunt ut velocitates & numeri impactuum ſeu reflexionum tempore dato peractarum conjunctim. Eſt autem numerus reflexionum tempore dato ut numerus laterum polygoni eo tempore deſcriptorum. Porrò ſi eadem ſupponatur in utroque polygono velocitas, numeri laterum eodem tempore deſcriptorum erunt reciprocè ut latera ſingula; quo enim majora ſunt latera, eo minor eorum numerus dato tempore datâque velocitate percurritur; quarè manente eâdem in utroque polygono velocitate, numeri reflexionum ſunt inversè ut latera, ſive ob polygonorum ſimilitudinem, inversè ut radii circulorum. Si verò ponatur idem circulorum radius, & varia in utroque polygono velocitas uniformis, erunt numeri laterum in utroque polygono dato tempore percurſorum, directè ut velocitates æquabiles, ſeu, ut longitudines dato tempore deſcriptæ (5). Quarè variantibus polygoni velocitate & radio, numerus reflexionum eſt ut velocitas, ſeu ut longitudo tempore dato deſcripta applicata ad radium. Cum igitur ſuprà oſtenſum ſit vim centrifugam in circulo, aut vim centripetam ipſi æqualem & contrariam, eſſe in ratione compoſitâ velocitatis & numeri reflexionum dato tempore peractarum, liquet eandem vim centrifugam eſſe quoque ut quadratum velocitatis radio diviſum, & etiam ut quadratum longitudinis ſeu arcûs dato tempore deſcripti applicatum ad radium.

106.

PROPOSITIO V. PROBLEMA I.

Datâ quibuſcunque in locis velocitate, quâ corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus deſcribit, centrum illud invenire.

Figuram deſcriptam tangant rectæ tres *PT*, *TQV*, *VR* in punctis totidem *P*, *Q*, *R*, concurrentes in *T* & *V*. Ad tangentes erigantur perpendicula *PA*, *QB*, *RC* velocitatibus corporis in punctis illis *P*, *Q*, *R*, à quibus eriguntur, reciprocè proportionalia; id eſt, ita ut ſit *PA* ad *QB* ut velocitas in *Q* ad velocitatem in *P*, & *QB* ad *RC* ut velocitas in *R* ad velocitatem in *Q*. Per perpendiculorum terminos *A*, *B*, *C* ad angulos rectos ducantur *AD*, *DBE*, *EC* concurrentes in *D* & *E*: Et actæ *TD*, *VE* concurrent in centro quæſito *S*.

Nam perpendicula à centro *S* in tangentes *PT*, *QT* demiſſa (per corol 1. prop. 1.) ſunt reciprocè ut velocitates corporis in punctis *P* & *Q*; ideoque per conſtructionem ut perpendicula *AP*, *BQ* directè, id eſt ut perpendicula à puncto *D* in tangentes demiſſa. ([e]) Unde facile colligitur quod puncta *S*, *D*, *T* ſunt in unâ rectâ. Et ſimili argumento puncta *S*, *E*, *V* ſunt etiam in unâ rectâ; & propterea centrum *S* in concurſu rectarum *TD*, *VE* verſatur. *Q. E. D.*

([e]) 206. Puncta S, D, T, ſunt in unâ rectâ. Demiſſis enim ex centro S, in tangentes TV, TF, perpendiculis SG, SF, & ex puncto D, perpendiculis DK, DH, patet angulos FSG, HDK, lineis parallelis contentos eſſe æquales & propter laterum SF, SG, DH, DK, analogiam, triangula FGS, HKD, eſſe ſimilia, adeóque angulos SFG, DHK, æquari, ac proinde lineas FG, HK, eſſe parallelas, & triangula FTG, HTK, ſimilia, erit ergò TH : TF = HK : FG = DH : SF, & TK : TG = HK : FG = DK : SG. Quare linea TD, producta tranſibit per centrum S.

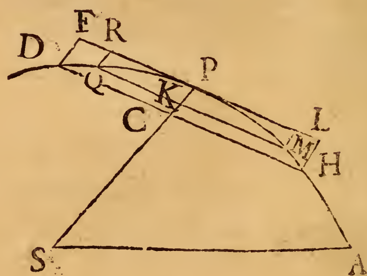
De Motu Corporum.

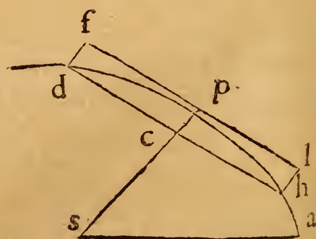
PROPOSITIO VI. THEOREMA V.

Si corpus in spatio non resistente circa centrum immobile in orbe quocunque revolvatur, & arcum quemvis jamjam nascentem tempore quam minimo describat, & sagitta arcus duci intelligatur, quæ chordam bisecet, & producta transeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcus, ut sagitta directè & tempus bis inversè.

(f) Nam sagitta dato tempore est ut vis (per corol. 4. prop. 1.) & augendo tempus in ratione quâvis, ob auctum arcum in eâdem ratione sagitta augetur in ratione illâ duplicatâ (per corol.

(f) 207. Corpora P & p, circà virium centra S & s, revolvendo, curvas A P Q, a p q, describant, sintque chordæ minimæ D H, d h, radiis vectoribus S P, s p, bifariam divisæ, & chordis illis evanescentibus, erit C H = P H, & D C = D P (per coroll. 2. Lem. VII.) adeóque P H = P D; undè puncta P & p, sunt in medio arcuum evanescentium D P H, d p h, posita. Prætereà quoniam punctis C & P, c & p, coeuntibus, puncta D & H, d & h, simul cum punctis P, p, coincidunt, ultima chordarum evanescentium D H, d h, positio congruit cum tangentium F L, f l positione, ac proindè chordæ evanescentes D H, d h, tangentibus F L, f l, æquidistant, adeóque rectæ D F, d f, radiis S P, s p, parallelæ sagittis P C, p c, evanescentibus æquales sint. His ad clariorem eorum quæ Newtonus supponit intelligentiam positis, demonstrandum est vires centripetas in P & p, esse inter se ut sunt sagittæ P C, p c, directè, & inversè ut quadrata temporum quibus describuntur arcus evanescentes H P D, h p d, aut dimidii P D, p d. . . . Dem. . . Si arcus P D, p d, æqualibus temporibus describerentur, sagittæ P C, p c, (per coroll. 1. Prop. 1.) essent ut vires centripetæ in P & p. Quòd si vires in P & p, æquales forent, tempora verò per arcus P D, p d, inæqualia, sint v. gr. sicut T ad t, dico sagittas



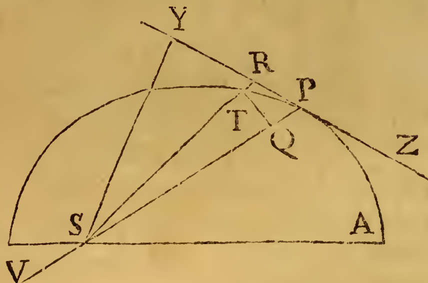


P C, p c, fore ut horum temporum quadrata directè; sive ut T^2 ad t^2. Sit enim arcus P Q, descriptus eodem tempore t quo arcus p d, positis viribus in P & p, æqualibus, spatia Q R, f d, seu P K, p c, virium illarum actione eodem tempore descripta erunt æqualia; Verùm (per cor. 11,

rol. 2 & 3, lem. XI.) ideoque eſt ut vis ſemel & tempus bis. Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, & fiet vis ut ſagitta directè & tempus bis inversè. *Q. E. D.*

(g) Idem facile demonſtratur etiam per corol. 4. lem. X.

Corol. 1. Si corpus *P* revolvendo circa centrum *S* deſcribat lineam curvam *APQ*; tangat vero recta *ZPR* curvam illam in puncto quovis *P*, & ad tangentem ab alio quovis curvæ puncto *Q* agatur *QR* diſtantiæ *SP* parallela, ac demittatur *QT* perpendicularis ad diſtantiam illam *SP*: vis centripeta erit reciprocè ut ſolidum $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$; ſi modo ſolidi illius ea ſemper ſumatur quantitas, quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta *P* & *Q*. (h) Nam *QR* æqualis eſt ſagittæ dupli arcus *QP*, in cujus medio eſt *P*, & duplum trianguli *SQP* ſive $SP \times QT$, tempori, quo arcus iſte duplus deſcribitur, proportionale eſt; ideoque pro temporis exponente ſcribi poteſt.



Co-

II. & III. Lem. XI.) $PD^2 : PQ^2 = DF : QR$ ſive fd, & ob motum per arcus evaneſcentes uniformem, ſunt arcus PD, PQ ut tempora quibus deſcribuntur hoc eſt ut T ad t, ideoque $PD^2 : PQ^2 = T^2 : t^2 = DF : QR$ ſive fd, & quia $DF = PC$ & $df = pc$ ergo $T^2 : t^2 = PC : pc$ itaque ſi vires in P & p ſint æquales erunt ſagittæ PC, pc, ut quadrata temporum quibus arcus PD, pd, deſcribuntur. Quoniam igitur manentibus temporibus ſagittæ ſunt ut vires, & manentibus viribus, ſagittæ ſunt ut temporum quadrata, neceſſum eſt ut variantibus viribus atque temporibus ſagittæ ſint ut vires & quadrata temporum conjunctim. Quamobrem ſi vires in P & p, dicantur V, v, erit $PC : pc = V \times T^2 : v \times t^2$, & dividendo antecedentes per T^2, & conſequentes per t^2, erit $V : v = \frac{PC}{T^2} : \frac{pc}{t^2}$ Q. e. D.

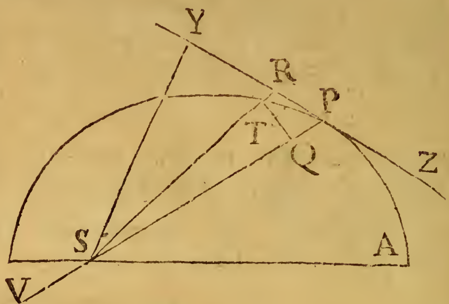
(g) 208. Idem facilè demonſtratur etiam per coroll. IV. Lem. X. quo ſtatuitur vires eſſe ut ſpatia, ipſo motus initio, deſcripta directè & quadrata temporum inversè: Cum enim FD, fd, ſeu ſagittæ PC, pc, ſint ſpatia ex virium centripetarum actione deſcripta iiſdem temporibus quibus percurruntur arcus evaneſcentes PD, pd, patet per ſuprà dictum coroll. vires centripetas eſſe inter ſe in ratione compoſitâ ex directâ ratione ſagittarum PC, pd, & reciprocâ quadratorum temporum quibus deſcribuntur arcus evaneſcentes PD, pd, ſeu HD, hd.

(h) 209. Nam QR æqualis eſt ſagittæ dupli arcus QP, in cujus medio eſt P, (207), duplum verò trianguli evaneſcentis SQP, (quod per Lem. VIII., tanquam rectilineum conſiderari poteſt) æquale eſt facto ex perpendiculo QT, in baſim

DE MOTU CORPORUM.

Corol. 2. Eodem argumento vis centripeta est reciprocè ut solidum $\frac{SYq \times QPq}{QR}$, si modo SY perpendiculum sit à centro virium in orbis tangentem PR demissum. (i) Nam rectangula $SY \times QP$ & $SP \times QT$ æquantur.

Corol. 3. Si orbis vel circulus est, vel circulum concentricè tangit, aut concentricè secat, id est angulum contactus aut sectionis cum circulo quam minimum continet; eandem habens curvaturam eundemque radium curvaturæ ad punctum P; & si PV chorda sit circuli hujus à corpore per centrum virium acta: erit vis centripeta reciprocè ut solidum $SYq \times PV$. (k) Nam PV est $\frac{QPq}{QR}$.

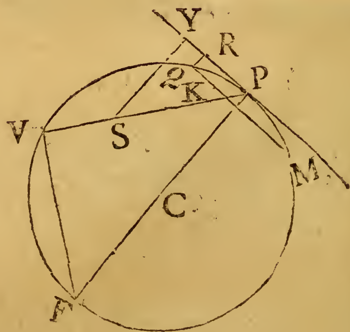


Co-

sim S P; cum igitur in eâdem curvâ A P Q, areæ sint proportionales temporibus quibus describuntur, ac proindè rectangulum Q T × S P, scribi possit loco temporis quo duplus arcus Q P, seu duplum triangulum S Q P, describitur, erit vis centripeta in P, directè ut $\frac{QR}{SP^2 \times QT^2}$ & inversè ut $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$.

(i) 210. Rectangula S Y × Q P, & S P × Q T, æquantur; nam tangens P R, cum arcu evanescente Q P, congruit (per Lem. VII) & propterea tangens illa considerari potest tanquam trianguli S P Q, basis P Q, producta, & S Y, tanquam perpendicularis ad illam basim productam, quare area dupli trianguli S P Q, est S Y × Q P = S P × Q T.

(k) 211. P V est $\frac{QP^2}{QR}$. Sit enim circulus osculator P Q V F, & ductâ chordâ Q M, quam alia chorda P V, per virium centrum S acta, bisecat in K, erit (per prop. 35. lib. 3. Elem.) $QK^2 = VK \times PK$; sed evanescente P K, $VK = VP$, & (207) $QR = PK$, ac (per coroll. 1. Lem. VII) $QK = QP$, ergò $QP^2 = PV \times QR$, & $PV = \frac{QP^2}{QR}$.



212.

Corol. 4. Iisdem positis, est vis centripeta ut velocitas bis directè, & chorda illa inversè. Nam velocitas est reciprocè ut perpendiculum SY per corol. 1. prop. 1.

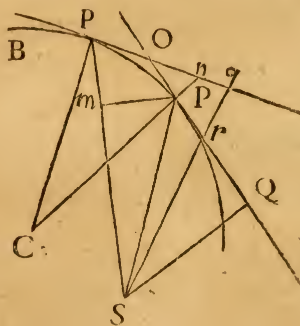
Corol. 5. Hinc si detur figura quævis curvilinea APQ, & in ea detur etiam punctum S, ad quod vis centripeta perpetuo dirigitur, inveniri potest lex vis centripetæ, quâ corpus quodvis P à cursu rectilineo perpetuo retractum in figuræ illius perimetro detinebitur, eamque revolvendo describet. Nimirum computandum est vel solidum $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ vel solidum $SYq \times PV$ huic vi reciprocè proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematis sequentibus.

P R O-

212. Iisdem positis sit P C, radius osculi $= R$, & erit vis centripeta in P, reciprocè ut solidum $\frac{SY^3 \times R}{SP}$: quoniam enim rectæ S Y, & F C P, ad tangentem P Y, perpendiculares æquidistant, erit angulus V P F $=$ P S Y; cumque sit prætereà angulus F V P, in semicirculo æqualis recto S Y P, duo triangula P V F, S Y P, similia sunt ac proinde S P : S Y $=$ P F seu 2 R : P V, adeóque $PV = \frac{SY \times 2R}{SP}$ & $SY^2 \times PV = \frac{SY^3 \times 2R}{SP}$; hoc est dividendo per numerum constantem 2, ut $\frac{SY^3 \times R}{SP}$. Hæc est expressio vis centripetæ quam Joannes Bernoullius, Abrahamus de Moivre & Guido Grandus invenerunt.

SCHOLION.

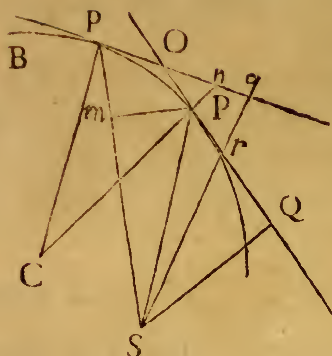
213. Newtonus generalem virium centralium theoriam in superioribus propositionibus aperuit, earumque elegantes formulas in propositionis VI[æ] corollariis tradidit. Plurimas per analysim methodumque fluxionum posteà exquisierunt alii qui primum inter Geometras locum tenebant. Hos inter eminet Varignonius qui in Commentariis Parisiensibus an. 1700, 1701, 1706, virium centralium formulas suâ varietate & universalitate eximias dedit; præclaras quoque addidit Joannes Bernoullius in iisdem Commentariis an. 1710. Duas proposuit Jacobus Hermannus in scholio ad propositionem 22[am] Lib. 1. Phoronomiæ quas ut potè multum expeditas, nobisque in posterum profuturas & ex superioribus Newtoni formulis facillimè deducendas, hic exscribemus ac demonstrabimus.



214. Itaque corpus P, circà centrum virium S revolvendo describat curvam B p P, & centro C radio C P descriptus intelligatur arcus infinitesimus P p circuli curvam B p P osculantis in P, ac centro S radio S P, arculus P m, & denique S Q, S q,

 ad

DE MOTU CORPORUM.



ad tangentes P Q, p q, perpendiculares. Duo Triangula q O r, n C p, seu P C p similia sunt, nam æquales sunt anguli r q O, C p n, sunt enim ambo recti, & anguli r O q, P C p, qui cum angulo P O p duos rectos efficiunt. Similia quoque sunt Triangula p m P, p q s, seu P Q s, ob Angulos ad q & m rectos & angulum m p P communem dum coeunt puncta P, p, quare p P : r q = P C : O q, seu p q, seu P Q; & m p : P p = P Q : S P unde ex æquo m p : r q = P C ad S P & P C $= \frac{SP \times mp}{rq}$. Porrò (212) vis centripeta in P est ut $\frac{SP}{PC \times SQ^3}$; ergò si substituatur valor ipsius P C, modò inventus eris vis ut $\frac{rq}{SQ^3 \times mp}$, hoc est, si vis centripeta sit $= v$, S P $= z$, ac proindè m p $= dz$, S Q $= p$, adeóque r q $= dp$, erit $v = \frac{dp}{p^3 dz}$, & radius osculi CP $= r = \frac{z\,dz}{dp}$, quas duas formulas tradunt Keillius in suâ de legibus virium centripetarum epistolâ ad Halleium directâ & Hermannus loco suprà citato.

215. Sit P p $= ds$, & P m $= dy$, & ob triangula similia p P m, P S Q, erit $ds : dy = z : p$, adeóque $p = \frac{z\,dy}{ds}$, & sumptis utrinque fluxionibus nullâ constante usurpatâ, invenietur (163) $dp = \frac{dz\,dy\,ds + z\,ds\,ddy - z\,dy\,dds}{ds^2}$; quarè $v = \frac{dp}{p^3 dz} = \frac{dp\,ds^3}{z^3 dy^3 dz}$ ob p, $= \frac{z\,dy}{ds}$ & $p^3 = \frac{z^3 dy^3}{ds^3}$, adeòque $v = \frac{dz\,dy\,ds^2 + z\,ds^2\,ddy - z\,dy\,ds\,dds}{z^3 dy^3 dz}$, quæ formula nonnisi nominibus differt à formulis quas Varignonius dedit in Commentariis Parisiensibus, 1701. 1706.

216. Hinc radiorum osculi formula admodum generalis & expedita facile reperitur. Nam invenimus (214) $r = \frac{z\,dz}{dp}$ $= (215) \frac{z\,dz\,ds^2}{dz\,dy\,ds + z\,ds\,ddy - z\,dy\,ddz}$ cum in hâc formulâ nulla fluxio constans assumpta sit, in alias infinitas transformari potest, sumptis pro arbitrio constantibus. Si centrum S, in infinitum abeat, ut rectæ S P, evadant parallelæ, erit $dz\,dy\,ds$, quantitas infinitè parva respectu $z\,ds\,ddy$ & $z\,dy\,dds$; nam cum z finita est $dz\,dy\,ds$, est ejusdem generis cum $z\,ds\,ddy$; ubi igitur z, evadit infinita $z\,ds\,ddy$, fit etiam infinita respectu $dz\,dy\,ds$; undè si in formulâ radii osculatoris modò inventâ deleatru membrum $dz\,dy\,ds$, habebitur $r = \frac{ds^2 dz}{ds\,ddy - dy\,dds}$ formula generalis radii osculi in curvis quarum ordinatæ S P parallelæ axique perpendiculares sunt, & in quibus dz, sunt elementa abscissarum.

PRO-

PROPOSITIO VII. PROBLEMA II.

Gyretur corpus in circumferentiâ circuli, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.

Esto circuli circumferentia $VQPA$; punctum datum, ad quod vis ceu ad centrum suum tendit, S; corpus in circumferentiâ latum P; locus proximus, in quem movebitur Q; & circuli tangens ad locum priorem PRZ. Per punctum S ducatur chorda PV; & actâ circuli diametro VA, jungatur AP; & ad SP demittatur perpendiculum QT, quod productum occurrat tangenti PR in Z, ac denique per punctum Q agatur LR, quæ ipsi SP parallella sit, & occurrat tum circulo in L, tum tangenti PZ in R. Et ([1]) ob similia triangula ZQR, ZTP, VPA; erit RP *quad.* hoc est QRL ad QT *quad.* ut AV *quad.* ad PV *quad.* Ideoque $\frac{QRL \times PV \; quad.}{AV \; quad.}$ æquatur QT *quad.* Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP \; quad.}{QR}$, & punctis P & Q coeuntibus scribatur PV pro RL. Sic fiet $\frac{SP \; quad. \times PV \; cub.}{AV \; quad.}$ æquale $\frac{SP \; quad \times QT \; quad.}{QR}$. Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta est reciprocè ut $\frac{SP \, q \times PV \; cub.}{AV \; quad.}$; id est (ob datum AV *quad.*) reciprocè ut quadratum distantiæ seu altitudinis SP & cubus chordæ PV conjunctim. *Q E I.*

Idem

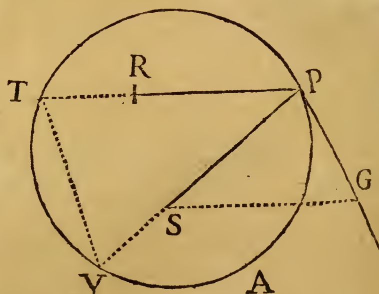
([1]) 217. Triangula Z Q R, Z T P, similia sunt ob Q R, parallelam T P, per constructionem, & triangula Z T P, V P A, sunt etiam similia ob angulos rectos Z T P, V P A, & æquales V P Z, V A P, quorum communis est mensura dimidius arcus V L, Q P; quarè R P : Q T = Z P : Z T = A V : P V. Est autem RP^2 = Q R × R L, per prop. 36. lib. 3. Elem.

Idem aliter.

Ad tangentem PR productam demittatur perpendiculum SY: ob similia triangula SYP, VPA; erit AV ad PV ut SP ad SY: ideoque $\frac{SP \times PV}{AV}$ æquale SY, & $\frac{SP\ quad. \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$ æquale $SY\ quad. \times PV$. Et propterea (per. corol. 3. & 5. prop. VI.) vis centripeta est reciprocè ut $\frac{SPq \times PV\ cub.}{AVq}$, hoc est, ob datam AV reciprocè ut $SPq \times PV\ cub.$ *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc si punctum datum S, ad quod vis centripeta semper tendit, locetur in circumferentiâ hujus circuli, puta ad V; erit vis centripeta reciprocè ut quadrato-cubus altitudinis SP.

Corol. 2. Vis, quâ corpus P in circulo $APTV$ circum virium centrum S revolvitur, est ad vim, qua corpus idem P in eodem circulo & eodem tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi potest, ut $RP\ quad. \times SP$ ad cubum rectæ SG, quæ à primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & distantiæ corporis à secundo virium centro parallela est.



Nam

218. Idem aliter, cum sit $\frac{SP \times PV}{AV} = SY$, erit $\frac{SP^3 \times PV^3}{AV^3} = SY^3$ & $\frac{SP^3 \times PV^3 \times R}{AV^3 \times SP} = \frac{SP^2 \times PV^3 \times R}{AV^3} = \frac{SY^3 \times R}{SP}$ & propterea (212) vis centripeta est reciprocè ut $\frac{SP^2 \times PV^3 \times R}{AV^3}$ seu ob $R = \frac{1}{2} AV$, & AV, constantem erit reciprocè ut $SP^2 \times PV^3$.

(m) Nam per constructionem hujus propositionis vis prior est ad vim posteriorem ut $RPq \times PT\,cub.$ ad $SPq \times PV\,cub.$ id est, ut $SP \times RPq$ ad $\frac{SP\,cub. \times PV\,cub.}{PT\,cub.}$, sive ([n] ob similia triangula PSG, TPV) ad $SG\,cub.$

Corol. 3. Vis, quâ corpus P in orbe quocunque circum virium centrum S revolvitur, est ad vim, quâ corpus idem P in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi potest, ut $SP \times RPq$, contentum utique sub distantiâ corporis à primo virium centro S & quadrato distantiæ ejus à secundo virium centro R, ad cubum rectæ SG, quæ à primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & corporis à secundo virium centro distantiæ RP parallela est. (o) Nam vires in hoc orbe ad ejus punctum quodvis P eædem sunt ac in circulo ejusdem curvaturæ.

PRO-

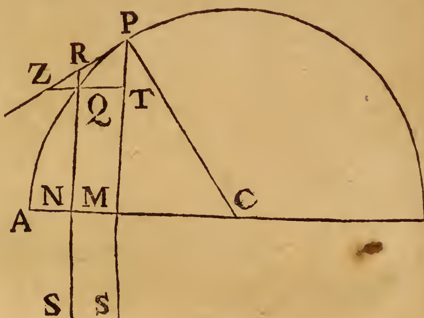
(m) 219. *Nam per constructionem hujus propos. vis prior est ad vim posteriorem,* (hoc est vis circà S, ad vim circà R) *ut* $RP^2 \times PT^3$ *ad* $SP^2 \times PV^3$. Scilicet in demonstratione hujus propositionis (vid. fig. Prop.) inventum erat $\frac{QRL \times PV^2}{AV^2} = QT^2$, & punctis P & Q coëuntibus scribatur PV pro RL, & uterque terminus multiplicetur per $SP^2 \times AV^2$ erit $QR \times PV^3 \times SP^2 = QT^2 \times SP^2 \times AV^2$, est verò $QT \times SP$ area cujus arcus est QP, & QR, est ejus sagitta, itaque sagitta per cubum chordæ, & quadratum distantiæ multiplicata, æqualis est quadrato areæ cui respondet, multiplicato per quadratum Diametri. Quod utique verum erit sive agatur de vi ad S, sive de vi ad R tendente (vid. fig. Cor.) Quod si sumi intelligantur arcus æquali tempore descripti circa utramque vim, sagittæ eorum arcuum exprimunt rationem earum virium centripetarum; & areæ illis temporibus æqualibus circa utramque vim descriptæ æquales erunt, nam per Prop. 1. tempus Periodicum est ad integram superficiem descriptam, ut tempus quodvis ad aream ipsi respondentem, ut ergo eodem tempore Periodico idem circulus circa utramque vim absolvitur, quæriturque area eidem tempori correspondens, illa area eadem erit utriusque vis respectu, ideoque productum quadrati areæ per quadratum Diametri idem erit tam respectu vis S, quam respectu vis R, ergo sagitta pertinens ad vim S multiplicata per cubum ejus chordæ PV, & quadratum ejus distantiæ SP æqualis erit sagittæ pertinenti ad vim R, multiplicatæ per cubum ejus chordæ PT & per quadratum ejus distantiæ RP, ea enim facta, quadrato areæ in quadratum Diametri ducto æqualia sunt, ideo Sagittæ illæ, sive vires in S & R erunt reciprocè ut illæ quantitates quæ eas multiplicant, hoc est Sagitta in S est ad Sagittam in R sicut $RP^2 \times PT^3 : SP^2 \times PV^3$. Q. E. D.

(n) 220. Triangula PSG, TPV, similia sunt, ob angulos PSG, SPT æquales quia sunt alterni inter parallelas SG, TP, & angulos VPG, VTP, æquales per 32. lib. 3. Elem. undè $TP : PV = SP : SG = \frac{SP \times PV}{TP}$ & $SG^3 = \frac{SP^3 \times PV^3}{PT^3}$.

(o) 221. Nam vires in hoc orbe ad ejus punctum quodvis P, eædem sunt ac in circulo orbitam osculante in P, vis enim illa in P, est semper eadem ac si corpus in arcu evanescente circuli osculatoris moveretur, cum arcus ille circuli pro arcu orbitæ evanescente usurpari possit.

PROPOSITIO VIII. PROBLEMA III.

Moveatur corpus in ſemicirculo PQA: *ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum* S, *ut lineæ omnes* PS, RS *ad id ductæ, pro parallelis haberi poſſint.*



A ſemicirculi centro *C* agatur ſemidiameter *CA* parallelas iſtas perpendiculariter ſecans in *M* & *N*, & jungatur *CP*. Ob (p) ſimilia triangula *CPM*, *PZT* & *RZQ* eſt *CPq* ad *PMq* ut *PRq* ad *QTq*, & ex naturâ circuli *PRq* æquale eſt rectangulo $QR \times \overline{RN + QN}$, ſive coeuntibus punctis *P* & *Q* rectangulo $QR \times 2PM$. Ergo eſt *CPq* ad *PMquad.* ut $QR \times 2PM$ ad *QT quad.* ideoque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2\ PM\ cub.}{CP\ quad.}$, & $\frac{QT\ quad. \times SP\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2\ PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$ Eſt ergo (per corollarium 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$, hoc eſt (neglectâ ratione determinatâ $\frac{2\ SP\ quad.}{CP\ quad.}$) reciprocè ut *PM cub.* *Q. E. I.*

(q) Idem facilè colligitur etiam ex propoſitione præcedente.

Scho-

(p) 222. Similia ſunt triangula CPM, PZT, anguli enim ad M & T recti æquales ſunt, & quoniam anguli $ZPT + MPC$, & anguli $MPC + MCP$, recto æquantur, erit etiam $MCP = ZPT$; & $PR^2 = QR \times \overline{RN + QN}$ (per Prop. 36. lib. 3. Elem.) Cum autem CP ſit radius circuli & SP ſit linea infinita adeòque $SM = SP$, erunt CP, SP, $\frac{2SP^2}{CP^2}$, quantitates conſtantes.

(q) 223. *Idem facilè colligitur ex propoſitione præcedente* quâ conſtat vim centripetam eſſe reciprocè ut $SP^2 \times PV^3$. Nam centro virium S in infinitum abeunte, omnes SP ſunt æquales adeóque conſtantes, & propterea vis reciprocè ut PV^3.

224.

Scholium.

(r) Et argumento haud multum dissimili corpus invenietur moveri in ellipsi, vel etiam in hyperbolâ vel parabolâ, vi centripetâ, quæ sit reciprocè ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

(r) 224. Ut multa de sectionibus Conicis mox erunt dicenda, visum est eas præmittere ex Conicis propositiones quæ sæpius occurrent, ne memoriæ vitio aut fastidio ad alios Autores recurrendi demonstrationum vis Lectores fugiat.

Def. 1a. Si Planum quodpiam secet conum, sed per ejus Verticem non transeat, intersectio Coni & istius Plani dicitur *Sectio Conica.*

2a. Si ducatur planum per Verticem Coni, parallelum plano secanti, conum ipsum vel secabit, vel tanget, vel totum erit extra eum; Hinc distinguuntur sectionum Conicarum species, dicentur primo casu *Hyperbolæ*, 2°. *Parabolæ*, 3°. *Ellipses.*

3a. Si sint duo Coni similes sibi per Verticem oppositi, illud planum verticale quod unum è Conis secat, alterum etiam secabit, ideo, planum sectionis ipsi Parallelum utrumque etiam Conum secabit, & ex utriusque Coni sectione formabuntur in eo Plano duæ *Hyperbolæ oppositæ.*

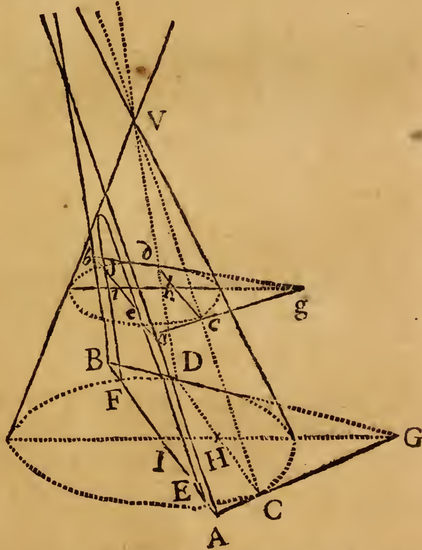
4a. Si secundùm lineas rectas in quibus planum per Verticem Coni ductum secat Coni superficiem, applicentur duo plana Conum tangentia, eorum cum plano Hyperbolarum intersectiones, dicuntur Hyperbolarum *Asymptoti*; nam ut ea plana superficiem Coni jam tetigerunt, nullibi eam superficiem iterum attingent, non ergo attingent Hyperbolam quæ terminatur in superficie Coni & quæ est in plano lineis quas tangunt parallelo.

Lemma I. Sit linea ab unâ Asymptoto ad alteram ducta, quæ per Hyperbolam secetur, partes ejus lineæ inter Hyperbolam & Asymptotum utrinque contentæ sunt æquales.

Et si lineæ, inter se Parallelæ, ab unâ Asymptoto ad alteram ducantur, æqualia erunt facta partium utriusque Parallelæ per Hyperbolam sectæ.

Si verò lineâ ab unâ Hyperbolâ ad oppositam ductâ per Asymptotos secetur, partes ejus lineæ inter Hyperbolam & Asymptotum utrinque contentæ sunt æquales.

Ex si lineæ, inter se Parallelæ, ab unâ Hyperbolâ ad oppositam ducantur, æqualia erunt facta partium utriusque Parallelæ per Asymptotum sectæ (Apoll. lib. 2. Prop. 8. & 16.)



Demonst. Primum talis sit linea AB ut planum per eam lineam duci possit basi coni parallelum, cujus sectio cum cono erit circulus CEFD, ducatur planum VCD per verticem Coni VCD plano Hyperbolarum parallelum & secundum lineas VC, VD applicentur plana Conum tangentia, in quibus erunt Hyperbolæ Asymptoti & Tangentes circuli

DE MOTU CORPORUM.

CEFD in punctis C & D: concurrant illæ Tangentes in G; ex G per centrum circuli ducatur linea GHI quæ erit perpendicularis in chordam CD eamque bifariam secabit, ut etiam ejus Parallelam AB, & chordam EF (per 3. 3. Elem.) est ergo $IA = IB$, & $IE = IF$ unde $IA - IE$ sive $AE = IB - IF$ sive BF & (per 36. 3. Elem.) $\overline{CA}^2 = AF \times AE = AF \times BF$.

Sit verò linea a b huic Parallela, sive in eâdem sive in oppositâ sectione; simili ratiocinio ostendetur esse $ae = bf$; & $ca^2 = af \times ae = af \times bf$. Sed figura ACac est Parallelogramma, est enim tota in plano Tangente Conum, & terminatur per sectiones planorum Parallelorum, nam Cc & Aa sunt sectiones plani Verticalis & plani Hyperbolarum ipsi Paralleli, & CA & ca sunt sectiones planorum basi coni Parallelorum; est ergo $CA = ca$ & $\overline{CA}^2 = ca^2$, ac per consequens $AF \times BF = af \times bf$.

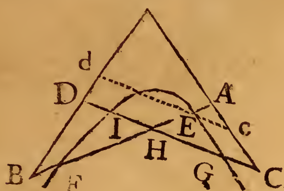
Casus 2dus. Quod si linea AB utcumque sit ducta inter Asymptotos, & Hyperbolam secet in E & F erit $AE = BF$; nam per E & F ducantur lineæ MEN, mFn, tales ut plana per eas ducta sint basi Coni parallela Triangula AEM & AFm, BFn & BEN erunt similia propter Parallelas, est ergo $AE : AF = EM : Fm$ & $BE : BF = NE : nF$; est ergo per compositionem rationis.. $AE \times BE : AF \times BF = EM \times NE : Fm \times nF$, sed per demonstrationem primi casus est $EM \times NE = Fm \times nF$, ergo $AE \times BE = AF \times BF$, unde (per Prop. 16. 6. Elem.) $AF : AE = BE : BF$ & dividendo $AF - AE$ sive $EF : AE = BE - BF$ sive $EF : BF$, cum ergo sit $EF : AE = EF : BF$ est $AE = BF$.

Ducatur verò linea quævis a b, priori AB parallela, & per punctum e ducatur linea PeR lineæ MEN parallela, similia erunt Triangula AEM & aeP, BEN & beR ob parallelas est ergo $AE : ae = EM : eP$ & $BE : be = EN : eR$, est ergo per compositionem rationis... $AE \times BE : ae \times be = EM \times EN : EP \times eR$, sed per casum primum est $EM \times EN = eP \times eR$, ergo $AE \times BE = ae \times be$.

Casus 3us. Si lineæ de quibus agitur, sed

ab unâ Hyperbolâ ad ejus oppositam ducerentur & per Asymptotas secarentur, eadem prorsus foret demonstratio ac in 2°. casu, nisi quod in primâ demonstrationis parte, componendo concluderetur, non dividendo.

Lemma II. Sint duæ lineæ in Hyperbolarum plano ductæ quæ in quodam puncto sibi occurrant; facta partium singulæ lineæ sumptarum à puncto concursus usque ad punctum Hyperbolæ, sunt inter se sicut facta partium sumptarum ab Hyperbolâ usque ad utramque Asymptotum.



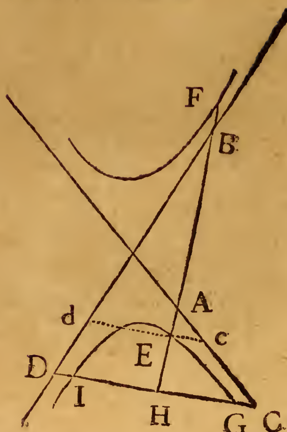
Lineæ AB, DC sibi mutuo occurrant in H, est $EH \times FH : GH \times IH = AE \times BE : CG \times DG$.

Demonst... Ducatur per punctum E Hyperbolæ, in quo secatur per lineam AB productam si necesse sit, linea cEd, alteri lineæ datæ CHD Parallela: similia erunt Triangula AHC & AEc, BHD & BED: unde habebuntur hæ proportiones

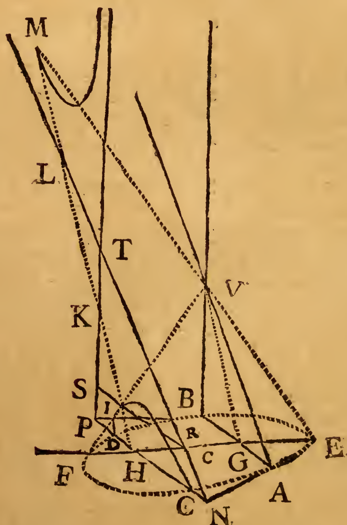
AH sive $AE + EH : AE = HC$ sive $CG + GH : cE$

& BH sive $BF + FH : BE = HD$ sive $DI + IH : dE$, & per compositionem rationis $AE \times BF + AE \times FH + EH \times BF$ (sive AE per Lem. I.) $+ EH \times FH : AE \times BE = CG \times DI + CG \times IH + GH \times DI$ (sive CG per Lem. I.) $+ GH \times IH : cE \times dE$ (sive $CG \times DG$ per Lem. I.) est verò $BF + FH + HE = BE$, & $DI + IH + HG = DG$ ergo est $AE \times BE + EH \times FH : AE \times BE = DG \times CG + GH \times IH : CG \times DG$. & dividendo: $EH \times FH : AE \times BE = GH \times IH : CG \times DG$ ergo alternando $EH \times FH : GH \times JH = AE \times BE : CG \times DG$.

Eadem est demonstratio sive lineæ sint in eadem Hyperbola, sive, una sit in unâ Hyperbolâ altera inter oppositas, sive ambæ inter oppositas ducantur. Ergo facta partium &c.



Lemma III. Sint duæ Parallelæ in sectione Conicâ ductæ quæ secentur per lineam quamvis, facta partium uniuscujusque Parallelæ sumptarum à curvâ ad punctum ejus intersectionis, sunt inter se ut facta partium lineæ secantis sumptarum à curvâ ad punctum intersectionis cum Parallelâ.



DE MOTU CORPORUM.

Sint A B, C D, parallelæ sectæ per lineam E F in punctis G & H, est $AG \times GB : CH \times HD = EG \times GE : EH \times HF$.

Sit V, vertex coni, ex eo ducantur V E, V F ad extremitates lineæ E F; ducatur in B A, planum V A B, per verticem coni transiens & in C D planum Hyperbolarum ipsi Parallelum, in plano V B A ducatur VG, & in H, H M ipsi VG parallela quæ jacebit in plano Hyperbolarum: erunt Triangula V G E & M H E, V G F & I H F ergo similia unde habentur hæ proportiones

$$VG : MH = EG : EH$$

& $VG : IH = FG, FH$, & per compositionem rationis

$$\overline{VG}^2 : MH \times IH = EG \times GF : EH \times FH.$$

Lineæ V E, V F ductæ per verticem coni & punctum in ejus superficie sumptum sunt semper in superficie coni, ergo earum intersectiones I & M cum lineâ H M in plano Hyperbolarum ductâ sunt in ipsâ curvâ Hyperbolicâ cujus Asymptoti sint T N, T P parallelæ lineis V A, V B; per punctum I in quo linea H M occurrit Hyperbolæ ducatur S I R lineis DC & AB parallela, similia erunt Triangula V A G & L R I, V B G & K S I lineis enim parallelis terminantur, erit ergo

$$VG : AG = LI : RI$$

& $VG : GB = KI : SI$ & per compositionem rationis

$\overline{VG}^2 : AG \times GB = LI \times KI : RI \times SI$ ($= PD \times DN$ per Lem. I.) Sed per Lemma II. est

$LI \times KI : PD \times DN = MH \times IH : CH \times DH$ est ergo

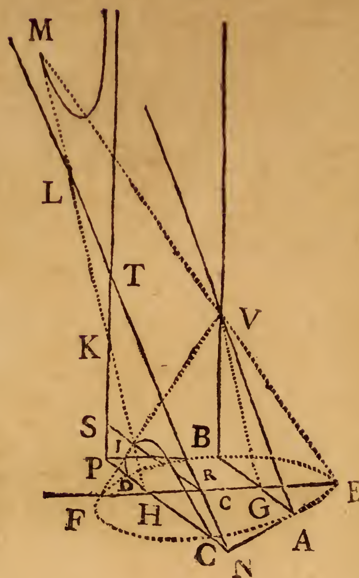
$\overline{VG}^2 : AG \times GB = MH \times IH : CH \times DH$ & alternando

$\overline{VG}^2 : MH \times IH = AG \times GB : CH \times DH.$

Erat autem $\overline{VG}^2 : MH \times IH = EG \times FG : EH \times FH$, ex primâ demonstrationis parte, est ergo $AG \times GB : CH \times DH = EG \times FG : EH \times FH$. Q. E. D.

Cas. 2. Si punctum F infinitè distaret à puncto E, linea F G æqualis censenda foret lineæ F H, ideoque $EG \times FG : EH \times FH = EG : EH = AG \times GB : CH \times DH$, hoc est ipsæ partes secantis forent inter se sicut facta partium parallelarum quas secat.

Cas. 3. Si punctum F non foret in eâdem sectione in qua est punctum E sed in opposita, eadem foret demonstratio nisi



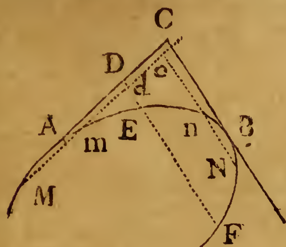
quod puncta M & I, in eadem Hyperbola forent.

Cas. 4. Eadem etiam fiet demonstratio sive puncta G & H sint intra extremitates Parallelarum A B, C D, aut intra vertices E & F lineæ secantis, sive sint extra.

Corol. 1. Sumatur medium lineæ secantis puncta E & F sitque c, si intersectio ejus lineæ per Parallelam sit intra vertices, erit factum partium ejus æquale quadrato ejus dimidii dempto quadrato ejus portionis à Centro ad intersectionem sumptæ, v. gr. erit $EG \times GF = \overline{cE}^2 - \overline{cG}^2$ ut liquet per 5. 2. Elem. Si intersectio ejus lineæ sit extra vertices, erit factum ejus partium æquale quadrato portionis ejus à Centro ad intersectionem sumptæ dempto quadrato dimidiæ lineæ, v. gr. foret $EG \times GF = \overline{cG}^2 - \overline{cE}^2$, ut liquet per 6. 2. Elem.

Corollar. 2. Ex puncto quovis ductæ sint duæ Tangentes ad sectionem Conicam, & ex quodam puncto unius ex illis Tangentibus, ducatur linea trans sectionem Conicam alteri Tangenti parallela. Quadratum prioris Tangentis est ad quadratum alterius Tangentis ut quadratum partis

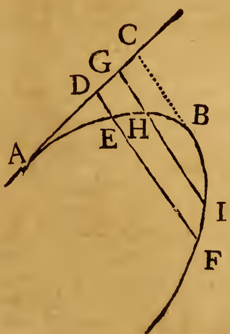
tis in primâ Tangente assumptæ ad factum lineæ Parallelæ alteri tangenti per ejus Partem inter Tangentem & curvam comprehensam (Apol. lib. 3. Prop. 16.)



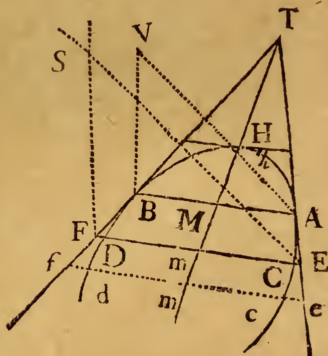
Sint A C, C B Tangentes sectionis Conicæ A B F, ex D ducatur D E F parallela C B, erit $\overline{AC}^2 : \overline{CB}^2 = \overline{AD}^2 : DF \times DE$.

Ducatur M m c parallela Tangenti A B, & N n c parallela Tangenti C B, & M m c lineam D E F secet in d, erit per Lem. sup. $cn \times cN : dF \times dE = Mc \times mc : Md \times md$, est enim M c linea secans parallelas c N, d F; evanescant arcus M m, & N n, coincident lineæ M m c cum A C & N n c cum B C, eritque $cn = CN = CB$, $dF = DF$, $dE = DE$, $Mc = mc = AC$, $Md = md = AD$, ergo erit $\overline{CB}^2 : DF \times DE = \overline{AC}^2 : \overline{AD}^2$ & permutando & alternando $\overline{AC}^2 : \overline{CB}^2 = \overline{AD}^2 : DF \times DE$. Q. D. E.

Coroll. 3. Si ex variis punctis Tangentis ducantur lineæ Parallelæ trans sectionem Conicam, Quadrata partium Tangentis sunt inter se ut facta Parallelarum per earum partem inter Tangentem & curvam interceptam. Sit A C Tangens ex ejus punctis D & G ducantur Parallelæ D E F, G H I, erit $\overline{AD}^2 : \overline{AG}^2 = DF \times DE : GI \times GH$,



nam supponatur in B ea Tangens quæ his lineis sit Parallela secetque priorem in C erit per Corollarium superius $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 : DF \times DE = \overline{AG}^2 : GI \times GH$ ergo alternando, $\overline{AD}^2 : \overline{AG}^2 = DF \times DE : GI \times GH$. Q. D. E.



Lemma IV. Dicatur sectionis Conicæ Diameter ea linea quæ Parallelas in curva terminatas bifariam dividit: sit ejus Diametri vertex punctum in quo curvæ occurrit; illæ Parallelæ quas bisecat ipsi ordinatim applicatæ dicantur, & earum alterutra pars dicatur ordinata illius Diametri; portio Diametri ab ejus vertice ad Ordinatam usque, dicetur ejus abscissa: & denique ea Diameter quæ Parallelas bisecando simul est illis perpendicularis dicatur Axis.

His positis 1°. Linea quæ duas Parallelas bisecabit erit Diameter curvæ: id est cæteras omnes lineas hisce Parallelas etiam bisecabit. (Apol. lib. 2. Prop. 28.)

2°. Linea in Vertice Diametri ducta & Ordinatis Parallela, erit Tangens curvæ in eo Vertice (Apol. Lib. 1. Prop. 17.) & vice versâ ea linea erit *Diameter* quæ bisecabit lineam quæ erit Parallela Tangenti per ejus verticem ductæ: (Apol. Lib. 2. Prop. 7.)

Denique; Quadrata ordinatarum erunt inter se ut facta partium quas secant in Diametro.

Demonst. In extremitatibus lineæ A B ducantur Tangentes quæ concurrant in T, per

per medium M, lineæ A B ducatur T M m sitque linea D C parallela lineæ B A hinc inde producta donec Tangentibus T B, TA productis si necesse sit in E & F occurrat: Per A B & Verticem coni V ducatur planum V A B, & per E F planum ipsi Parallelum quod Hyperbolam in Cono formabit, erit ergo D C linea ad Hyperbolam pertinens, & propter Tangentes B F A E, puncta F & E ad Asymptotos pertinebunt, ergo (per Lem. I.) est $EC = FD$, sed ob parallelas A B, E F & quia bifariam dividitur A B in M per lineam T M m erit $mE = mF$, itaque $mE - EC$ (sive mC) $= mF - FD$ (sive mD) ergo linea T M, lineam CD lineæ A B parallelam bifariam dividit, idem verò de quâvis linea c d parallelâ lineæ AB demonstrabitur ergo linea M m per medium linearum A B, C D, transiens omnes earum Parallelas in curva terminatas bifariam dividit. Est ergo Diameter curvæ.

2°. Linea per Verticem Diametri H ducta, & ordinatis Parallela est tangens curvæ, pone enim illam lineam sectioni iterum occurrere in h, linea T M quæ dividit bifariam omnes Parallelas lineæ A B in curva terminatas, deberet bifariam dividere lineam H h, sed illud absurdum, siquidem illam attingit in ejus extremo H, ergo linea per verticem Diametri ducta ordinatis parallela curvam iterum non attingit, est ergo Tangens in puncto H. Vice versâ sit Tangens lineæ A B parallela, & ex medio M lineæ A B per H punctum contactus ducatur linea, ea erit Diameter; si enim Diameter quæ transit per M ad h non verò ad H pertingeret, ducatur per h linea Parallela lineæ A B, ea erit Tangens in h; eritque Parallela Tangenti in H, sed illud est absurdum, ergo linea M H est Diameter.

Denique cum Diameter secet Parallelas sunt (juxta Lem. III.) facta partium Parallelarum, ut facta partium quas secant in Diametro, sed partes singulæ Parallelæ à Diametro sectæ sunt utrinque æquales & ordinatæ dicuntur, ergo quadrata Ordinatarum sunt ut facta partium quas secant in Diametro.

Lemma V. E quovis puncto Sectionis Conicæ ducatur ordinata ad Diametrum, & Tangens quæ illi Diametro occurrat in quodam puncto: distantiæ hujus puncti ab utroque vertice Diametri erunt inter se sicut abscissæ ab utroque vertice Diametri sumptæ (Apollon. l. 1. prop. 34.)

E puncto P curvæ ducatur ordinata PO ad Diametrum A D, & in eâ sumatur punctum M tale ut sit $AM : DM = AO : DO$, ducaturque linea P M, illa in nullo alio puncto F curvæ occurret, hoc est, erit Tangens in P.

Demonst... Ex eo puncto supposito F ducatur ordinata F H, erit $MO : MH = PO : PH$ & $\overline{MO}^2 : \overline{MH}^2 = \overline{PO}^2 : \overline{FH}^2$, sed si F pertineat ad curvam est (per Lem. IV.) $AO \times OD : AH \times HD = \overline{PO}^2 : \overline{FH}^2$ ergo $AO \times OD : AH \times HD = \overline{MO}^2 : \overline{MH}^2$ & alternando $AO \times OD : \overline{MO}^2 = AH \times HD : \overline{MH}^2$. Ducantur autem per A & D lineæ A X D K parallelæ P M quæ secent P O ejusque productionem in E & K, & per P & H ducatur linea quæ parallelas A X & D K in I & S, secet; similia erunt Triangula AOE, MOP, DOK ob parallelas, unde habentur hæ proportiones $AO : MO = AE : MP$.

& $OD : MO = DK : MP$ & per compositionem rationis erit

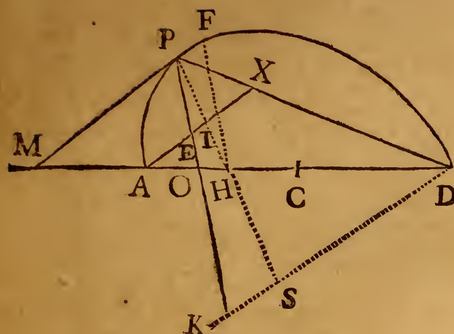
$AO \times OD : \overline{MO}^2 = AE \times DK : \overline{MP}^2$.

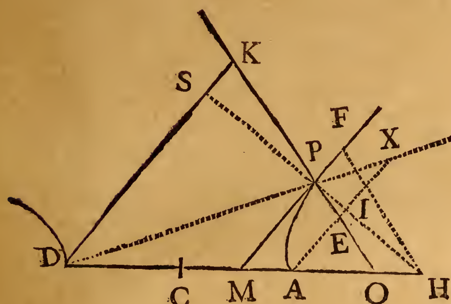
Pariter similia sunt Triangula AHI, MHP, DHS, unde est: $AH : MH = AI : MP$ & $DH : MH = DS : MP$.

& per compositionem rationis erit

$AH \times DH : \overline{MH}^2 = AI \times DS : \overline{MP}^2$.

Sed si F pertinet ad curvam invenitur $AO \times OD : \overline{MO}^2 = AH \times DH : \overline{MH}^2$, foret ergo $AE \times DK : \overline{MP}^2 = AI \times DS : \overline{MP}^2$, sive





five $AE \times DK = AI \times DS$ & $AE : AI = DS : DK$, quod abfurdum effe in datâ Hypothefi fic evincitur.

Ex P ad Diametri extremitatem D, ducatur P D, quæ lineam A E I (producta fi neceffe fit) fecet in X; ob parallelas P M, X A eft $AM : DM = PX : DP$ & $PX : DP = XE : DK$, & ob Triangula fimilia A O E, D O K eft $AO : DO = AE : DK$, & quia per Hypothefim eft $AM : DM = AO : DO$, erit $XE : DK = AE : DK$ ideoque in datâ Hypothefi $XE = AE$ & cum fit $XI : XE = DS : DK$ ob parallelas, erit $XI : AE = DS : DK$ erat verò ex fuppofitione quod F eft in curva, $AE : AI = DS : DK$, foret ergo $XI : AE = AE : AI$, & $AE^2 = XI \times AI$. Sed AE^2 quadratum dimidii lineæ A X eft femper majus Rectangulo ejus partium $XI \times AI$ (per 5. 2. Elem.), abfurdum ergo eft ea effe æqualia quod tamen fequitur fuppofito punctum F ad curvam pertinere, ideoque, M P curvam tangit in P. Sed ad idem cujufvis curvæ punctum duas Tangentes rectas duci non poffe ex naturâ curvarum liquet, ergo Tangens in P, ita occurrit Diametro ut fit $AM : DM = AO, DO$. Q. E. D.

Cor. 1. Si Diameter A D fit infinita hoc eft punctum D ad infinitum removeatur, D M & D O æqualia cenfenda funt, cum ergo fit $DM : AM = DO : AO$ erit $AM = AO$; five diftantia puncti concurfus Tangentis cum Diametro, ab ejus vertice, æqualis erit abfciffæ ab eodem vertice fumptæ (Ap. lib. 1. 35.)

Cor. 2. Si Diameter A P fit terminata, ejufque medium fit C fitque P O ordinata fiatque $CM, CA = CA : CO$, erit P M tangens in puncto O; Etenim fumendo fummam & differentiam terminorum harum rationum eft,

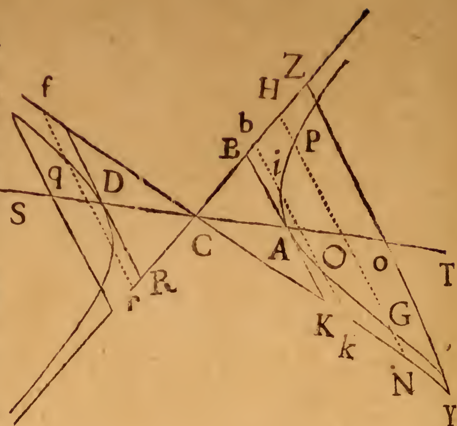
$$CM + CA : CA + CO = CM - CA : CA - CO$$

five in primâ ratione ponendo DC pro CA, eft $DM : DO = AM : AO$ aut alternando $DM : AM = DO : AO$, ergo (per Lemma) MP erit Tangens in P, eft ergo femidiameter media proportionalis inter abfciffam à centro fumptam, & partem Diametri à centro ad concurfum Tangentis comprehenfam. (Apol. Lib. 1. 37.)

Cor. 3. In Puncto P Sectionis Conicæ ducatur Tangens, quæ fecet Diametrum in M, & ducatur ordinata P O quæ fecet Diametrum in O factum partium Diametri $AO \times DO$ eft æquale facto $CO \times OM$ ex partibus lineæ à Centro ad Tangentem fumptæ & per ordinatam in O fectæ. Cum enim fit $CM : CA = CA : CO$ tollendo terminos fecundæ rationis à terminis primæ erit $MA : AO = CA$ (five DC) : CO, unde componendo erit $MO : AO = DO : CO$, ideoque $AO \times DO = CO \times MO$: & (per 5. vel 6. 2. Elem.) prout O eft inter A & D vel ultra, erit $CO \times MO = AC^2 - CO^2$ vel $CO^2 - AC^2$, unde deducitur $MO = \frac{AC^2 - CO^2}{CO}$ vel $\frac{CO^2 - AC^2}{CO}$.

De Motu Corporum.

De Hyperbolâ.



Theor. I. Lineæ omnes ab Interſectione Aſymptotorum in eorum Angulo ductæ & utrinque productæ, ſunt Hyperbolæ utriuſque Diametri, & earum portio inter utramque Hyperbolam comprehenſa, dicitur Diameter tranſverſa, & biſariam dividitur in Interſectione Aſymptotorum quæ ideo centrum Hyperbolarum vocatur. Tangentes verò in utroque vertice ejuſdem Diametri ductæ & inter Aſymptotos comprehenſæ ſunt inter ſe Parallelæ & æquales, & biſariam dividuntur ab ea Diametro dicunturque ejus Diametri conjugatæ. (Apol. lib. 1. Prop. 30 lib. 2. Prop. 3. & 19.)

Demonſt. Ducta enim quomodocumque linea S C T in Angulo Aſymptotorum ZCY per earum interſectionem C, ſi crura CZ & CY ſumantur reciprocè proportionalia ſinubus Angulorum adjacentium, ducaturque linea ZY illa per lineam SCT biſariam dividetur; nam in Triangulo C Z Y eſt C Z : C Y = Sin. Y : Sin. Z = Sin. Y C o : Sin. Z C o (per conſt.) & alternando, Sin. Y : Sin. Y C o = Sin. Z : Sin. Z C o. Sed in Triangulo C o Y eſt

Sin. Y : Sin. Y C o = C o : Y o,

& in Triangulo C M Z eſt

Sin. Z Sin. Z C o = C o : Z o,

ergo cum duæ priores rationes ſint æquales, eſt C o : Y o = C o : Z o, ideoque Y o = Z o.

Omnis autem linea H N lineæ Z Y parallela ſimiliter biſariam dividetur in O per lineam S T, partes autem ejus inter Hyperbolam & Aſymptotum utrinque contentæ ſunt æquales, per Lem. I. cum ergo ſit ſemper H O = O N, & H P = G N eſt H O — H P = N O — N G ſive O F = O G. Ergo linea S T, lineas omnes lineæ Z Y parallelas, in Hyperbola contentas biſariam ſecat, eſt ergo ejus Diameter per Lemma V.

Sint verò A & D puncta in quibus linea S T occurrit Hyperbolis, per ea ducantur B A K, F D R parallelæ lineæ Z Y inter Aſymptotos contentæ, ergo biſecantur in A & D, cum verò ſint parallelæ ordinatis Diametro S T ſunt Tangentes in verticibus A & D (per Lemma IV.) & inter ſe Parallelæ.

Dico præterea eas eſſe æquales, ducantur enim Parallelæ ipſis proximæ b i K, f q r: erit f q × q r = b i × K i (per Lem. I.) accedentibuſque ordinatis ad Tangentes fit tandem f q = F D, q r = R D; b i = B A, & K i = K A eſt ergo F D × R D = B A × K A, ſed eſt F D = D R & B A = K A ergo $FD^2 = BA^2$ & F D = B A = K A. Unde tandem cum Triangula CAK & C D F ſint ſimilia, & ſit C A : C D = K A : F D eſt etiam C A = C D.

Theor. II. Tertia proportionalis Diametro tranſverſæ & Diametro conjugatæ dicatur Latus Rectum; Eſt Diameter tranſverſa ad Latus Rectum ut *factum* Abſciſſarum ab utroque vertice ſumptarum, ad quadratum Ordinatæ; Hinc iſta curva ὑπέρβολα ſive excedens dicitur, quia quadratum ordinatæ majus eſt facto lateris Recti per abſciſſam à proximo vertice (Apol. lib. I. Prop. 21.) Coincidit verò hæc propoſitio cum iſta, eſt quadratum Diametri Tranſverſæ ad quad. Diametri conjugatæ ut factum abſciſſarum ad quadratum ordinatæ.

Demonſt. Sit ut prius Diameter tranſverſa D A T, conjugata B A K & ordinata inter Aſymptotas contenta HPOGN: ſunt (per Lem. II.) facta partium ſumptarum in lineis D O, H N à puncto Hyperbolæ ad utramque Aſymptotum, ſicut facta partium earundem linearum à puncto concurſus O, uſque ad Hyperbolam ſumptarum; hoc eſt A C × A C : G N × G H = A O × D O : P O × G O. Sed G N × G H æqualis eſt quadrato ſemi Tangentis B A, ſive ſemidiametri conjugatæ; nam (per Lem. I.) eſt G N × G H = b i × K i & per præced. dem. b i × K i = BA^2) & eſt P O = G O ideo pro-

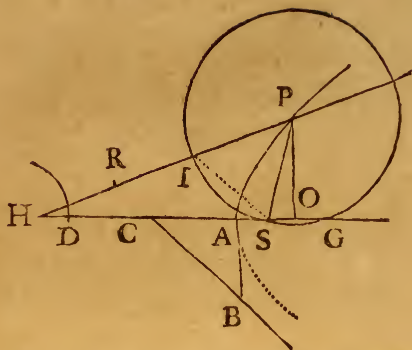
por-

portio superior huc redit, $AC^2 : BA^2 = AO \times DO : PO^2$. Sit verò L latus rectum, est per ejus definitionem $2\,AC : 2\,BA = 2\,BA : L$, ergo est $2\,AC : L = 4\,AC^2 : 4\,BA^2 = AC^2 : BA^2$ ideoque $2\,AC.\,L = AO \times DO : PO^2$.

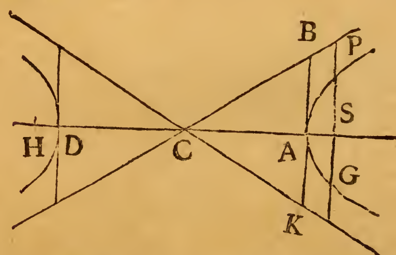
Hinc deducitur quod $PO^2 = \frac{L \times AO \times DO}{2\,AC} = \frac{DO}{AD} \times L \times AO$ ut ergo DO est semper major quàm AD, est etiam PO^2 semper major quàm $L \times AC$. Q. E D.

Theor. III. Diameter illa quæ Asymptotorum Angulum bifariam dividit est perpendicularis suis ordinatis (ut liquet ex Elem.), ideoque est Axis Hyperbolæ & ejus Diameter Conjugata Axis conjugatus: si à Centro feratur utrinque in Axem longitudo Asymptoti à centro ad extremum Axis conjugati sumptæ, puncta notata in Axi dicuntur foci Hyperbolæ, & si à focis ad quodvis Hyperbolæ punctum ducantur lineæ, earum differentia est semper Axi transverso æqualis. Latus Rectum axis dicitur Latus rectum Principale, & tota linea ordinatim Axi applicata in foco est æqualis illi lateri recto Principali, quod erit majus quadruplo distantiæ verticis à foco, si denique bifariam dividatur Angulus quem faciunt lineæ ab utroque foco ad idem curvæ punctum ductæ, linea eum angulum bisecans, erit Tangens curvæ in eo puncto. (Apol. lib. 3. 51.)

Demonst. Ducatur quævis linea ex foco H, sumatur $HI = DA$, & ducta IS ad alterum focum S, fiat $ISP = PIS$ erit $PI = PS$, ideoque differentia linearum HP, SP erit $HI = DA$ seu axi transverso, dico hoc posito, P ad Hyperbolam pertinere. Centro P, radio PS, describatur circulus ISGN habebitur hæc proportio, $HI : HS = HG : HN$ sumatur dimidium harum linearum manebit proportio, sit autem $\frac{1}{2}\,HI = HR$, $\frac{1}{2}\,HS = CS$ $\frac{1}{2}\,HG = \frac{1}{2}\,HS + \frac{1}{2}\,SG$ & demissa PO perpendiculari in SG est $\frac{1}{2}\,SG = SO$, ergo $\frac{1}{2}\,HG = CS + SO = CO$, Denique $\frac{1}{2}\,HN = \frac{1}{2}\,HI + \frac{1}{2}\,IN = RI + IP = RP$ est ergo $HR : CS = CO : RP$: componendo primum habetur $HR : CS + HR = CO : RP + CO$ & prioris rationis terminos terminis secundæ jungendo habetur $HR : CS + HR = CO + HR : HR + RP + CS + CO$, sive quia $HR = AC = DC$, & $CS = CH$ est $AC : CS + AC = DO : HP + HO$.



At operationibus contrariis in eandem proportionem $HR : CS = CO : RP$ factis, hoc est, dividendo & postea prioris rationis terminos e terminis secundæ detrahendo, substitutionibus factis erit
$AC : CS - AC = AO : HP - HO$,
multiplicatis ergo terminis utriusque proportionis erit
$AC^2 : CS^2 - AC^2 = AO \times DO : HP^2 - HO^2$
sit autem perpendicularis AB erecta ab A usque ad Asymptotam CB, est $CB = CS$, & $CS^2 - AC^2 = AB^2$; est etiam $HP^2 - HO^2 = PO^2$, est ergo
$AC^2 : AB^2 = AO \times DO : PO^2$, sed est $AC^2 : AB^2 = BO \times AO$ ad quadratum ordinatæ in O, (per Thor. II.) ergo PO est ipsa illa ordinata & punctum P ad Hyperbolam pertinet.



Sit autem PS ordinata in foco, erit $AC^2 : AB^2 = AS \times DS : PS^2$ est verò $DS = CS + AC$ & $AS = CS - AC$, ergo $BS \times AS = CS^2 - AC^2 = AB^2$, ergo $AC^2 : AB^2 = AB^2 : PS^2$, & $AC : AB = AB : PS$, & duplicando omnes ter-

terminos 2 A C : 2 A B = 2 A B : 2 P S ſive P G. Sed eſt per naturam lateris recti 2 A C : 2 A B = 2 A B : L, ergo L = P G : & $\frac{1}{2}$ L = P S, ſed cum per Theor. II. ſit $PO^2 = \frac{DO}{AB} \times L \times AO$ erit ergo PS^2 ſive $\frac{1}{4} L^2 = \frac{DS}{AB} \times L \times AS$ & $\frac{1}{4} L = \frac{DS}{AB} \times AS$, ut itaque D S eſt major A B, erit $\frac{1}{4} L$, major A S.

Denique. Ducantur à focis lineæ H P, S P, linea P M bifariam dividat angulum P, dico eam eſſe Tangentem Hyperbolæ in P; hoc eſt illam non occurrere Hyperbolæ in alio quovis puncto p; ex H P tollatur H I = D A, erit P I = P S (per hoc Theor.) & ducta IS erit P M perpendicularis in medium N lineæ I S, ex alio quovis puncto p ducantur rectæ p I p S erunt inter ſe æquales, ob æqualia Triangula p N I, p N S (per 4. 1. Elem.) ſed ſi p eſſet in Hyperbola, eſſet H p = H I + p S ſive quia p I = p S eſſet H p = H I + I p, quod abſurdum (per 20. 1. Elem.)

Theor. IV. Si ſumantur pro abſciſſis portiones quævis Aſymptoti ab Hyperbolæ centro, & Ordinatæ ſint Parallelæ alteri Aſymptoto, Ordinatæ erunt ſuis Abſciſſis reciprocè proportionales; Et area inter Aſymptotum, Hyperbolam, ordinatam Vertici axis occurrentem & ordinatam quamvis comprehenſa erit abſciſſæ hujus ordinatæ Logarithmus.

Demonſt. Sit C centrum Hyperbolæ, C E C F abſciſſæ, E G F H ordinatæ Aſymptoto C N parallelæ dico quod eſt C E : C F = F H, E G. Ductis enim per G & H lineis G g, H h parallelis Aſymptoto C F, & I G K, M H N inter ſe parallelis trans Hyperbolam, erunt ſimilia Triangula I G E & M H F, G K g & H N h propter Parallelas, ideoque eſt

I G : M H = G E : H F

& GK : HN = Gg (ſive CE) : Hh (ſive FC) compoſitis rationibus eſt

IG × GK : MH × HN = GE × CE : HF × FC.

Sed, (per Lem. I.) eſt IG × GK = MH × HN, ergo G E × C E = H F × C F eſt ergo

C E : C F = H F : G E,

cum autem Parallelogrammata C G, C H, ſint æquiangula & ea lateribus reciprocis contineri ſit demonſtratum, ſunt æqualia.

Dico denique areas Hyperbolæ eſſe abſciſſarum Logarithmos; ex centro C ducatur axis C A, & ex vertice A ducantur lineæ A R A r Aſymptotis Parallelæ, ob Angulum C bifariam diviſum & parallelas, erit CR = AR ſit A R = 1; & fingantur duæ ordinatæ quæ ita moveantur ut abſciſſæ unius ſint

ſem-

r A G H C R E e F f

semper potentia eadem n alterius; coincident quidem in R, nam quævis potentia unitatis est semper 1, sed procedendo sit $CE = x$ debebit esse $CF = x^n$, erunt ergo $GE \frac{1}{x}$ & $HF \frac{1}{x^n}$ est enim $CE : CR = AR : GE$ sive $x : 1 = 1 : \frac{1}{x}$ & $CF : CR = AR : FH$ sive $x^n : 1 = 1 : \frac{1}{x^n}$, fluxio autem lineæ CE erit $dx = Ee$, & lineæ CF erit $nx^{n-1}dx = Ff$, ideo areæ RG fluxio erit $dx \times \frac{1}{x} = \frac{dx}{x}$ & areæ RH, $nx^{n-1}dx \times \frac{1}{x^n} = \frac{ndx}{x}$ sed $\frac{dx}{x} : \frac{ndx}{x} = 1 : n$, sunt ergo fluxiones earum arearum in Ratione constanti 1 ad n, ideoque & areæ integræ RG, RH quæ sunt earum summæ, sunt in eâdem ratione 1 ad n, sunt autem 1 & n Exponentes potentiarum abscissarum CE, CF, sunt ergo areæ sicut illi exponentes, sed Logarithmi sunt semper ut Exponentes potentiarum quantitatum quarum sunt Logarithmi, ergo illæ areæ RG, RH, sunt Logarithmi abscissarum CE, CF.

In puncto R ubi abscissa est unitas area est 0, ut Logarithmis convenit, fitque negativa retrocedendo ab R versus C, simulque cum sint abscissæ minores unitate CR fiunt fractiones.

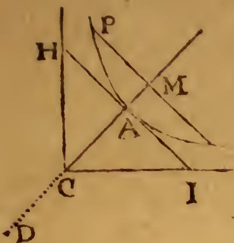
Theor. V. Si Angulus Asymptotarum sit Rectus, Hyperbola dicitur æquilatera, æqualesque sunt Axes conjugati, ideoque latus Rectum Axi transverso est æquale, ac (per Theor. II.) facta abscissarum quadrato ordinatarum æqualia sunt, sicut in circulo: Diversæ Hyperbolæ eodem Asymptotorum angulo descriptæ sunt similes: Si vero idem sit Hyperbolarum axis sed diversus Angulus erunt ordinatæ ad idem axeos punctum sicut Radices quadratæ Laterum Rectorum Principalium, & in ea erunt ratione portiones earum Hyperbolarum per Ordinatas terminatarum quarum æquales sunt abscissæ.

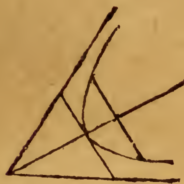
Demonst. Axis transversus est perpendicularis conjugato, dividitque bifariam angulum Asymptotorum; si ergo is angulus sit 90°. ejusque dimidium 45°. Triangulum CAH erit Isosceles & $CA = AH$, cætera ex his facile deducuntur.

H P M A C I D

h p m a c i d

Si in duabus Hyperbolis anguli Asymptotorum sint æquales, ut bifariam dividuntur per axem, similia erunt Triangula CAH, cah: ideoque $CA^2 : AH^2 = ca^2 : ah^2$ sumantur abscissæ AM, am in ratione AD ad ad erit etiam DM : dm in eadem ratione cum sit ergo $AM : am = AD : ad$ & $DM : dm = AD : ad$. est $AM \times DM : am \times dm = AD^2 : ad^2$ sed est $CA^2 : AH^2 = ca^2 : ah^2 = AM \times DM : MP^2 = am \times dm : mp^2$, & altern. $AM \times DM : am \times dm = MP^2 : mp^2$ est ergo $AD^2 : ad^2 = MP^2 : mp^2$ unde est $MP : mp = AD : ad$, omnes ergo ordinatæ ac omnia puncta Hyperbolæ determinantur per rationem AD ad ad.

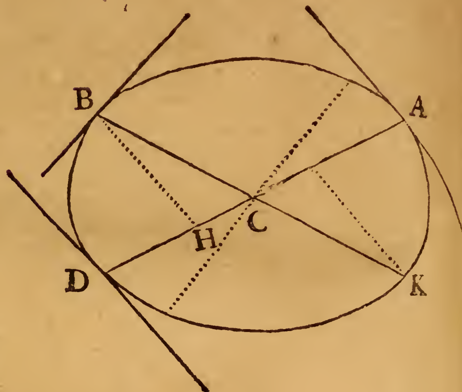




Sint denique in duabus Hyperbolis æquales axes tranſverſi ſed diverſi Aſymptotorum Anguli; diverſa erunt Latera Recta, ſumantur ergo æquales abſciſſæ, & quoniam Axis eſt ad latus Rectum ſicut factum partium abſciſſæ ad quadratum ordinatæ, Axis verò & factum partium abſciſſæ æqualia ſunt utrinque, eadem erit utrinque ratio Lateris recti principalis ad quadratum ordinatæ, erunt ergo ordinatæ quæ ad æquales abſciſſas pertinebunt, ut Radices quadratæ Laterum rectorum principalium, quæ ratio eſt conſtans, ſit ergo utraque abſciſſa in portiones infinitè parvas & utrinque, æquales diviſa ſingula Parallelogrammata quam minima ſuper æquales abſciſſæ portiones formata erunt in eadem ratione ac ordinatæ, ergo areæ Hyperbolarum, quæ ſunt eorum Parallelogrammorum ſummæ, in eâdem erunt ratione, nempe ut Radices quadratæ laterum Principalium.

De Ellipſi.

Theor. I. Omnes Ellipſis Diametri ſeſe bifariam ſecant in eodem puncto quod dicitur centrum Ellipſis, eaque Diametri ordinata quæ per centrum tranſit eſt ipſa Diameter, quæ reſpectu Diametri cujus eſt ordinata conjugata dicitur: (Apol. l. 1. Prop. 30.)



Demonſt. Si per medium C, Diametri Ellipſis AD, ducatur linea quævis BK, & per puncta B & K ducantur BH, KG ordinatæ Diametro AB, erit per Lemma V. $AG \times GD : AH \times HD = GK^2 : BH^2$ & propter Triangula ſimilia GKC, CBH eſt $GK : BH = CG : CH = BC : CK$, eſt ergo $AG \times GD : AH \times HD = CG^2 : CH^2$, eſt autem (per 5. 2. Elem.) $AG \times GB = AC^2 - CG^2$ & $AH \times HB = AC^2 - CH$, eſt ergo

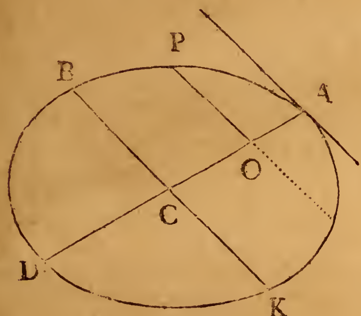
$$AC^2 - CG^2 : AC^2 - CH^2 = CG^2 : CH^2.$$

& jungendo terminos ſecundæ rationis terminis prioris, eſt $AC^2 : AC^2 = CG^2 : CH^2$, ideo $CG = CH$, ac per conſequens $BC = CK$. Omnes ergo lineæ per punctum C tranſeuntes illic bifariam ſecantur. Sunt autem ſingulæ Diametri Ellipſis, nam in vertice B ducatur Tangens, & per Centrum C linea illi parallela, ea dividetur bifariam, cum itaque BK biſecet lineam Parallelam Tangenti per ejus verticem ductæ, eſt Diameter, per Lemma V.

Denique ſolæ lineæ per Centrum tranſeun-

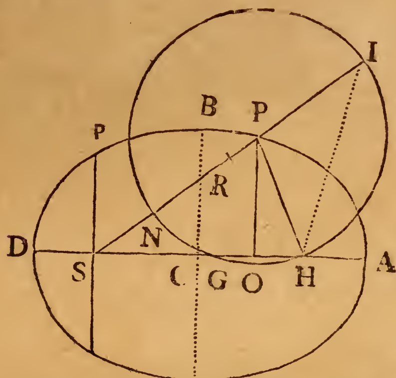
euntes ſunt Diametri; fingatur enim Diameter per centrum non tranſiens, ducatur Tangens in ejus Vertice, & illi Tangenti ducatur Parallela per Centrum C, bifariam dividetur in centro, ergo bifariam non dividetur à Diametro ſuppoſitâ quæ per centrum non tranſit, ergo male ſupponitur eam eſſe Diametrum: Omnes ergo Diametri Ellipſis per centrum tranſeunt, illicque biſecantur.

Theor. II. Tertia proportionalis Diametro tranſverſæ ejuſque conjugatæ dicatur Latus Rectum, erit Diameter tranſverſa ad Latus Rectum, vel quod idem eſt quadratum diametri tranſverſæ ad quadratum tum ejus conjugatæ, ut factum abſciſſarum ſumptarum ab utroque Vertice Diametri ad quadratum ordinatæ, inde quadratum Ordinatæ ſemper minus deprehenditur facto Lateris recti per utramlibet abſciſſam, undè hæc curva dicitur Ellipſis; (Apoll. lib. 1. Prop. 21.)



Demonſt. Sit Ellipſis Diameter ACD, ejus conjuga a BCK eſt per Lemma IV, $AC \times CD$ ſive $AC^2 : AO \times DO = BC^2 : PO^2$ & alternando $AC^2 : BC^2 = AO \times DO : PO^2$, ſed eſt $2AC : 2CB = 2CB : L$. ergo $4AC^2 : 4CB^2 = AC^2 : CB^2 = 2AC$, $L = AO \times DO : PO^2$, ergo eſt $PO^2 = \frac{L \times AO \times DO}{2AC} = \frac{DO}{2AC} \times L \times AO$ ſed ut $4DO$ eſt ſemper minus quam $2AC$, eſt PO^2 ſemper minus facto Lateris recti per alterutram abſciſſam.

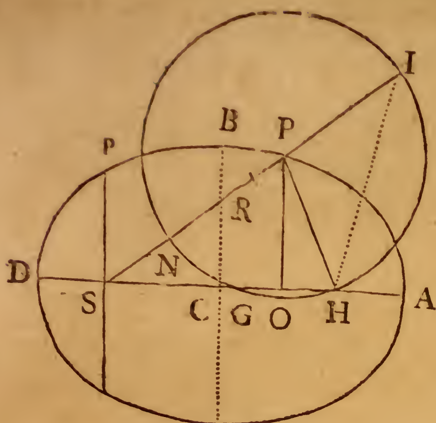
Theor III. Sit AD axis major, à centro feratur utrinque CH, CS, æquales & tales ut quadratum CH^2 ſive CS^2 cum quadrato ſemiaxis conjugati CB^2 ſit æquale quadrato ſemiaxis majoris CA^2, dicantur que puncta H & S, Foci, ſumma linearum ab utroque foco ad quodvis punctum Ellipſeos ductarum erit ſemper æqualis Axi majori, (Apol. Lib. 3. Prop. 52.); & tota linea ordinatim applicata in foco erit æqualis Lateri Recto Principali, quod ergo minus erit quadruplo diſtantiæ foci à proximo Vertice.



Demonſt. Ducatur quævis linea ex foco S, in eâ ſumatur $SI = DA$ & ducta IH ad alterum focum, fiat $IHP = I$ erit $IP = PH$, ideoque $SP + PH = SP + PI = SI = DA$ ſive axi majori: quo poſito dico punctum P ad Ellipſim pertinere. Centro P radio PH deſcribatur circulus IHGN habebitur hæc Proportio $SI : SH = SG : SN$, ſumendo dimidium harum linearum manebit proportio; ſit autem $\frac{1}{2}SI = SR$; $\frac{1}{2}SH = CH$; $\frac{1}{2}SG = \frac{1}{2}SH - \frac{1}{2}GH$ & demiſſa PO perpendiculari in GH eſt $\frac{1}{2}GH = HO$ ergo $\frac{1}{2}SG = CH - HO = CO$. Denique $\frac{1}{2}SN = \frac{1}{2}SI - \frac{1}{2}NI = RI - PI = RP$ eſt ergo

$SR : CH = CO : RP$ & componendo habetur $SR : SR + CH = CO : CO + RP$, tum prioris rationis terminos jungendo terminis ſecundæ, eſt: $SR, SR + CH = CO + SR : CO + RP + SR + CH$ ſive quia $SR = AC = DC$ & $CH = CS$, eſt $AC : AC + CH = DO : SP + SO$. At operationibus contrariis factis in eamdem proportionem $SR : CH = CO : RP$, hoc eſt, dividendo & poſtea prioris rationis terminos

De Motu Corporum.



minos è terminis secundæ detrahendo subſtitutionibuſque factis erit

$$AC : AC - CH = AO : SP - SO$$

multiplicatis autem terminis utriuſque proportionis eſt

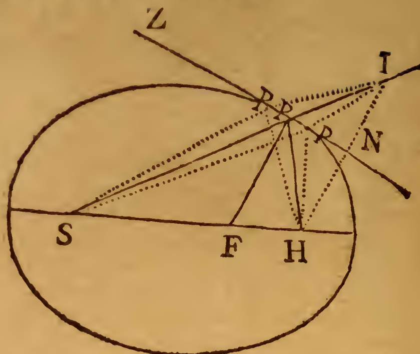
$AC^2 : AC^2 - CH^2$ (ſive BC^2) $= AO \times DO,\ SP^2 - SO^2$,

eſt autem (per 47. 1. Elem.) $SP^2 - SO^2 = OP^2$, ſed eſt $AC^2 : BC^2 = AO \times DO$ ad quadratum ordinatæ in O, eſt ergo PO ipſa illa ordinata, & punctum P ad Ellipſim pertinet.

Sit autem Sp ordinata in foco erit $AC^2 : BC^2 = AS \times SD : Sp^2$, eſt autem (per 5. 2. Elem.) $AS \times SD = AC^2 - CS^2 = BC^2$, eſt ergo $AC^2 : BC^2 = BC^2 : Sp^2$ ſive, $AC : BC = BC : Sp$, & duplicando omnes terminos: $2\,AC : 2\,BC = 2\,BC : 2\,Sp$, ſed eſt $2\,AC = 2\,BC = 2\,BC : L$ ergo $L = 2\,Sp$, & $\frac{1}{2}L = Sp$.

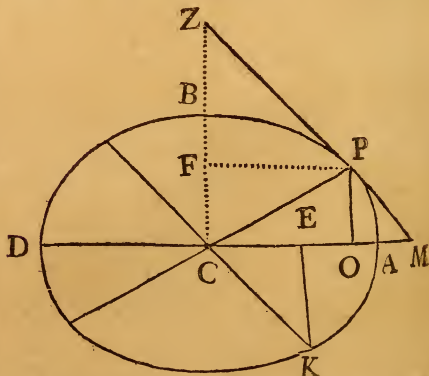
Eſt autem (per Theorema 2.) Sp^2, ſive $\frac{1}{4}L^2 = \frac{AS}{2\,AC} \times L \times DS$ & $\frac{1}{4}L = \frac{AS}{2AC} \times DS$ ut ergo eſt AS minor 2 AC erit $\frac{1}{4}$ L minor DS, hoc eſt latus rectum minus eſt quadruplo diſtantiæ foci à proximo Vertice.

Theor. IV. Tangens Ellipſis bifariam dividit Angulum qui fit inter unam è lineis à foco ductam & productionem alterius: & lineæ ab utroque foco ductæ, æquales faciunt angulos cum Tangente, & ſi bifariam dividatur angulus quem faciunt lineæ à foco ductæ, linea biſecans erit curvæ perpendicularis. (Apol. 48. b. 3. 48.)



Demonſt. Ducantur à focis lineæ SP HP productaque SP in I, dividatur bifariam angulus SPH, dico lineam ZPN non occurrere Ellipſi in ullo alio puncto p, ſit PI = PH & ductâ IH, erit PN perpendicularis in ejus medium, ex alio quovis puncto p, ducantur pI, pH, quæ erunt æquales ob æqualia Triangula pNI, pNH (per 4. 1. Elem.) ſed ſi p foret in Ellipſi eſſet Sp + pH. ſive Sp + pI = SI quod abſurdum (per 20. 1. Elem.)

Eſt autem ZPS = IPN (per 15. 1. El.) eſt IPN = NPH, per conſt. ergo ZPS = NPH, Si ergo FPS = FPH eſt ZPS + FPS = NPH + FPH, ſunt autem omnes ſimul æquales duobus rectis, ergo ZPS + FPS eſt Recto æqualis & PF angulum SPH biſecans eſt in Tangentem ideoque in curvam perpendicularis.



Theor. V. Sit Diameter quævis AD, & ducantur utlibet duæ aliæ Diametri inter ſe conjugatæ CP, CK, ex utriuſque vertice ducantur ordinatæ KE, PO in priorem AD, factum abſciſſarum à curvâ ſumptarum, unius ver-

vertici respondentium erit æquale quadrato abscissæ à centro sumptæ respondenti Vertici alterius Diametri: Unde quadrata ambarum abscissarum à Centro sumptarum erunt simul æqualia quadrato $\frac{1}{2}$ Diametri in quam sumuntur, & quadrata ordinatarum erunt æqualia quadrato ejus $\frac{1}{2}$ Diametri conjugatæ. Hinc deducitur summam quadratorum duarum Diametrorum conjugatarum quarumvis esse semper eamdem: eas verò Diametros conjugatas esse inter se æquales quarum vertices determinantur per ordinatam erectam in Axem majorem cujus abscissa à centro sumpta sit æqualis radici dimidii quadrati semi Axis majoris.

Demonst. . . . Sint CP CK Diametri conjugatæ, PO KE ordinatæ ex earum verticibus in Diametrum AD ductæ; PM Tangens Parallela Diametro CK: Triangula POM, KEC erunt similia & $PO : KE = MO : CE$, vel $PO^2 : KE^2 = MO^2 : CE^2$ sive quia (per Cor. 3. Lem. V.) est $MO = \frac{CA^2 - CO^2}{CO}$: est $PO^2 : KE^2 = \overline{\frac{CA^2-CO^2}{CO}}^{\,2} : CE^2$, sed per Lemma IV. est $PO^2 : KE^2 = AO \times DO : AE \times DE$ sive (per 5. 2. Elem.) $= CA^2 - CO^2 : CA^2 - CE^2$ est ergo, $CA^2 - CO^2 : CA^2 - CE^2 = \overline{\frac{CA^2-CO^2}{CO^2}}^{\,2} : CE^2$, dividendo primum & tertium terminum per $\frac{CA^2-CO^2}{CO^2}$ est $CO^2 : CA^2 - CE^2 = CA^2 - CO^2 : CE^2$ & addendo terminos secundæ rationis terminis primæ est $CA^2 : CA^2 = CA^2 - CO^2 : CE^2$, ergo $CE^2 = CA^2 - CO^2 = AO \times DO$: Pari modo addendo terminos primæ rationis terminis secundæ erit $CO^2 : CA^2 - CE^2 = CA^2 : CA^2$: ergo $CO^2 = CA^2 - CE = AE \times DE$. Quod erat primum.

Junctis ergo quadratis abscissarum CO^2, CE^2 summa est æqualis CA^2; nam est $CE^2 = CA^2 - CO^2$ ergo $CE^2 + CO^2 = CA^2 - CO^2 + CO^2 = CA^2$.

Sit BC diameter conjugata diametri AC, est $PO^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times CA^2 - CO^2$ & $KE^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times AC^2 - CE^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times AC^2 - AC^2 + CO^2 = \frac{BC^2}{AC^2} CO^2$, ergo $PO^2 + KE^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times AC^2 - CO^2 + CO^2 = BC^2$.

Sit autem Diameter AC axis, ordinatæ erunt perpendiculares, ergo $PO^2 + CO^2 = PC^2$, & $CE^2 + KE^2 = CK^2$ (per 47. 1. El.) ergo $PO^2 + CO^2 + CE^2 + KE^2 = PC^2 + CK^2$, sed $PO^2 + CE^2 = BC^2$, $CO^2 + KE^2 = AC^2$ Ergo $PC^2 + CK^2 = AC^2 + BC^2$. Quarumvis Diametrorum conjugatarum quadrata æqualem summam facient ac quadrata axium.

Denique si punctum O in axi ita sit sumptum ut sit $\frac{1}{2} CA^2 = CO^2$ & sit ductâ in O ejus ordinata & per ejus verticem P ducatur Diameter ejusque conjugata, quadratum abscissæ quæ respondebit vertici Diametri conjugatæ erit æquale $AO \times DO$ sive $AC^2 - CO^2$ sed $CO^2 = \frac{1}{2} CA^2$ per hypothesim, ergo hoc quadratum erit etiam æquale $\frac{1}{2} AC^2$, eadem ergo abscissa ac proinde æquales ordinatæ verticibus utriusque Diametri respondebunt, æquales ergo erunt illæ Diametri conjugatæ siquidem sunt Hypothenusæ æqualium abcissarum & Ordinatarum.

Cor. I. Si à vertice Diametri PC, producatur Tangens terminata utrinque in M & Z, ad Diametros conjugatas CA, CB productas, erit semiDiameter CK priori conjugata media proportionalis inter partes Tangentis PM PZ: Ductis enim ordinatis PF PO, ob similia Triangula CKE, ZFP, POM, est $CK : CE = ZP : FP$ (sive CO) & $CK : CE = PM : MO$ unde compositis rationibus est $CK^2 : CE^2 = ZP \times PM : CO \times MO$, sed $CO \times MO = AO \times DO$ (per Cor. 3. Lem. V.) & $AO \times DO = CE^2$ per præsens Theorema, ergo $CK^2 : CE^2 = ZP \times PM : CE^2$ & $CK^2 = ZP \times PM$ sive $ZP : CK = CK : PM$. Q. E. D.

Et conversa per se liquet, nempe quod si duæ Diametri occurrant Tangenti ductæ in Vertice alterius Diametri, ita ut hujus $\frac{1}{2}$ Diameter conjugata sit media proportionalis inter partes tangentis, duæ illæ priores Diametri erunt inter se conjugatæ.

Problema. Datis tàm positione quam magnitudine Ellipseos alicujus non descriptæ duabus Diametris conjugatis invenire positionem & magnitudinem duarum aliarum Diametrorum conjugatarum, quæ faciant inter se angulum quemvis datum.

Primus Casus: Angulus qui datur sit rectus, h. e. Diametri quæsitæ sint Axes conjugati. Sint verò semi-Diametri datæ C P C K, per verticem P unius ducatur linea alteri C K parallela, quæ ideo erit Ellipsis Tangens in eo puncto. (per Lem. IV.) producatur CP in V ita ut sit CP : C K = C K : P V, in medium R lineæ C V erigatur perpendicularis tangentem secans in L, & ex L velut Centro radio L C qui æqualis est L V; describatur circulus transiens per puncta C & V, & Tangentem secans in punctis Z & M, dico lineas Z C M C, esse in axium positione.

Demonst... Angulus enim Z C M est rectus quia est in semi-circulo per constructionem, præterea quia chordæ C V Z M sese secant in P est $CP \times PV = ZP \times PM$ (per 35. 3. Elem.) sed $CP \times PV = CK^2$ per constructionem, ergo $CK^2 = ZP \times PM$ ideoque, per Corollarii præcedentis conversam, lineæ C Z, C M, cadunt secundum Diametros conjugatas.

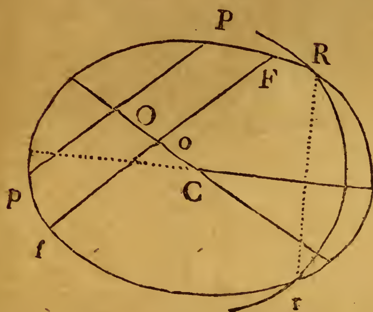
Sec. Casus. Si angulus datus D rectus non sit, centrum circuli describendi non erit in L sed in alio puncto l ejusdem lineæ R L in medio R lineæ C V perpendicularis, sic verò invenitur, ducatur ex R perpendicularis in Tangentem fiatque cum eâ angulus æqualis dato, & linea eum formans secet Tangentem in m, ducatur LC, & per R linea RN ipsi Parallela, ex C ut centro, radioque æquali R m secetur R N in N, ductaque CN quæ secet L R in l erit l centrum circuli ex quo si radio l C circulus describatur is transibit per C & etiam per V (per const. & 1. 3. Elem.) secabit verò Tangentem in punctis Z & M, é quibus ductis C Z, C M habetur Diametrorum quæsitarum positio.

Demonst. Evidens est, sicut in priore hujus demonstrationis parte, lineas C Z C M, cadere secundum Diametros conjugatas, quæstio est utrum faciant in C angulum datum, ex centro l ducatur linea parallela lineæ R m, dico illam occurrere Tangenti in puncto M, hoc est illam fore æqualem radio l M sive l C, occurrat enim Tangenti in X erit ob Parallelas L R : R m = L l : l X; sed propter Parallelas R N & L C triangula N l R C l L, sunt similia, estque l R : l N = L l : l C, & sumptis vel differentiis vel summis terminorum utriusque rationis est L R : C N = L l, l C est verò per constructionem C N = R m ergo L R : R m = L l : l C ergo L l : l X = L l : L C, scilicet est l X = l C, hoc est X cadit in M; radius ergo l M cum sit Parallelus lineæ R m, faciet cum perpendiculari quæ in lineam Z M duceretur eumdem angulum quem format linea R m cum perpendiculari in eamdem lineam ductâ, angulum nempe quæsitum: & angulus Z l M ejus erit duplum; sed angulus Z C M est anguli Z l M dimidium, ergo est æqualis angulo quæsito.

Determinatur autem Diametrorum magnitudo, ductis ex P in utramq. Diametrum ordinatis P O, P F lineis C Z, C M, Parallelis; $\frac{1}{2}$ Diametri enim erunt mediæ proportionales inter abscissas à centro, & lineas à centro ad Tangentem sumptas, hoc est, erit CO : CA = CA : CM, & CF : CB = CB : CZ; undè cum cognoscantur CO & CM, CF & CZ determinantur CA & CB.

Cor. I. Datis axibus foci inveniuntur si

ex vertice axis minoris, ut centro, cum radio æquali ſemi axi majori ipſe major axis ſecetur, & datis focis & axi majori puncta quotlibet ad Ellipſim pertinentia inveniri poſſunt, ſi ab uno foco ducatur ut libet linea æqualis axi majori & ab ejus extremitate ducatur linea ad alterum focum, fiat in hoc foco ſuper hanc lineam angulus æqualis angulo qui ſit inter lineas à focis ductas, ſecabitur prima linea in puncto ad Ellipſim pertinente.

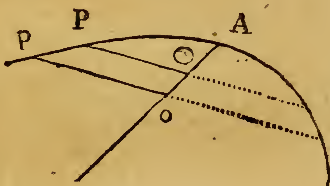


Cor. II. Si Ellipſis ſit data, ſic inveniuntur centrum & Axes: ducantur ut lubet duæ Parallelæ P p, F f, per earum medium O : o, ducatur linea, erit Diameter, ejus medium C erit Centrum ex quo deſcribatur circulus qui ſecet curvam in duobus punctis R r ducatur per centrum linea perpendicularis in lineam R r quæ eam bifariam dividet (per 3. 3. Elem.) erit ergo Axis, alter axis habetur erigendo lineam huic perpendicularem in Centro ad curvam uſque.

I X. De Parabola.

I. Theor. Omnes Diametri Parabolæ ſunt infinitæ & inter ſe Parallelæ: quadrata ordinatarum ſunt inter ſe ut Abſciſſæ Diametrorum, & cum tertia proportionalis abſciſſæ & ordinatæ dicatur Latus Rectum, factum lateris Recti per abſciſſam eſt æquale quadrato ordinatæ, hincque derivatur nomen hujus curvæ. (Apol. lib. 1. Prop. 20.)

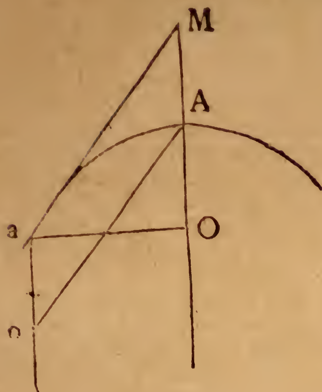
Dem. Ducatur in baſi coni chorda parallela plano Parabolæ, & infinitè parva, per verticem coni & eam chordam ducatur Planum & aliud illi parallelum per unam è lineis Parabolæ in hoc plano formabitur Hyperbola, ſed quam proxima Parabolæ, & cujus centrum tanto magis à Vertice coni removetur quo minor eſt chorda per quam tranſit planum per Verticem coni ductum, evaneſcat hæc chorda, centrum ejus Hyperbolæ in infinitum abibit, & ut Planum verticale fiet tangens cono, coincidet hæc Hyperbola cum Parabolâ, ſed omnes ejus Diametri à puncto infinitè remoto divergentes erunt Parallelæ & infinitæ, tales ergo etiam erunt Diametri Parabolæ. Præterea ex caſu 2do. Lem. III. conſtat quod ſi ſecans infinita plures lineas Parallelas in Sectione Conicâ ſecet, abſciſſæ erunt inter ſe ut facta partium linearum Parallelarum, ſed hæ bifariam dividuntur à Diametro, ſunt ergo Diametri abſciſſæ ſicut quadrata ordinatarum.



Fiat A O, OP = OP: *L* erit $OP^2 = AO \times L$; eſto verò quævis alia abſciſſa A o & ordinata o p erit $AO : Ao = OP^2 : op^2$, & multiplicando primam rationem per *L* erit $L \times AO : L \times Ao = OP^2 : op^2$, ſed per Hypotheſim $AO \times L = OP^2$ ergo etiam $L \times Ao = op^2$ hoc eſt factum Lateris recti per quamvis abſciſſam æquale eſt quadrato ordinatæ ipſi reſpondenti.

Cor. I. Si in Diametrum productam ſumatur à Vertice longitudo æqualis lateri Recto, & ab ejus extremo ad extremum abſciſſæ deſcribatur ſemi circulus, & in vertice diametri Parabolæ erigatur Perpendicularis ad circulum uſque, erit hæc perpendicularis æqualis ordinatæ ad eam abſciſſam pertinenti.

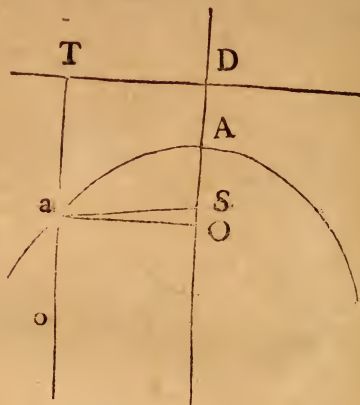
Cor. I I. Si in Diametro quâvis ſumatur à vertice quarta pars ejus Lateris recti, ordinatim applicata illi puncto erit æqualis lateri recto. Sit enim $Ao = \frac{1}{4} L$ eſt $\frac{1}{4} LL = op^2$: ergo $LL = 4\,op^2$ & $L = 2\,op$, ſive toti ordinatim applicatæ in o.



Cor. III. Latus Rectum Diametri cujuſvis eſt æquale Lateri recto axis & quadruplo abſciſſæ axis determinatæ per ordinatam è vertice Diametri in axem ductam, Ducatur ex vertice a Diametri tangens a M quæ axi occurrat in M & a O ordinata axi, per Corollarium Lemmatis V. diſtantia verticis axis A ad M eſt æqualis diſtantiæ ejuſdem verticis ab O, ergo $MO = 2\,AO$, & (per 47. 1. Elem.) eſt $aM^2 = MO^2$ (ſive $4\,AO^2$) $+ aO^2$ (ſive $L \times AO$) $= 4\,AO + L \times AO$; à vertice A axis ducatur ordinata A o ad Diametrum propoſitam, evidens eſt ob parallelas a o, A O, & Tangentem ordinatæ parallelam, eſſe $ao = AM$ ſive A O & $oA = aM$; ſit verò *l* latus Rectum Diametri a o, erit oA^2, ſive $aM^2 = l \times ao = l \times AO$ ſed erat $aM^2 = 4\,AO + L \times AO$ ergo $l \times AO = 4\,AO + L \times AO$, unde $l = L + 4\,AO$. Q. E. D.

Theor. II. Si in axe ſumatur à vertice quarta pars ejus lateris recti, id punctum vocatur Parabolæ focus, ſi verò ultrâ verticem eadem feratur longitudo & per punctum in quo cadit ducatur linea axi perpendicularis, dicetur Directrix Parabolæ: Si autem producatur quævis Diameter ad Directricem, portio ejus inter verticem & Directricem comprehenſa eſt quarta pars lateris Recti ejus Diametri, & eſt æqualis diſtantiæ ejus verticis à foco.

Demonſt. Ut enim Diameter & axis ſunt paralleli, ducta perpendiculari a T à vertice diametri ad directricem erit $aT = OD = DA + AO$, eſt verò D A, quarta pars lateris recti principalis & A O abſciſſa axis quæ reſpondet ordinatæ a O à vertice Diametri ductæ, eſt verò (per Corol. 2. Theor. præced.) latus rectum diametri æquale quadruplo lateris recti & quadruplo A O, hoc eſt $= 4\,DA + 4\,AO$ ergo $aT = DA + AO$ eſt quarta pars lateris Recti Diametri a o.

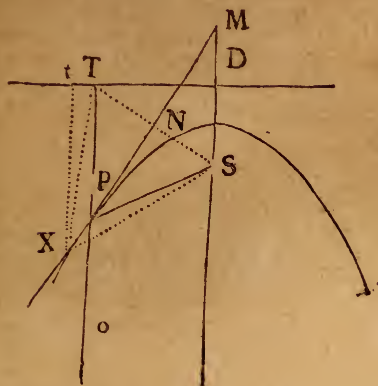


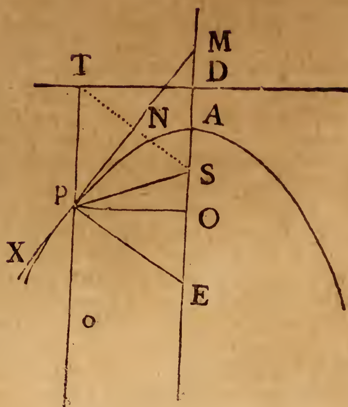
Secundò, E foco Parabolæ S, ad verticem Diametri ducatur S a, ſitque ducta a O ordinata axi, (per 47. 1. *Ele.*) eſt $Sa^2 = SO^2 + aO^2$ & $aO^2 = 4\,DA \times AO$: ergo $Sa^2 = SO^2 + 4DA \times AO$, ſed eſt DO^2 (per 8. 2. El.) $= SO^2 + 4\,DA \times AO$, ergo $DO^2 = Sa^2$ & $Sa = DO = aT$.

Theor. III. Si à puncto Parabolæ ducatur perpendicularis ad Directricem, & linea ad focum, bifariamque dividatur Angulus quem faciunt, linea eum dividens erit Tangens in eo puncto, quæ ſi producatur donec ſecet axem, portio axis à foco ad occurſum Tangentis contenta erit æqualis lineæ à foco ad punctum Parabolæ ductæ: Angulus Diametri cum Tangente erit æqualis angulo lineæ à foco ductæ cum eâ Tangente, ideo ea quæ ſecundum Diametros ad Parabolam adpellunt ad focum reflectentur, & Angulus Diametri cum lineâ à foco ductâ bifariam dividitur per perpendicularem ad curvam: Si ea perpendicularis ſecet axem, pars axis inter eam & ordinatam axi ex Vertice Diametri ductam, eſt æqualis dimidio lateris recti principalis, & pars axis inter eam & Tangentem comprehenſa, eſt dimidium lateris Recti Diametri, ipſa verò

per-

perpendicularis eſt media Proportionalis inter ea ſemilatera recta.





Demonſt. Sit T D directrix, à puncto P linea P T perpendicularis in Directricem ducatur, ducatur etiam ad focum linea P S & denique ducatur linea P N bifariam dividens angulum S P T; illa linea perpendiculariter & bifariam dividet lineam S T à foco ad punctum T ductam. Ex quovis puncto X lineæ P N ducantur lineæ X T, X S, erunt inter ſe æquales (per 4. 1. Elem.), erit verò X T directrici obliqua ideoque perpendicularis ab X in Directricem demiſſa erit brevior quam X T ac per conſequens brevior quam X S, ergo id punctum X vicinius erit Directrici quam foco, erit ergo extra Parabolam, ideoque linea P N erit Tangens, cum in unico puncto P Parabolæ occurrat.

Anguli autem T P N, N M S ſunt æquales ob Parallelas T P, M S, & per conſt. T P N = N P S, ergo N M S = N P S, eſt ergo Triangulum M S P Iſoſceles, & M S = S P.

Anguli autem X P o, T P N, per verticem ſunt oppoſiti, ergo ſunt æquales, ſed T P N = N P S per conſtr. ergo X P o = N P S.

Dividatur bifariam angulus S P o per lineam P E ita ut ſit o P E = E P S; erit X P o + o P E = N P S + E P S hi quatuor valent duos rectos, ergo X P o + o P E valent rectum & eſt P E perpendicularis in Tangentem.

Eſt ergo in Triangulo Rectangulo M P E (ductâ perpendiculari P O), M O : P O = P O : O E $= \frac{PO^2}{MO}$, eſt verò $PO^2 = L \times AO$ & $MO = 2AO$ ergo $OE = \frac{L \times AO}{2AO} = \frac{L}{2}$.

Ergo etiam E M eſt æqualis dimidio lateris Recti Diametri P o, eſt enim ejus Latus Rectum æquale lateri Recto principali & quadruplo abſciſſæ A O, eſt verò O E dimidium lateris Recti Principalis & M O = 2 A O, ſive dimidium quadrupli A O, ergo $EM = \frac{1}{2}$ l.

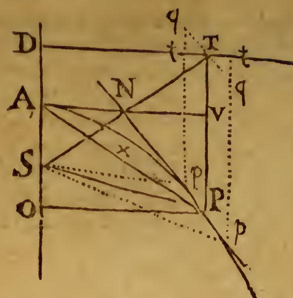
Eſt etiam ob Triangulum Rectangulum M P E, E M : P E = P E : O E; ergo eſt P E hoc eſt perpendicularis in curvam, media proportionalis inter ſemilatus rectum Diametri & ſemilatus rectum Axis.

Theor. IV. Superficies Parabolica inter curvam, abſciſſam axis & ejus ordinatam comprehenſa, eſt ad factum abſciſſæ per Ordinatam ut duo ad tres, ſegmentum verò Parabolicum inter curvam & chordam à Vertice ductam terminatum eſt ejuſdem facti ſexta pars.

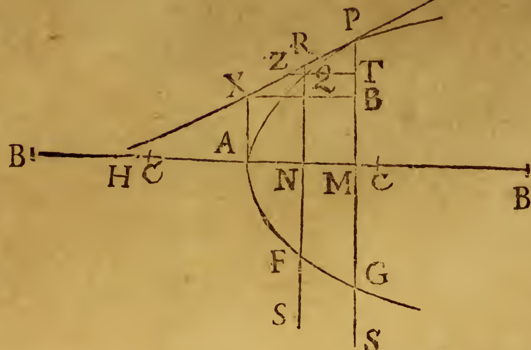
DE MOTU CORPORUM.

Demonst. Ex foco S ducatur S P ad quodvis Parabolæ punctum P & ex P ducatur PT ad directricem perpendicularis, ducatur Tangens in puncto P, & in ea sumantur puncta p, p puncto P proxima & utrinque à puncto P æqualiter dissita, ab iis ducantur ad focum lineæ S p S p, & p q, p q lineæ P T parallelæ & æquales; ducaturque q T q, habebitur Parallelogrammum p q q p, cujus basis p p est eadem cum basi Trianguli S p p; si verò ducatur S T, quam Tangens P N, bifariam & perpendiculariter dividit in N, erit S N altitudo Trianguli S p p, & N T = S N, altitudo Parallelogrammi p q q p, cum ergo bases & altitudines sint æquales, (per 41. 1. Elem.) erit Parallelogramma p q q p duplum Trianguli S p p, sed est p q q p æquale Trapezio t p p t, cum ergo tota superficies DAXPT talibus Trapeziis t p p t constet, & superficies A S P X, talibus Triangulis S p p, erit superficies D A X P T dupla superficiei A S P X.

Si verò ducatur A V Tangens in A & chorda A P, erit Parallelogrammum D A V T, duplum Trianguli A S P, bases enim A D, A S sunt æquales, altitudo verò



Trianguli est PO, parallelogrammi AV & PO = AV: si ergo DAVT ex DAXPT detrahatur, & A S P ex A S P X, residuum primæ figuræ A X P V erit duplum segmenti A P X in altera residui, hæc verò simul sumpta faciunt Triangulum A V P, vel A O P, quod est ergo triplum segmenti A P X, & tota figura A O P V ejus sextuplum, & area Parabolica A o P X, ejus quadruplum, est ergo area Parabolica ad Parallelogrammum A O P V ut 4. ad 6. sive ut 2. ad 3. Q. E. D.



HIS verò circa Conicas Sectiones ad mentem revocatis, sine quibus sequentia intelligi nequeunt, probabitur, *vim centripetam quâ corpus tendens ad punctum remotissimum Sectionem Conicam describit, esse reciprocè ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium tendentis:* Corpus P moveatur in Sectione conicâ PAF, & vis centripeta agat juxtà directionem parallelarum P S, R S, axi A B applicatarum. Linea PH, Sectionem tangat in P, sintque ZT, XB, axi parallelæ, & XA ipsa Tangens in A, & ob similia triangula XPB, ZTP, ZQR, erit $PX : BX$ (seu AM) $= PR : QT$ & $PX^2 : AM^2 = PR^2 : QT^2$, & (per Prop. 16. lib. 3. Conic. Appoll. quæ est Cor. 2. Lem. III. de Conicis) $PR^2 : QR \times FR = PX^2 : AX^2$, adeòque $PR^2 = \frac{PX^2 \times QR \times FR}{AX^2}$, ergò $PX^2 : AM^2 = \frac{PX^2 \times QR \times FR}{AX^2} : QT^2$; & $AX^2 : AM^2 = QR \times FR : QT^2$; undè $\frac{QT^2}{QR} = \frac{AM^2 \times FR}{AX^2} = \frac{AM^2 \times 2PM}{AX^2}$ ubi puncta P, Q, coeunt, & $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} = \frac{AM^2 \times 2PM \times SP^2}{AX^2}$. Est ergo (per coroll. I. & V. prop. VIæ.) in omnibus sectionibus conicis vis centripeta reciprocè ut $\frac{AM^2 \times PM \times 2SP^2}{AX^2}$, hoc est, deleto $2SP^2$, constante, reciprocè ut $\frac{AM^2 \times PM}{AX^2}$. Porrò ob similitudinem triangulorum HAX, HMP, est $HM : PM = HA : AX = \frac{PM \times HA}{HM}$ & $AX^2 = \frac{PM^2 \times HA^2}{HM^2}$ & $\frac{AM^2 \times PM}{AX^2} = \frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2}$, vis igitur est etiam in omni sectione conicâ reciprocè ut $\frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2}$.

In Parabolâ (per prop. 35. lib. 1. conic. appoll. sive cor. 1. Lem. V. de Conicis) $HA = AM$, & $HM = 2AM$, & (per prop. 20. lib. 1. conic. Appoll. quæ est Theor. I. de Parabola) AM, adeòque & HM est semper ut PM^2. Ergò vis centripeta in parabolâ erit reciprocè ut $\frac{4AM^4}{PM \times AM^2}$ sive ut $\frac{AM^2}{PM}$, hoc est, ut $\frac{PM^4}{PM} = PM^3$, hoc est, reciprocè ut cubus ordinatæ P M.

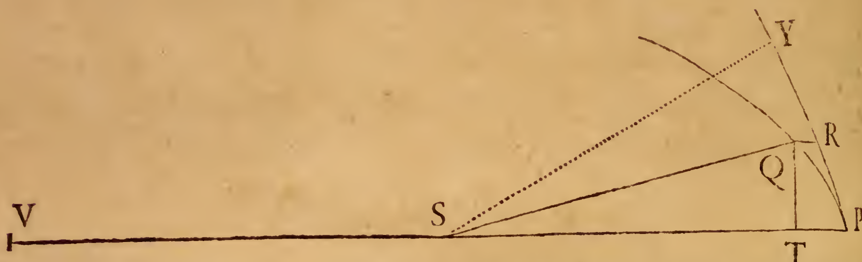
In Ellipsi & Hyperbolâ, si latus rectum axis A B, dicatur L, erit (ex prop. 21. lib. 1. conic. appoll. sive Theor. II. de Ellip.) $PM^2 : AM \times MB = L : AB$ ac proindè $AM = \frac{PM^2 \times AB}{L \times MB}$, & $AM^2 = \frac{PM^4 \times AB^2}{L^2 \times MB^2}$, & $\frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2} = \frac{PM^3 \times AB^2 \times HM^2}{L^2 \times MB^2 \times HA^2}$, undè deletâ ratione constanti $\frac{AB^2}{L^2}$, erit vis centripeta reciprocè ut $\frac{PM^3 \times HM^2}{MB^2 \times HA^2}$; verùm (per prop. 37. lib. 1. conic. Appoll. sup. cor. 2. Lem. V.) posito centro sectionis C, est $CM : CA = CA : CH$, adeóque dividendo vel componendo $CM : AM = CA : HA$, ac proindè addendo vel detrahendo terminos secundæ rationis è terminis prioris $MB : HM = CA : HA$ & $\frac{HM}{MB \times HA} = \frac{1}{CA}$ & $\frac{HM^2}{MB^2 \times HA^2} = \frac{1}{CA^2}$ quæ est quantitas constans. Erit igitur etiam in hyperbolâ & Ellipsi adeóque in omni sectione conicâ vis centripeta reciprocè ut PM^3, seu reciprocè ut cubus ordinatæ P M; deletâ nimirum, in expressione vis centripetæ suprà inventâ, quantitate $\frac{HM^2}{MB^2 \times HA^2}$, constante.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO IX. PROBLEMA IV.

Gyretur corpus in spirali PQS *secante radios omnes* SP, SQ, *&c. in angulo dato: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum spiralis.*

(f) Detur angulus indefinite parvus *PSQ*, & ob datos omnes angulos dabitur specie figura *SPRQT*. Ergo datur ratio $\frac{QT}{QR}$, estque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ ut *QT*, hoc est (ob datam specie figuram illam) ut *SP*. Mutetur jam utcunque angulus *PSQ*, & recta *QR* angulum contactus *QPR* subtendens mutabitur (per lemma XI.) in duplicatâ ratione ipsius *PR* vel *QT*. Ergo manebit $\frac{QT\ quad.}{QR}$ eadem quæ prius, hoc est ut *SP*. Quare $\frac{QTq \times SPq}{QR}$ est ut *SP cub.* ideoque (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta est reciprocè ut cubus distantiæ *SP*. *Q. E. I.*



(f) 225. Ob omnes angulos datos, dabitur specie figurâ SPQRT, & ipsius latera omnia erunt inter se in datâ seu constanti ratione, ergò datur ratio $\frac{QT}{QR}$, estque proindè $\frac{QT}{QR} \times QT$, ut QT hoc est, ob datam rationem QT, ad SP, erit $\frac{QT^2}{QR}$, ut SP, mutetur jam utcumque angulus PSQ, & manebit $\frac{QT^2}{QR}$, ut SP. Nam QR, ubi angulus PSR constans est dicatur a, & QT dicatur b; ubi verò angulus PSR utcumque mutatur, QR dicatur x, & QT dicatur y, & erit per Lem. XI. $a : x = b^2 : y^2$, adeóque $\frac{b^2}{a} = \frac{y^2}{x}$ hoc est $\frac{y^2}{x}$ seu $\frac{QT^2}{QR}$ eadem manet quæ priùs nimirùm ut SP. Quoniam autem evanescente angulo PSR, sive coeuntibus punctis Q, P, recta SR, rectæ SP parallela evadit, erit per coroll. 1. & v. prop. VI^{æ}. vis centripeta reciprocè ut $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR}$, ac proindè substituendo SP, loco $\frac{QT^2}{QR}$, vis centripeta erit reciprocè ut SP^3.

Idem aliter.

(t) Perpendiculum SY in tangentem demissum, & circuli spiralem concentricè secantis chorda PV sunt ad altitudinem SP in datis rationibus; ideoque SP *cub.* est ut $SYq \times PV$, hoc est (per corol. 3. & 5. prop. VI.) reciprocè ut vis centripeta.

LEMMA XII.

Parallelogramma omnia circa datæ ellipseos vel hyperbolæ diametros quasvis conjugatas descripta esse inter se æqualia.

Constat ex conicis. (y)

PROPOSITIO X. PROBLEMA V.

Gyretur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ellipseos. (z)

(t) 226. Sit circuli spiralem osculantis in P chorda per centrum virium S ducta P V, demissumque in tangentem perpendiculum S Y, & ob angulum S Y P, rectum, & S P Y, datum, dabitur specie triangulum S P Y. Ergò datur ratio S Y ad S P, & in virium centripetarum formulis S P scribi potest pro S Y. Prætereà datur ratio P V ad S P, nam (210) $SY \times QP = SP \times QT$, adeóque $QP = \frac{SP \times QT}{SY}$; undè ob rationem $\frac{SP}{SY}$ datam, Q P scribi potest pro Q T. Verùm (211) $PV = \frac{QP^2}{QR}$, ergò P V, est ut $\frac{QT^2}{QR}$. Cum igitur ex demonstratis in Prop. IX. $\frac{QT^2}{QR}$, sit ut S P, erit etiam P V, ut S P, & propterea S P, loco P V, substitui potest in formulis.

227. Scholion. Propositio IX. facilè demonstratur etiam per formulam Hermanni (214), $v = dp : p^3 dz$; est enim in hoc casu $SP = z$, $SY = p$; & si ratio $\frac{SY}{SP}$ data dicatur $\frac{a}{b}$, erit $\frac{a}{b} = \frac{p}{z}$ ergo $az = bp$, & (160) $adz = bdp$, & $\frac{dp}{dz} = \frac{a}{b}$; undè $v = \frac{a}{bp^3}$; hoc est, ob datam $\frac{a}{b}$ vis centripeta v, est directè ut $\frac{1}{p^3}$, hoc est reciprocè ut p^3, aut quia $p = \frac{za}{b}$, v erit ut $\frac{1}{z^3}$ directè, reciprocè autem ut z^3, deletis nimirùm constantibus.

(y) Demonstratio hujus Lemmatis inferius tradetur ubi nempe Newtonus eo Lemmate ad solutionem proximi Problematis utetur.

(z) 228. Gyretur corpus in Hyperbolâ, invenietur Lex vis centralis spectantis centrum Hyperbolæ simili modo, nisi quod vis illa ejus centri respectu sit centrifuga, quoniam centrum Hyperbolæ non est intra Hyperbolam constitutum, sed Hyperbola versus illud convexitatem obvertit; Legatur si lubet utraque solutio hujus Problematis & ad figuram infrà positam in quâ Hyperbola descripta est referatur, liquebit verè dici de Hyperbolâ ea quæ Newtonus de Ellipsi statuit.

Sunto CA, CB ſemiaxes ellipſeos; GP, DK diametri aliæ conjugatæ; PF, QT perpendicula ad diametros; Qv ordinatim applicata ad diametrum GP; & ſi compleatur parallelogrammum $QvPR$, erit ([a] ex conicis) rectangulum PvG ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (ob ſimilia triangula QvT, PCF) Qv *quad.* eſt ad QT *quad.* ut PC *quad.* ad PF *quad.* & conjunctis rationibus, rectangulum PvG ad QT *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & PC *quad.* ad PF *quad.* id eſt, vG ad $\frac{QT\ quad.}{Pv}$ ut PC *quad.* ad $\frac{CDq \times PFq.}{PCq}$ Scribe QR pro Pv, & (per lemma XII. [b]) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$

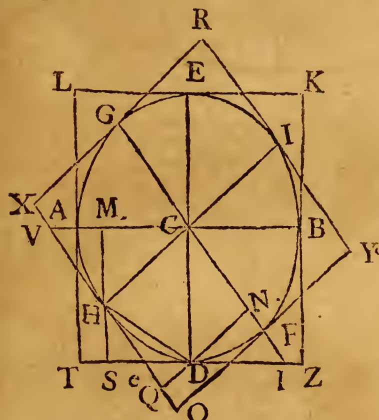
(a) *Ex Conicis*, per 21. 1. lib. Apoll. Vide Sup. Lemma IV. de Conicis.

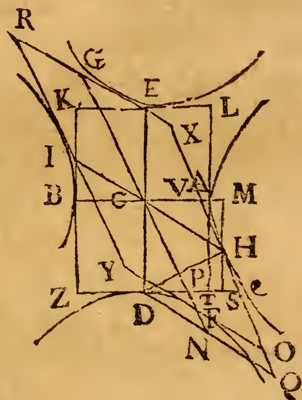
(b) 229. *Parallelogramma omnia circ[a] datæ Ellipſeos vel Hyperbolæ Diametros quaſ[...]*

nec non (punctis P & Q coeuntibus) $2PC$ pro vG, & ductis extremis & mediis in se mutuo fiet $\frac{QT\,quad. \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$. Est ergo (per corol. 5. prop. VI.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$; id est (ob datum $2BCq \times CAq$) reciprocè ut $\frac{1}{PC}$; hoc est, directè ut distantia PC. *Q. E. I.*

Idem aliter.

In rectâ PG ab alterâ parte puncti T sumatur punctum u ut Tu sit æqualis ipsi Tv; deinde cape uV, quæ sit ad vG ut est



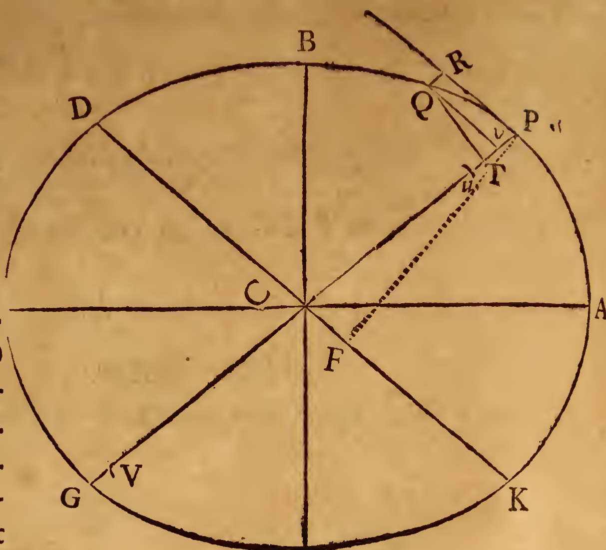


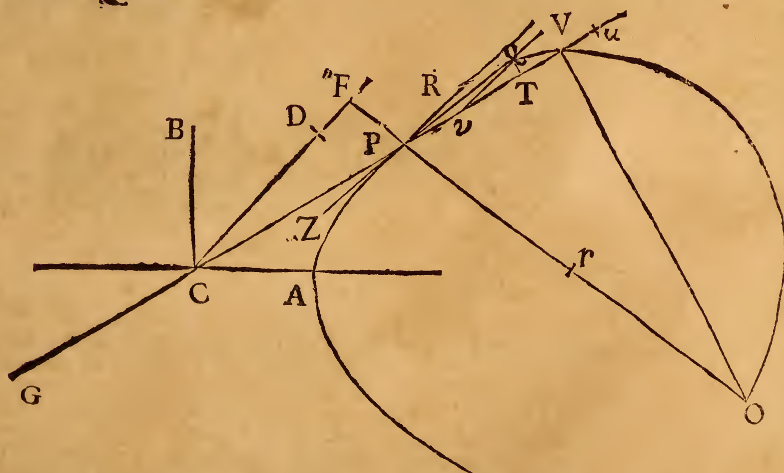
vis conjugatas descripta sunt inter se æqualia.

Dem . . . . . Sunto Ellipseos & hyperbolæ axes ED, AB, & GF, HI, diametri conjugatæ, ductisque per axium & diametrorum extrema tangentibus, describantur rectangulum LKZT, & parallelogrammum XRYO; jungatur DH, & DN ordinatim applicetur ad diametrum GF, erit (per prop. 37. lib. 1. conic. Apoll. sup. Cor. 2. Lem. V. de Conicis) PC ad CF, (hoc est, parallelogrammum PCVe, ad parallelogrammum æquè altum CHOF) sicut CF, ad CN, hoc est, sicut idem parallelogrammum CHOF, ad parallelogrammum CHQN; & similiter VC, erit ad CA, (hoc est, parallelogrammum PCVe, ad æquè altum, CATD) sicut CA ad CM, hoc est, sicut idem CATD, ad rectangulum CMSD, seu ad prædictum parallelogrammum CHQN; nam rectangulum CMSD, duplum est trianguli CHD, ejusdem basis CD ejusdemque altitudinis MC, & parallelogrammum CHQN est etiam ejusdem trianguli duplum, cum sit utriusque basis communis HC & eadem altitudo ob parallelas HC, QN; ac proindè CMSD = CHQN. Cum igitur sit PCVe : CHOF = CHOF : CHQN, & PCVe : CATD = CATD : CHQN, necesse est ut sit CATD = CHOF, quarè rectangulum LKZT, quadruplum rectanguli CATD, æquale est parallelogrammo XRYO, etiam quadruplo parallelogrammi CHOF. Q. E. D.

De Motu Corporum.

D C quad. ad *PC qu.* Et quoniam ex conicis est *Q v quad.* ad *P v G* ut *D C quad.* ad *PC quad.* erit *Q v quad.* æquale *P v* × *u V.* Adde rectangulum *u P v* utrinque, & prodibit quadratum chordæ arcûs (c) *PQ* æquale rectangulo *VPv*; (d) ideoque circulus, qui tangit sectionem conicam in *P* & transit per punctum *Q*, tran-





(c) *Adde Rectangulum u P v utrinque, & prodibit quadratum chordæ arcûs P Q, æquale rectangulo VP × Pv.* Nam (per construct.) est quadratum chordæ arcus PQ = QT² + PT², sed est QT² = Q v² − Tv² sive quia Tv = T u est QT² = Q v² − Tu², ideo quadratum chordæ arcus PQ = Qv² − Tu² + PT², est verò PT² − T u² = P T + Tu × P T − Tu sive PT − Tv = P u × P v, ergo quadratum chordæ arcus P Q = Q v² + P v × P u. Quod si Rectangulo P v × u V addas idem rectangulum P v × P u, est P v × V u + P v × u P = P v × V P, erat verò Q v² = P v × u V, ergo Q v² + P v × P u *sive quadratum chordæ arcus P Q erit æquale Rectangulo P v × V P, sive V P v.*

(d) *Ideòque circulus qui tangit sectionem in P, & transit per punctum Q, transibit etiam per punctum V*; nam ductis circuli illius chordis Q P, Q Y, angu-

lus

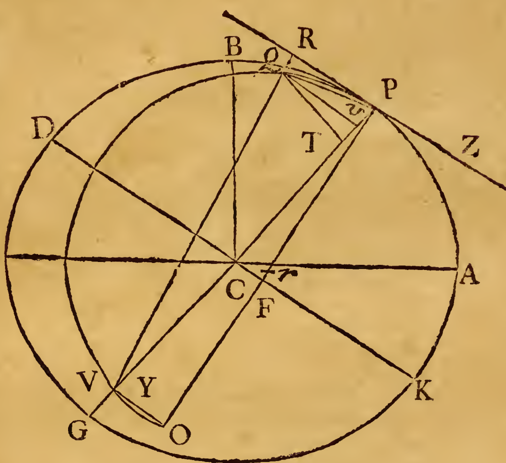
etiam per punctum V. Coeant puncta P & Q, & ratio uV ad vG, quæ eadem est cum ratione DCq ad PCq, fiet ratio PV ad PG seu PV ad $2\,PC$; ideoque PV æqualis erit $\frac{2\,DCq}{PC}$. Proinde vis, quâ corpus P in ellipsi revolvitur, erit reciprocè ut $\frac{2\,DCq}{PC}$ in PFq (per corol. 3. prop. VI.) hoc est (ob datum $2\,DCq$ in PFq) directè ut PC. *Q. E. I.* LIBER PRIMUS.

Corol. 1. Est igitur vis ut distantia corporis à centro ellipseos: ([e]) & vicissim, si vis sit ut distantia, movebitur corpus in el-

lus $PQv = QPR$, (ob parallelas Qv, PR) $= QYP$ (per 32. 3. Elem.) ac proindè duo triangula PQv, PYQ, quæ communem habent angulum, QPY, & æquales PQv, PYQ, similia sunt, & $Pv : QP = QP : PY$. Undè $PY = \frac{QP^2}{Pv}$; quarè cum sit $Pv \times PV = QP^2$, ideoque $PV = \frac{QP^2}{Pv}$ erit $PV = PY$.

230. Coroll. 1 . . . Ducantur circuli sectionem conicam osculantis diameter PO, & chorda VO, & ob similitudinem triangulorum PFC, PVO, erit $PF : PC = PV : PO = \frac{PC \times PV}{PF}$, sed per secundam demonstrationem Newtonianam $PV = \frac{2\,DC^2}{PC}$, ergò $PO = \frac{2\,DC^2}{PF}$, ac proindè radius osculi $Pr = \frac{1}{2}\,PO = \frac{DC^2}{PF}$, & $PF : DC = DC : Pr$. Quarè datis diametris conjugatis eorumque angulo PCD, facilè invenitur radius circuli sectionem conicam osculantis in diametri cujusvis extremo.

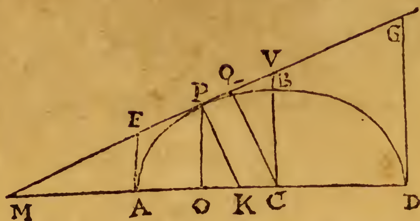
231. Coroll. 2 . . . Datis radio osculi Pr, semidiametro sectionis conicæ PC, & positione tangentis PR, seu angulo PCD, diametrorum conjugatarum, datur altera semidiameter conjugata DC, & describi potest sectio. His enim quæ diximus datis, datur quoque perpendicularis PF, ac proindè DC, media proportionalis inter Pr, & PF, (230) datas. Datis autem diametris conjugatis earumque angulo, sectio conica describi potest; ut notum est ex sectionum conicarum elementis.



232. Coroll. 3. Hinc etiam problema V. aliter solvitur. Cum enim sit vis centralis (212) ut $\frac{CP}{Pr \times PF^3}$, sitque $PF = \frac{BC \times CA}{CD}$, (per Lem. XII.) & $Pr = \frac{DC^2}{PF}$ (230). His valoribus in formulâ $\frac{CP}{Pr \times PF^3}$, substitutis, ea fit $\frac{CP}{BC^2 \times CA^2}$ hoc est, ob constantem quantitatem $BC^2 \times CA^2$, vis est directè ut PC.

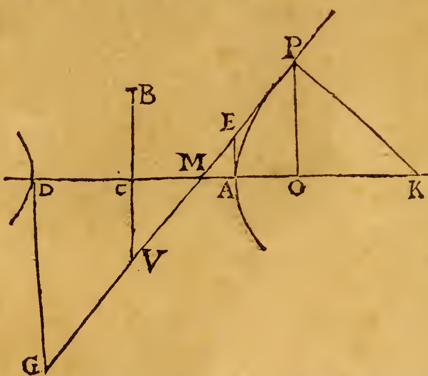
([e]) *Et vicissim si vis sit ut distantia, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in Centro Virium &c.*, ut hæc conversa demonstretur sequentia sunt præmittenda.

lipsi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem utique ellipsis migrare potest.



233. Lemma I. Ducatur in puncto contactus perpendicularis in Tangentem, ad axem terminatam, & à Centro ducatur ipsi Parallela ad Tangentem usque, harum linearum factum erit æquale quadrato semi-Axis.

Ex P ducatur perpendicularis in Tangentem PK, ducatur ordinata PO perpendicularis in axem, & in C, ducatur CQ, Parallela P, & CV, parallela PO, triangula POK CQV, erunt similia, ergo erit $PO:PK = CQ:CV$, ergo $PK \times CQ = PO \times CV$ similia etiam sunt Triangula CMV, OMP, erit ergo $CM:MO = CV:PO$; sed (per Cor. 2. Lem. V. de Conicis) est $CM = \frac{CA^2}{CO}$ & (per Cor. 3. ejusdem Lem.) $MO = \frac{AO \times DO}{CO}$ & (per Theor. II. tam de Hyp. quam de Ellip.) est $CA^2 : AO \times DO = CB^2 : PO^2$ ergo est $CM : MO = \frac{CA^2}{CO} : \frac{AO \times DO}{CO} = CA^2 : AO \times DO = CB^2 : PO^2 = CV : PO$, ideoque $CB^2 \times PO = PO^2 \times CV$ utrumque vero dividendo per PO est $CB^2 = PO \times CV$, erat verò $PK \times CQ = PO \times CV$. Ergo $PK \times CQ = CB^2$. Q. E. D.



234. Lemma II. Sit PM, Sectionis Conicæ Tangens, CA axis, CB ejus conjugatus, in utroque axeos primæ Vertice erigantur perpendiculares AE, DG, ad Tangentem usque, factum earum $AE \times DG$, erit æquale quadrato semi-Axis.

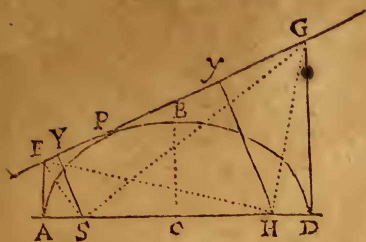
Demonst.... Ducta PO ordinata ad axem & CV ad Tangentem usque ipsi Parallela, erit (per Cor. 2. Lemm. V. De Conicis) $CO:CA = CA:CM$. Dividendo verò, est $CA - CO$ vel $CO - CA$, sive AO ad CA sive CD, sicut $CM - CA$ vel $CA - CM$, sive MA ad CM, hoc est $AO:CD = MA:MC$, jungendo terminos primæ rationis terminis secundæ hæc non mutatur, estque $MA : MC = MA + AO$ (sive MO) $: MC + DC$, (sive MD) hoc est alternando $MA : MO = MC : MD$ sed ob parallelas est $MA : MO = AE : PO$ & $MC : MD = CV : DG$ ergo est $AE : PO = CV : DG$ & est $AE \times DG = PO \times CV$ sed per Lemma præcedens est $PO \times CV = CB^2$. Ergo est $AE \times DG = CB^2$. Q. E. D.

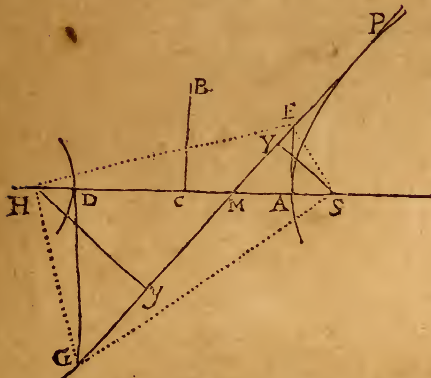
235. Lemma III. Ducantur à focis perpendiculares in Tangentem Sectionis Conicæ, earum factum erit æquale quadrato semiAxis.

Demonst.... Sint illæ perpendiculares SY, Hy, ducantur in utroque vertice axeos transversæ lineæ AE, DG, perpendiculares axi usque ad Tangentem, & ducantur à focis S & H, ad earum extremitates lineæ SE SG & HG HE.

Triangula EAS, SDG, EHG, GHy similia inter se, ut & Triangula GDH, HAE, GSE, ESY: Primò, similia sunt Triangula EAS, SDG quia latera EA & AS; SD & DG circa angulos rectos A & D posita proportionalia sunt, nam (per Lemma præced.) est $EA \times DG = CB^2$, & per naturam focorum (& per 5. vel 6. 2. Elem.) est $AS \times SD = CB^2$ ergo est $EA \times DG = AS \times SD$ ideoque $EA : AS = SD : DG$; Eâdem ratione probatur Triangula GDH, HAE esse similia, ob latera proportionalia GD & DH, HA & AE circa angulos rectos A & D posita, est enim ut prius $EA \times DG = CB^2 = DH \times HA$ ideoque $DG : DH = HA : EA$.

Secundò Triangula SDG, EGH sunt similia, latera enim GH & HE, GD & DS



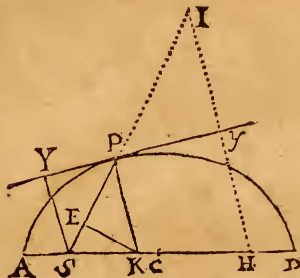


DS circà angulos SDG & EHG posita sunt proportionalia, nam ob triangula similia GDH, HAE, est $GH:HE=GD:HA$, sed $HA=DS$, ergo est $GH:HE=GD:DS$; Præterea anguli SDG & EHG sunt ambo recti, SDG quidem per constructionem, angulus verò EHG est in Ellipsi complementum ad duos rectos angulorum GHD & EHA, in Hyperbolâ eorum summa, cum autem illi duo anguli GHD & EHA pertineant ad Triangula Rectangula similia, simul sumpti faciunt Rectum, eorumque complementum ad duos rectos est recto æquale, ergo Angulus EHG est rectus; Eodem modo probatur Triangula HAE, GSE esse similia, ob latera proportionalia SE & GS, AE & HA, circa angulos HAE & GSE rectos posita; nam ob Triangula simillia EAS, SDG est $ES:GS=AE:DS$ sive HA; & HAE est rectus per constructionem & GSE in Ellipsi est complementum ad duos rectos angulorum GSD & EAS, & in Hyperbola eorum summa, illi verò Anguli pertinent ad Triangula Rectangula similia &c.

Tertio EGH est simile HGy (per 8. 6. El.) & eadem ratione est GSE simile ESY.

Ex quibus liquet Triangula EAS, GHy esse similia ut & Triangula GSE, ESY; ex similitudine Triangulorum EAS, GHy est $ES:GH=EA:Hy$, & ex similitudine Triangulorum GDH & ESY est $ES:GH=SY:GD$ ergo est $EA:Hy=SY:GD$ & $EA\times GD=Hy\times SY$ sed $EA\times GD=CB^2$ per Lemma præcedens, ergo etiam $Hy\times SY=CB^2$. Q. E. D.

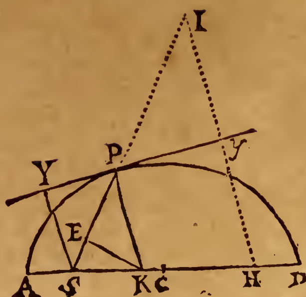
236. Lem. IV. Ducatur à foco S linea SP ad punctum contactûs & ex puncto P contactus ducatur perpendicularis in Tangentem quæ secet axem in K, & ex puncto K ducatur in lineam SP perpendicularis KE, pars PE lineæ PS erit æqualis semilateri recto.

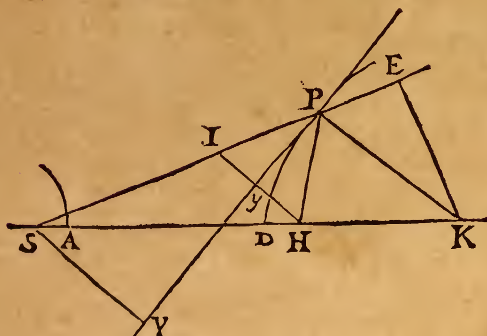


Producatur vel secetur SP in I ut sit SI = AD sive Axi, ducaturque ex altero foco linea HI quæ dividitur bifariam & perpendiculariter per Tangentem in y (per Theor. III. de Hyp. & IV. de Ellip.) ergo $HI=2Hy$ & est HI parallela PK, ergo Triangula PSK ISH sunt similia, estque $PS:PK=SI:IH$ sive $2Hy$, sed ob Parallelas SY, PK, & angulos rectos Y & E similia sunt Triangula PSY, PKE, ergo est $PS:PK=SY:PE$, est ideo $SI:2Hy=SY:PE$ & PE

2 Hy

De Motu Corporum.

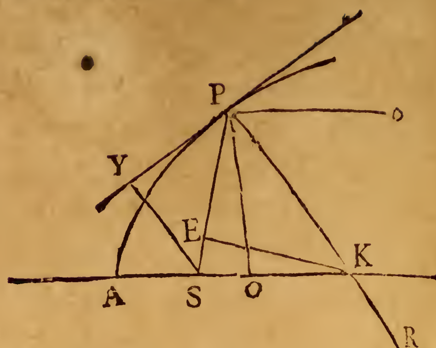




$= \frac{2Hy \times SY}{SI}$ sed $Hy \times SY = CB^2$ & $SI = 2AC$, ergo $PE = \frac{2CB^2}{2AC}$ & $2PE = \frac{4CB^2}{2AC}$ sed Latus Rectum L est $\frac{4CB^2}{2AC}$, ergo $2PE = L$, five PE est dimidium lateris Recti.

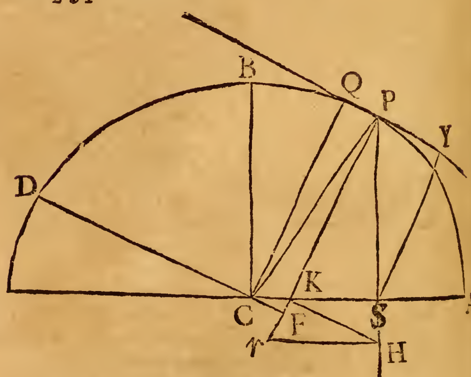
237. 1. Coroll. Ex eo quod est $PS : PK = SY : PE$ five $\frac{1}{2} L$, est $SY = \frac{L \times PS}{2PK}$ & $PK = \frac{L \times PS}{2SY}$

238. 2. Cor. Hoc Lemma cum suo Corollario de Parabola etiam verum est, sed aliter demonstratur, ducta ordinata PO Triangula PKO, PKE sunt æqualia, propter Angulos rectos in O & E; latus PK commune, & angulum PKO angulo KPE æqualem, ducto enim Diametro Po, erit OPK æqualis PKO ob Parallelas AK & Po sed oPK est etiam æqualis angulo KPE quia perpendicularis dividit bifariam angulum SPo (per Theor. III. de Parab.) ergo angulus $PKO = KPE$, & (per 26. 1. Elem.) Triangulum PKO est æquale Triangulo PKE ideoque $PE = KO$,



sed KO est æqualis semilateri recto (per Theor. III. de parab.) ergo & PE.

239. Lemma V. In omni sectione conicâ cujus focus S, PY, tangens in P, SY & PK, tangenti perpendiculares, *L*, latus rectum, est radius osculi $Pr = \frac{4PK^3}{L^2} = \frac{L \times SP^3}{2SY^3}$ . . .



Dem : . . . Sit APB ellipsis cujus semiaxes AC, BC, semidiametri conjugatæ PC, DC, ac proindè DF, tangenti PY parallela, atquè adeò PF, QC, tangenti perpendiculares æquales sunt. Est (per Lem. XII. Newt.) $CD : BC = AC : PF$, & $CD^2 : BC^2 = AC^2 : PF^2$, ideoque est $CD^2 = \frac{BC^2 \times AC^2}{PF^2}$ Et quia $BC^2 = CQ \times PK$ five $PF \times PK$ (233.) est $CD^2 = \frac{PF \times PK}{PF^2} \times AC^2 = \frac{PK \times AC^2}{PF}$; sed est $Pr = \frac{CD^2}{PF}$ (230.) ergo

ergo est $Pr = \frac{PK \times AC^2}{PF^2}$; est autem $AC : BC = BC : \frac{1}{2} L$, ergo $BC^2 = \frac{1}{2} L \times AC$ ideoque $PF \times PK = \frac{1}{2} L \times AC$, ergò $PF = \frac{L \times AC}{2PK}$ & $PF^2 = \frac{L^2 \times AC^2}{4PK^2}$ idque substituatur in valore Pr mox reperto erit $Pr = \frac{4PK^3}{L^2}$, & quia $PK = \frac{L \times SP}{2SY}$ (237.) erit $\frac{4PK^3}{L^2} = \frac{L \times SP^3}{2SY^3} = Pr$. Q. e. 1um.

Idem eodem prorsùs modo demonstratur in hyperbolâ. Q. e. 2um.

In Ellipsi crescente focorum distantiâ manet $Pr = \frac{4PK^3}{L^2} = \frac{L \times SP^3}{2SY^3}$, adeóque idem etiam verum est cum focorum distantia infinita evadit, seu cum Ellipsis in Parabolam mutatur. Q. e. 3um.

240. Coroll. 1... Ex his facillima oritur constructio pro determinando radio curvaturæ in quâvis sectione conicâ. Ex K, enim super PK, erigatur perpendicularis KH, cum PS concurrens in H; ex H erigatur super PH perpendicularis Hr, erit Pr, radius curvaturæ. Nam ob angulos rectos PKH, PHr, & lineas PK, SY, parallelas est $SP : SY = Pr : PH = PH : PK$, atque indè $SY^2 : SP^2 = PK : Pr$; adeóque $Pr = \frac{PK \times SP^2}{SY^2}$ sed $SY = \frac{L \times SP}{2PK}$ (237), ergò $Pr = \frac{4PK^3}{L^2}$, ac proindè Pr est radius osculi (239.).

241. Coroll. 2... Quoniam in verticibus sectionum conicarum principalibus $SP = SY$, erit ibi $Pr = \frac{L \times SP^3}{2SY^3} = \frac{L}{2}$, seu radius osculi æqualis dimidio lateris recti principalis.

242. Theor. Datis in puncto P, vis centripetæ quâ corpus curvam PpB describit quantitate absolutâ, vis illius directione PS, velocitate corporis, & positione tangentis PQ, datur curvæ PpB curvatura in P, seu radius osculi Pr.

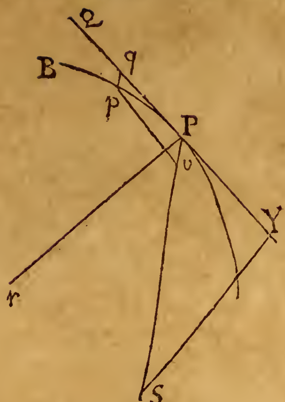
Dem.. Sit curvæ PpB, & circuli osculatoris arcus infinitesimus Pp, & quoniam velocitas corporis P revolventis finita supponitur, vis centripeta constans est, & illius directio sibi parallela per arcum Pp,

adeòque arcus ille est portio parabolæ cujus tangens PQ, & diameter PS (ex notâ 40â.) Quoniam autem vis centripetæ quantitas absoluta in P, data est, datumque proindè spatium quod corpus vi illâ constante, dato tempore percurreret, & prætereà corporis P velocitas, ac tangentis PQ positio data sunt, data est ratio qp sive Pv ad Pq sive pv, data ergo est parabola quam corpus P describeret, si vis centripeta eadem maneret & directionem haberet lineæ PS perpetuò parallelam. Cum igitur datus sit radius circuli parabolam datam in dato puncto osculantis (239.) datur Pr, radius osculi in puncto P. Q. e. d.

243. Coroll. Hinc datis in puncto P, curvaturâ seu radio osculi Pr, positione tangentis PQ, velocitate corporis, & vis centripetæ directione PS, datur vis illius quantitas absoluta in P; nam propter datas positionem Tangentis, & vis directionem, datur ratio SP ad SY & SP^3 ad SY^3, sive $\frac{SP^3}{SY^3}$ & propter datum $Pr = \frac{L \times SP^3}{2SY^3}$ datur $\frac{L}{2}$ sive L Latus rectum principale Parabolæ cujus arcus Pp est portio, PS Diameter & PQ Tangens unde datur tota Parabola & Latus rectum Diametri PS; Denique cum data sit velocitas corporis in P datur lineola Pq, vel pv dato tempore descripta, datur ergo abscissa Pv sive qp quæ est vis centripetæ quantitas absoluta.

Datis verò in P, vis centripetæ quantitate absolutâ, vis illius directione PS, positione tangentis PQ, radio osculi Pr, sive datâ curvaturâ, datur velocitas corporis in P;

De Motu Corporum.

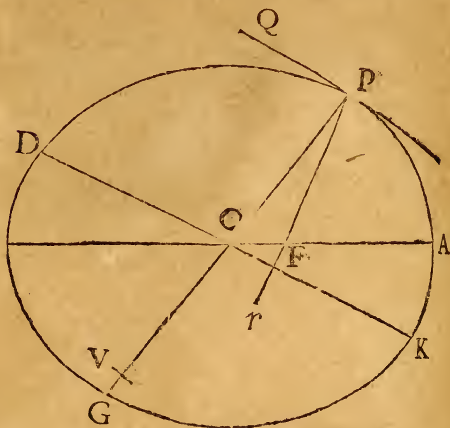


& generatim si ex his quinque, nimirum, vis centripetæ quantitate absolutâ, illius directione, velocitate corporis, positione tangentis & curvaturâ, quatuor data fuerint, quintum determinatum est.

244. Theor. Corpus P, circà centrum virium S datum revolvendo, curvam P p B describat, sintque data, vis centripetæ quantitas absoluta in puncto P, data lex secundum quam in variis à centro S distantiis vis centripeta agit, positio tangentis P Q, & curvatura in P, determinata ac unica est curva P p B, quam corpus P, circà centrum virium S, potest describere.... Dem... Quoniam datur centrum virium S & punctum P, datur quoque positio rectæ P S, hoc est, directio vis centripetæ, ac proindè ex cæteris etiam datis (243.) datur velocitas quâ corpus in puncto P movetur; sed datis in puncto P, vis centripetæ quantitate absolutâ, positione tangentis seu rectæ secundùm quam projicitur corpus, velocitate projectionis determinatur proximum punctum p, tangentis in eo puncto p positio, corporis P in eo velocitas, ut & novâ distantiâ à centro p S, sed datâ lege vis centripetæ in variis à Centro distantiis, datur iterum in puncto novo p, vis centripeta, unde proximum punctum etiam determinabitur, ex his ergo datis omnia puncta curvæ P p B, successivè determinantur; ergo data ac unica est curva quam corpus P, his datis describere potest. Q. e. D.

Coroll. Iisdem manentibus, si describatur nova curva quæ curvam P p B quam corpus P describit osculetur in P, quæque proindè eandem habet tangentem P Q, ut potè radio osculi P R, perpendicularem, impossibile est ut datis iis quæ numero 244. posuimus, corpus P, hanc novam curvam a priori diversam describat, hoc est, verba Newtoni ferè usurpando, orbes duo se mutuò osculantes eâdem vi centripetâ describi non possunt.

245. Hisce positis tandem probabimus quòd si vis centripeta sit ut distantia à centro, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in centro virium, aut fortè in circulo in quem Ellipsis migrat focis coeuntibus.



Data sint centrum virium C, & vis centripetæ quantitas absoluta, data à centro distantia C P, & corpus datâ cum velocitate secundùm directionem datam rectæ P Q projiciatur, erit P Q tangens curvæ describendæ. Si fuerit C P ad tangentem P Q normalis, & velocitas quâ corpus P, projicitur æqualis velocitati quam idem corpus solâ vi centripetâ, ut est in P, constante sollicitatum acquireret, cadendo per dimidium radium P C, curva describenda erit circulus cujus centrum C, & radius C P (201.) si verò talis non fuerit velocitas projectionis, corpus P, aliam curvam describet, in quâ tangens P Q, non semper erit ad radium vectorem C P perpendicularis, cum hæc sit solius circuli proprietas, ut notum est. Sit ergò P Q ad radium vectorem C P obliqua, per centrum C ducatur recta C K, ipsi P Q paral-

Corol. 2. (d) Et æqualia erunt revolutionum in ellipsibus universis circum centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in ellipsibus similibus æqualia sunt (per corol. 3. & 8. prop. IV.) in ellipsibus autem communem habentibus axem majorem sunt ad invicem ut ellipseon areæ totæ directè, & arearum particulæ simul descriptæ inversè; id est, ut axes minores direc-

parallela, & radio osculi P r dato (242) describatur circulus rectam PC intersecans in V; tùm sumatur CK, media proportionalis inter CP, & $\frac{1}{2}$ PV, & semidiametris conjugatis CP, CK, describatur ellipsis PDGA, ea erit orbita quam corpus *P*, describet... Dem... Ellipsis PDGA, describi potest per corpus aliquod *A* sollicitatum vi aliquâ centripetâ ad centrum C tendente, quæque sit semper ut distantia ab illo centro CP, (prop. X.) ponamus velocitatem corporis *A*, eandem esse ac velocitatem projectionis corporis *P*, & ex datâ velocitate corporis illius *A*, directione tangentis PQ directione vis CP, & curvaturâ Ellipsis in P, datur vis centripetæ quantitas absoluta (242.) quâ corpus *A*, in Ellipsi motum retinetur in puncto P, sed eadem est ellipsis illius, & orbitæ quam corpus P describit, curvatura; nam P r est radius circuli Ellipsim PDGA osculantis in P, (per const. & secun. demonst. Newt. Prop. X.) est quoque radius circuli curvam quam corpus *P* describit osculantis in eodem puncto P, (per constr.) adeóque Ellipsis PDGA, & orbita quam corpus *P* describit eandem habent curvaturam in puncto P, præterea recta PQ, orbitæ tangens cum sit diametro CK parallela ellipsim tangit in P, idem est orbitæ & ellipsis centrum C, idem punctum P, eadem velocitas projectionis, eadem lex vis centripetæ ac proindè eadem vis illius quantitas absoluta in puncto P, tam in ellipsi quam in orbitâ à corpore *P* describendâ; cum igitur iis datis corpus *P* unicam curvam describere possit & reverâ ellipsim PDGA, possit describere, si vis centripeta sit ut distantiâ à centro (nec circulus describatur) corpus movebitur in Ellipsi centrum habente in centro virium. Q. e. D.

246. Si vis centrifuga sit ut distantia à centro, eodem modo demonstratur corpus moveri in hyperbolâ centrum habente in centro virium.

(d) 247. Ut demonstretur *æqualia esse revolutionum circa idem centrum factarum periodica tempora in Ellipsibus universis ista ex Conicis sunt repetenda.*

Lemma...... Area circuli AFB, cujus radius FC æquatur semiaxi AC ellipsis AEB, est ad hujus Ellipseos aream ut semiaxis AC, seu FC, ad alterum semiaxem EC... Dem... Axis AB, divisus intelligatur in particulas innumeras æquales lineolæ MN, & per singula divisionum puncta erigantur rectæ PM, QN, axi perpendiculares. Quoniam ex circuli & Ellypsis naturâ, $FC^2 : QN^2 = AC \times CB : AN \times NB = EC^2 : TN^2$, erit $FC : QN = EC : TN$, & $FC : EC = QN : TN$; verùm ejusdem basis rectangula NL, NO, sunt ut altitudines NQ, NT, ac proindè $NL : NO = FC : EC$; ergò ultima summa rectangulorum evanescentium ut NL, ad summam rectangulorum evanescentium ut NO, hoc est, area circuli ad aream Ellipsis (per Lem. IV.) ratio-

directè, & corporum velocitates in verticibus principalibus inversè; hoc est, ut axes illi minores directè, & ordinatim applicatæ ad idem punctum axis communis inversè; & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inversarum) in ratione æqualitatis.

Scho-

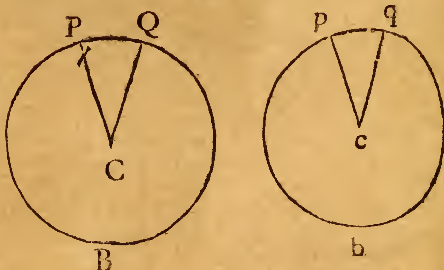
tionem habet semiaxis F C, ad alterum semiaxem E C. Q. e. D.

248. Coroll. 1 ... Idem eodem prorsùs modo demonstratur, si A F B fuerit Ellipsis communem axem A B, habens cum Ellipsi A E B. Et generatim duæ quævis figuræ A F B, A E B, quarum semiordinatæ Q N, T N, sunt in datâ ratione & quarum est communis diameter A B, sunt inter se in ratione datâ ordinatarum Q N, T N.

249. Coroll. 2. Area circuli cujus diameter est medius proportionalis inter duos Ellipsis axes æqualis est areæ Ellipsis. Nam sit $EC : R = R : FC$, & radio R, describatur circulus, illius circuli area, erit ad aream circuli A F B, ut R^2 ad FC^2, adeóque ut E C ad F C; Quarè cum Ellipsis A E B, eandem habeat rationem ad circulum A F B (247), manifestum est aream circuli radio R, descripti æqualem esse areæ Ellipsis A E B.

250. Coroll. 3 ... Quoniam $R^2 = FC \times EC$, & areæ circulorum sunt ut radiorum quadrata, erunt areæ Ellipsium ut axium rectangula.

251. Coroll. 4 ... Patet etiam in Ellipsibus vel ellipsi & circulo aut etiam in quibuslibet curvis quarum ordinatæ Q N, T N, datam habent rationem, & quarum est diameter communis A B, aream MRB, esse ad aream correspondentem M P B, ut est E C, ad F C, seu ut R M ad P M; sed ductis ex quocumque diametri puncto S, rectis S P, S R, est etiam triangulum S M R, ad triangulum S M P, ut M R ad M P, ob communem utriusque trianguli altitudinem M S; ergò sector S B R, est ad sectorem S B P, in ratione datâ E C, ad F C.

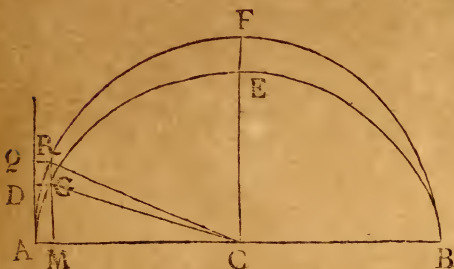


252. Theor. Corpora duo P, p, circa virium centra C, c, revolvendo, orbitas PQB, p q b, describant; tempus periodicum in orbitâ P Q B, est ad tempus periodicum in alterâ orbitâ p q b, ut area P Q B P, ad aream p q b p, directè & sectores P C Q, p c q, simul descripti inversè .... Dem.... ob æquabilem arearum circà centra C, c, descriptionem (prop. I.) tempus periodicum T, in orbe P Q B, est ad tempus t, quo describitur sector P C Q, ut area P Q B P, ad sectorem P C Q, & similiter tempus t, quo describitur sector p q c, est ad tempus periodicum θ, in orbe p q b, ut sector p c q, ad aream p q b p, hoc est $T : t = PQBP$ area $: PCQ$, & $t : \theta = pcq : pqbp$ area, undè per compositionem rationum & ex æquo $T : \theta = PQBP \times pcq : pqbp \times PCQ$. Q. e. D.

253.

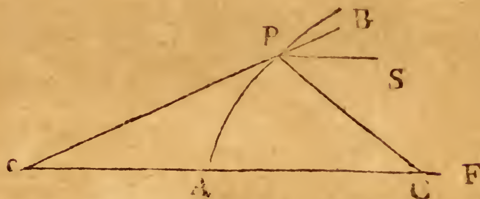
Scholium.

Si ellipsis centro in infinitum abeunte vertatur in parabolam, corpus movebitur in hac parabola; & vis ad centrum infinitè distans jam tendens evadet æquabilis. Hoc est theorema *Galilæi*. ([e]) Et si coni sectio parabolica (inclinatione plani ad conum sectum mutata) vertatur in hyperbolam, movebitur corpus in hujus



253. Si corpora duo Ellipses A E B, A F B, quarum est axis communis A B, describant, viribus ad centrum Ellipsium C tendentibus, tempora periodica erunt æqualia ... Dem ... Sint arcus A R, A G, infinitesimi eodem tempore descripti, A Q tangens ad verticem A, Q R, D G, axi A B, parallelæ, & quoniam vires centrales sunt ut Q R, D G (prop. VI.) & ob communem distantiam à centro A C, æquales sunt vires, seu eadem vis (prop. X.) erit Q R = D G, sectores verò A C G, A C R, sunt ut G M, R M, seu E C, F C, (251), & areæ Ellypsium A E B, A F B, sunt etiam ut E C, F C, (247. 248.) quarè cum tempora periodica in illis Ellipsibus sint ut areæ A E B A F B directè & sectores A C G, A C R, inversè (252.) erunt eædem ut E C ad F C directè, & E C ad F C inversè, hoc est, ut E C×F C ad F C×E C, ac proindè in ratione æqualitatis. Q. e. D.

254. His positis facilè *demonstratur æqualia esse revolutionum in Ellipsibus universis circum centrum idem factarum periodica tempora.* Nam! duæ quævis ellipses circà idem centrum descriptæ dicantur A, & B, describatur tertia Ellipsis C, similis Ellipsi A, & axem unum communem habens cum Ellipsi B, tempora periodica in Ellipsibus similibus A & C, sunt æqualia (per corol. 3. & 8. prop. IV. Newt.) & tempora periodica in ellipsibus C, & B, axem alterum communem habentibus sunt etiam æqualia (253.) tempora igitur periodica in Ellipsibus quibusvis A & B sunt æqualia. Q. e. D.



([e]) 255. *Et si coni sectio parabolica (inclinatione plani ad conum sectum mutata), vertatur in hyperbolam movebitur corpus in hujus perimetro vi centripetâ in centrifugam versâ.* Cum enim Ellypsis centrum C, à vertice A, in plagam F abit, vis centripetæ directio est per lineas P C, P F, à puncto P, ad centrum, & ubi infinita evadit distantia P C, atque P S, ad centrum ducta axi parallela fit, Ellipsi in parabolam mutatâ, directio est à puncto P, ad S, secundum lineam P S; mutatâ in Hyperbolam parabolâ, & centro ad alteram verticis A partem translato in c, vis centralis directio est secundùm lineam P B, à P ad B, hoc est, à centro C, ad P c, adeòque in centrifugam versa (228.)

De Motu Corporum.

hujus perimetro vi centripetâ in centrifugam versâ. Et quemadmodum in circulo vel ellipſi ſi vires tendunt ad centrum figuræ in abſciſsâ poſitum, hæ vires augendo vel diminuendo ordinatas in ratione quâcunque datâ, vel etiam mutando angulum inclinationis ordinatarum ad abſciſſam, ſemper augentur vel diminuuntur in ratione diſtantiarum á centro, ſi modo tempora periodica maneant æqualia; (f) ſic etiam in figuris univerſis ſi ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione quâcunque datâ, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore pe-

256. Ex quibus ſequitur hæc generalis Lex; Si corpus revolvatur in ſectione conicâ, & vis centralis tendat ad ſectionis centrum, aut à centro, vis illa erit directè ut diſtantia à centro, & contrà ſi vis fuerit ut diſtantia à centro, corpus movetur in ſectione conicâ. (245. 246.)

(f) 257. *In figuris univerſis, ſi ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione datâ vel angulus ordinationis mutetur, manente tempore Periodico, vires augentur vel minuuntur in ratione diſtantiarum a Centro.* Hujus veritas ſequentium Lemmatum ope patebit.

Lemma. In figurâ quâvis A Q D, cujus diameter A D, ad hanc diametrum ordinatæ Q E, N G, augeantur vel minuantur in ratione datâ Q E, ad P E, vel ad angulum quemvis datum P E D, inclinentur, novaque deſcribatur curva A P D, per novarum ordinatarum extrema tranſiens, ſitque centrum virium C, in diametro poſitum utrique curvæ commune, rectæ P H, Q h, quæ curvas in punctis correſpondentibus Q, P, tangunt, ad idem diametri punctum H convergunt.... Dem... Ductis rectis P t, Q v, diametro A D parallelis, erit Q v = G E, = P t, & (per hypotheſim) n v : m t = E Q : E P, unde & alternando n v : E Q = m t : E P, & coeuntibus punctis n & Q, m & P, erit propter ſimilitudinem triangulorum n v Q & Q E h m t P & P E H

n v : E Q = Q v (G E) : E h
m t : E P = P t (G E) : E H

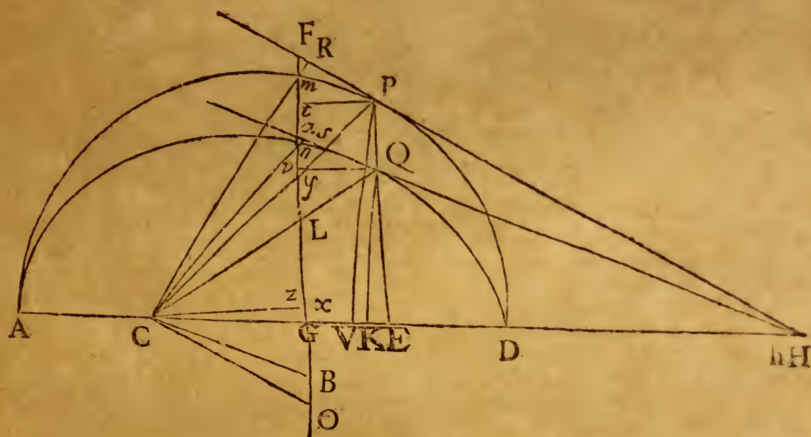
Cum ergo ſit n v : E Q = m t : E P, erit G E : E h = G E : E H, ideoque E H = E h, ac proindè tangentes ad idem diametri punctum H convergunt. Q. e. D.

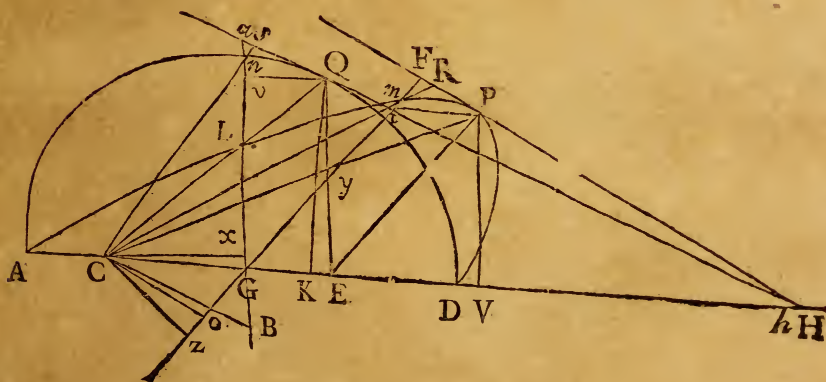
258. Lemma. Iiſdem manentibus ſector evaneſcens, C Q n, eſt ad ſectorem C P m, in alterâ curvâ correſpondentem ut area A Q D, ad aream A P D... Dem. ob parallelas G m & E P, G n, & E Q, eſt G y : C G = E P : C E & C G : G L = C E : E Q undè ex æquo G y : G L = E P : E Q = G m : G n (per conſt.) & hinc G m − G y : G n − G L = y m : L n = G m : G n = E P : Q E. Ex puncto C, demittantur in G m, & G n, perpendiculares C z, C x; & ex punctis P & Q, in diametrum A D, perpendiculares P V, Q K, & erit triangulum C y m : triang. C L n = y m × C z : L n × C x = G m × C z : G n × C x. Verum ob ſimilia triangula C z G, & P V E, C x G & Q K E, eſt C z : C G = P V : P E, & C G : C x = Q E : Q K : atquè adeò per compoſitionem rationum C z : C x = P V × Q E : Q K × P E = P V × G n : Q K × G m (per conſtr.) cum ergo ſit triangulum C y m : triang. C L n = G m × C z : G n × C x = G m × P V × G n : G n × Q K × G m = P V : Q K, & P V ſit ad Q K, ut parallelogrammum G E P m, ad parallelogrammum G E Q n, hoc eſt, (per Lem. IV.) & per conſtruct. ut area A P D, ad aream A Q D; ergò triangula C y m, C L n, ſunt in ratione arearum A P D, A Q D; at punctis m & P, n & Q coeuntibus, ſector C P m, æquatur triangulo C y m, & ſector C Q n triangulo C L n; ſunt igitur ſectores illi evaneſcentes ut areæ A P D, A Q D, directè. Q. e. d.

259. Theor. Iiſdem manentibus, ſi tempora

periodico; vires ad centrum quodcunque in abſciſsâ poſitum tendentes in ſingulis ordinatis augentur vel diminuuntur in ratione diſtantiarum à centro.

SEC-



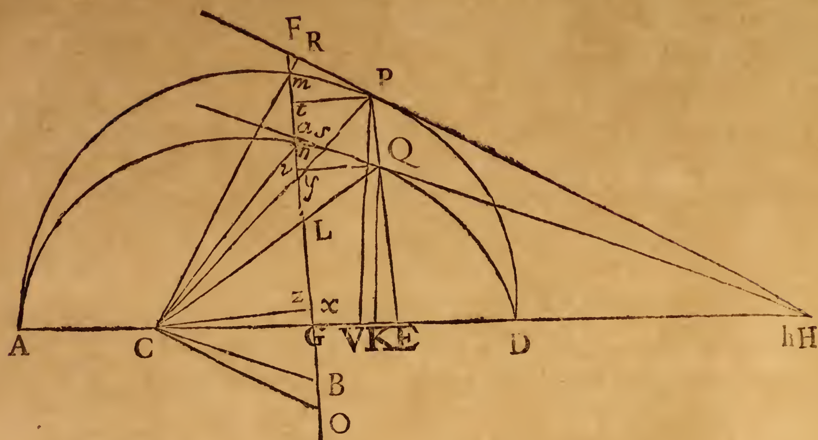


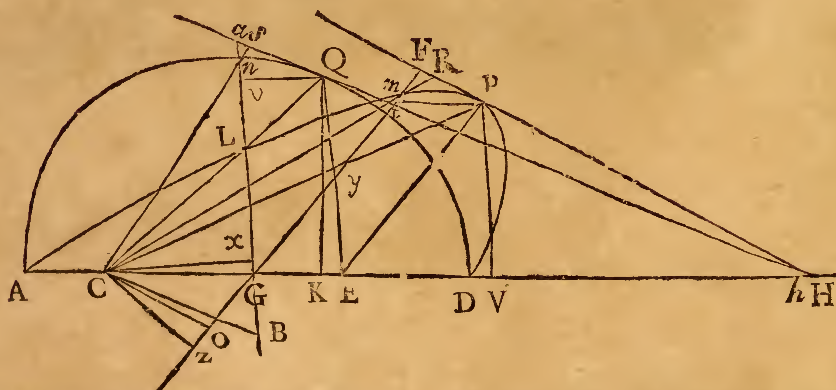
pora periodica in curvis APD, AQD fuerint æqualia, vires centripetæ in punctis correſpondentibus P & Q erunt inter ſe ut diſtantiæ à centro CP, CQ.

Demonſt. Figura AQD rectis ex centro C ductis in ſectores innumeros inter ſe æquales, ut CQn, & figura APd, in totidem ſectores correſpondentes, ac proindè etiam inter ſe æquales (258), ut CPm diviſæ intelligantur; & ob eumdem

ſecto-

DE MOTU CORPORUM.





sectorum in utrâque figurâ numerum, æquabilem illorum descriptionem (prop. I.) & æqualia tempora periodica, sectores C P m, C Q n, æquali tempore describentur. Quare (per prop. VI). Vires centripetæ in punctis P & Q, sunt inter se ut rectæ m R, n S, punctis m & P, n & Q coeuntibus; verùm propter Parallelas Q E, a G & P E, F G, est, a G : F G = Q E : P E, (257) & quia n G & m G in eadem sunt ratione, iis ex a G & F G subductis manent a n ad F m sicut Q E ad P E; ductis autem ex C, Parallelis C B C O ad tangentes a H F H, Triangula BCG & O G C sunt similia triangulis a G H, FGH unde est

B G : a G = G C : G H

& O G : F G = G C : G H ideoque B G : O G = a G : F G = Q E : P E = n G : m G & jungendo terminos primæ & secundæ rationis terminis ultimæ est B n : O m = Q E : P E = a n : F m. Denique quia ob C B, C O, Tangentibus a H F H Parallelas, similia etiam sunt Triangula, a n S & n C B, F m R & m C O, est

B n : n a = C n : S n

& est F m : m O = R m : m C, & Compositis Rationibus est B n × F m : n a × m O = C n × R m : S n × m C, sed quia B n : O m = a n : F m, est B n × F m = a n × O m, ergo etiam C n × R m = S n × m C, ideoque C n : C m = R m : S n; sive distantiæ à Centro in eâdem sunt ratione ac vires Centrales.

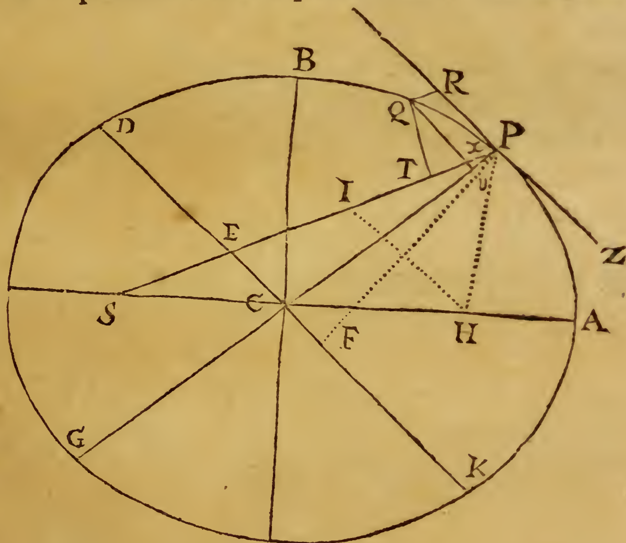
SECTIO III.

De motu corporum in conicis sectionibus excentricis.

PROPOSITIO XI. PROBLEMA VI.

Revolvatur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum ellipseos.

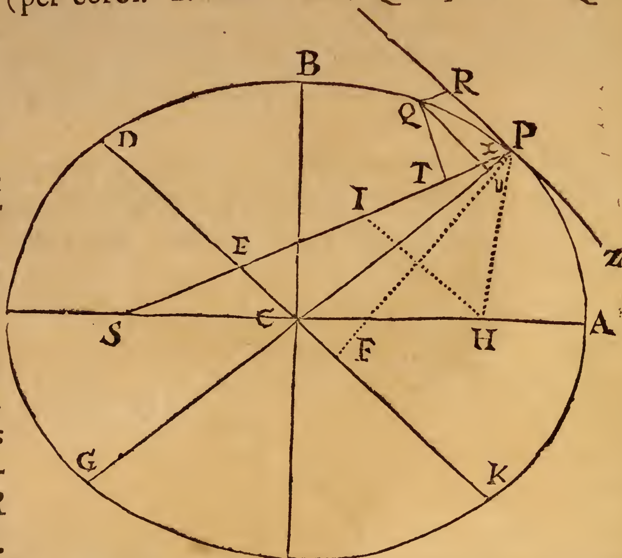
Esto ellipseos umbilicus *S*. Agatur *SP* secans ellipseos tum diametrum *DK* in *E*, tum ordinatim applicatam *Qv* in *x*, & compleatur parallelogrammum *QxPR*. Patet *EP* æqualem esse semiaxi majori *AC*, eo quod, actâ ab altero ellipseos umbilico *H* lineâ *HI* ipsi *EC* parallelâ, ob æquales *CS*, *CH* æquentur *ES*, *EI*, (g) adeo ut *EP* semisumma sit ipsarum *PS*, *PI*, id est (ob parallelas *HI*, *PR*, & angulos æquales *IPR*, *HPZ*) ipsarum *PS*, *PH*, quæ conjunctim axem totum 2*AC* adæquant. Ad *SP* demittatur perpendicularis *QT*, & ellipseos latere recto prin-



(g) 260. Quia (per prop. 48. lib. 3. conic. Apoll. sup. Theor. IV. de Ellipsi) æquales sunt anguli quos rectæ PH, PS, constituunt cum tangente PR, & ob parallelas HI, PR, æquales quoque sunt anguli alterni PIH, PHI, æquales erunt rectæ PI, PH, adeóque $EP = \frac{PS + PH}{2} = AC$, (prop. 52. lib. 3. conic. apoll. superius Theor. III. de Ellip.).

De Motu Corporum.

principali (seu [h] $\frac{2\,BC\,quad.}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv [i] id est, ut PE seu AC ad PC; & $L \times Pv$ ad GvP ut L ad Gv; & [k] GvP ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (per corol. 2. lem. VII.) Qv *quad.* ad Qx *quad.* punctis Q & P coeuntibus est ratio æqualitatis; & Qx *quad.* seu Qv *quad.* est ad QT *quad.* ut EP *quad.* ad PF *quad.* [l] id est, ut CA *quad.* ad PF *quad.* sive (per lem. XII.) ut CD *quad.* ad CB *quad.* [m] Et conjunctis his omnibus rationibus, $L \times QR$ fit ad QT *quad.* ut $AC \times L \times PCq \times CDq$, seu $2\,CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CBq$, sive ut $2\,PC$ ad Gv. Sed punctis



[h] 261. In Ellipsi & hyperbolâ latus rectum principale $L = \frac{2\,BC^2}{AC}$ nam $2\,AC : 2\,BC = 2\,BC : L$, undè $L = \frac{4\,BC^2}{2\,AC} = \frac{2\,BC^2}{AC}$.

[i] Per constructionem $QR = Px$, sed propter Triangula similia Pxv, PEC $Px : Pv = PE\,(AC) : PC$, ergò $QR : Pv = AC : PC$.

[k] Per naturam Conicorum, facta partium Diametri sunt ad quadrata Ordinatarum ut Diametri transversæ quadratum ad quadratum ejus conjugatæ (Vide superius de Conicis Theor. II. de Ellipsi & de Hyperbolâ).

[l] Est $CA^2 : PF^2 = CD^2 : CB^2$; nam per Lem. XII. $PF \times CD = AC \times BC$, adeóque $PF^2 \times CD^2 = CA^2 \times BC^2$, ac proindè $CA^2 : PF^2 = CD^2 : CB^2$.

[m] 262. Scriptis seorsim analogiis res clara fit.

$L \times QR : L \times Pv = AC : PC$

$L \times Pv : GvP = L : Gv$

$GvP : Qv^2 = PC^2 : CD^2$

$Qv^2 : QT^2 = CD^2 : CB^2$.

Undè conjunctis his omnibus rationibus; $L \times QR : QT^2 = AC \times L \times PC^2 \times CD^2 : PC \times Gv \times CD^2 \times CB^2$, hoc est, ob $AC \times L = 2\,BC^2$, $L \times QR : QT^2 = 2\,PC : Gv$, & ob $2\,PC = Gv$, $L \times QR = QT^2$, & $L = \frac{QT^2}{QR}$.

Nam

tis Q & P coeuntibus æquantur $2PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & QT *quad.* æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $L \times SPq$ æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta reciprocè eſt ut $L \times SPq$; id eſt, reciprocè in ratione duplicata diſtantiæ SP. *Q. E. I.* LIBER PRIMUS.

Idem aliter.

Cum vis ad centrum ellipſeos tendens, quâ corpus P in ellipſi illâ revolvi poteſt, ſit (per corol. 1. prop. X.) ut CP diſtantia corporis ab ellipſeos centro C; ducatur CE parallela ellipſeos tangenti PR; & vis, quâ corpus idem P circum aliud quodvis ellipſeos punctum S revolvi poteſt, ſi CE & PS concurrant in E, (n) erit ut $\frac{PE\ cub.}{SPq}$ (per corol. 3. prop. VII.) hoc eſt, ſi punctum S ſit umbilicus ellipſeos, ideoque PE detur, ut SPq reciprocè. *Q. E. I.*

Eâdem brevitate, quâ traduximus problema quintum ad parabolam, & hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem problematis, & uſum ejus in ſequentibus non pigebit caſus cæteros demonſtratione confirmare.

PRO-

(n) Nam (per Coroll. III. Prop. VII.) vis tendens ad centrum C, quam exponat recta CP, eſt ad vim tendentem ad aliud punctum S, quam exponat recta *A*, ut $CP \times SP^2$ ad cubum rectæ quæ à centro C ad Tangentem RPZ duceretur parallela ad lineam SP à ſecundo virium centro ad punctum P curvæ ductam, quæ quidem recta æqualis foret PE, quoniam ipſi eſſet Parallela, & inter eaſdem Parallelas DC RPZ, adeóque $CP \times SP^2 : PE^3 = CP : A = \frac{PE^3}{SP^2}$; hoc eſt, ſi punctum S ſit umbilicus Ellipſeos, adeóque $PF = AC$ (260) detur, erit vis ut SP^2 reciprocè; hic autem ſupponitur talem eſſe vim ad centrum C tendentem ut tempora periodica circà centra C, & S, æqualia ſint, quod ſupponi poteſt.

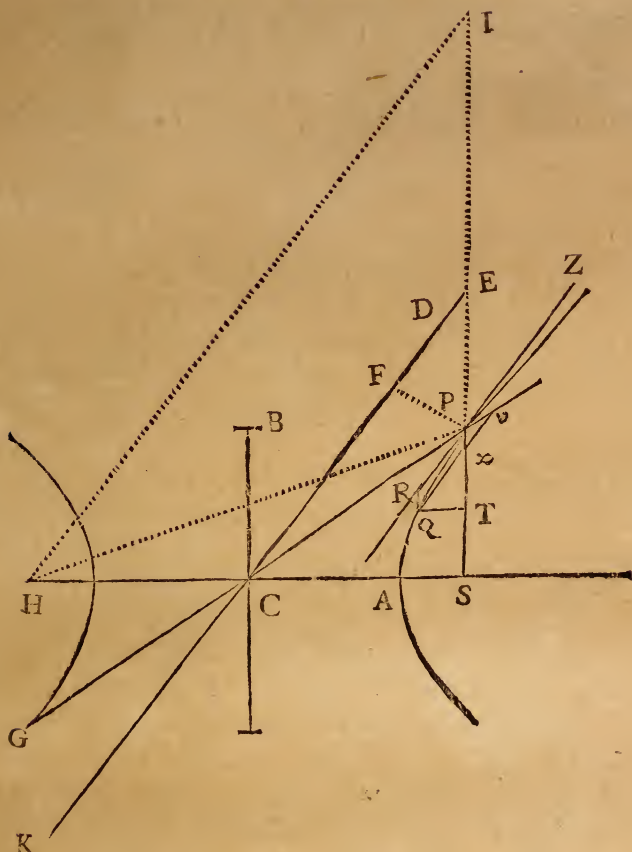
De Motu Corporum.

PROPOSITIO XII. PROBLEMA VII.

Moveatur corpus in hyperbolâ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

Sunto CA, CB ſemiaxes hyperbolæ; PG, KD, diametri aliæ conjugatæ; PF perpendiculum ad diametrum KD; & Qv ordinatim applicata ad diametrum GP. Agatur SP ſecans cum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in x, & compleatur parallelogrammum $QRPx$. (°) Patet EP æqualem eſſe ſemiaxi tranſverſo AC, eo quod, actâ ab altero hyperbolæ umbilico H lineâ HI, ipſi EC parallelâ, ob æquales CS, CH æquentur ES, EI; adeo ut EP ſemidifferentia ſit ipſarum PS, PI, id eſt (ob parallelas IH, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipſarum PS, PH, quarum differentia axem totum $2AC$ adæquat. Ad SP demittatur perpendicularis QT. Et hyperbolæ latere recto principali (ſeu $\frac{2BCq}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv, ſeu Px ad Pv, id eſt (ob ſimilia triangula Pxv, PEC) ut PE ad PC, ſeu AC ad PC. Erit etiam $L \times Pv$ ad $Gv \times Pv$ ut L ad Gv; & (ex naturâ conicorum) rectangulum GvP ad Qv *quad.* ut PCq ad CDq; & (per corol. 2. lem. VII.) Qv *quad.* ad Qx *quad.* punctis Q & P coeuntibus fit ratio æqualitatis; & Qx *quad.* ſeu Qv *quad.* eſt ad QTq ut EPq ad PFq, id eſt, ut CAq ad PFq, ſive (per lem. XII.) ut CDq ad CBq: & conjunctis his omnibus rationibus $L \times QR$ fit ad QTq ut $AC \times L \times PCq \times CDq$, ſeu $2CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CBq$, ſive ut $2PC$ ad Gv. Sed punctis P & Q coeuntibus æquantur $2PC$ & Gv. Ergo & his pro-

(°) 263. Eſt SE = SP + PE & ob æquales ES, EI, eſt PI = EI + PE = ES + PE = SP + 2 PE, ac proindè PI − SP = 2 PE, ac PE eſt ſemidifferentia ipſarum PS, PI; ſed angulus HPR = RPS, angulus enim interceptus inter lineas à focis ad punctum Hyperbolæ ductas bifariam dividitur per Tangentem (per prop 48. lib. 3. Conic. Apoll. vide Theor. V. de Hyp.) & RPS = EPZ (per 15. 1. Elem.) adeóque IPR = HPZ, & ob parallelas IH, PR, angulus PHI = HPR = IPZ = HIP, undè HP = PI, adeóque EP, eſt ſemidifferentia ipſarum PS, PH, & quia differentia rectarum PS, PH, axem totum 2 AC, adæquat (per prop. 51. lib. 3. conic. Apoll. Vide ſup. Theor. IV. de Hyperb.), eſt EP = AC.



portionalia $L \times QR$ & QTq (P) æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $L \times SPq$ æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta reciprocè est ut $L \times SPq$, id est, reciprocè in ratione duplicatâ distantiæ SP. *Q. E. I.*

Idem aliter.

Inveniatur vis, quæ tendit ab hyperbolæ centro *C*. Prodibit hæc distantiæ *CP* proportionalis. Inde vero (per. corol. 3. prop.

(P) 264. Notandum est quod in hyperbolâ sicut in Ellipsi, (ut liquet ex demonstratione Prop. X. & XI.) latus rectum principale sive $L = \frac{QT^2}{QR}$.

VII.) vis ad umbilicum S tendens erit ut $\frac{PE\ cub.}{SPq}$, hoc est, ob datam PE reciprocè ut SPq. *Q. E. I.*

Eodem modo demonstratur, quod corpus (q) hac vi cen-

I E Z D F P B x R T Q H C A S G K

(q) 265. Nam ex centro C, in tangentem PR productam ducta intelligatur recta ipsi HP parallela, & ea æqualis erit lineæ PE; Etenim ob parallelas PR, CE, & HI, angulus quem linea ipsi HP, parallela efficit cum CE, æqualis erit angulo $PHI = HIP = CEP$; lineæ autem intrà duas parallelas æqualiter inclinatæ sunt æquales. Est igitur, (per coroll. 3. prop. VII.), vis centrifuga à centro C, tendens quâ corpus P, hyperbolam AQP, describit ad vim centrifugam à foco H tendentem quâ eandem hyperbolam percurrit ut $CP \times HP^2$ ad PE^3. Vim à centro C, tendentem quæ est ut CP, exponat recta CP, & alteram vim à foco H directam exponat recta A, & erit $CP \times HP^2 : PE^3 = CP : A = \frac{PE^3}{HP^2}$, hoc est, ob PE æqualem datæ AC, vis à foco H tendens est reciprocè ut HP^2.

266.

tripetâ in centrifugam versâ movebitur in hyperbolâ oppositâ. LIBER PRIMUS.

LEMMA XIII.

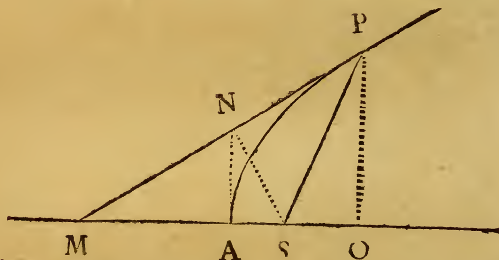
(r) *Latus rectum parabolæ ad verticem quemvis pertinens est quadruplum distantiæ verticis illius ab umbilico figuræ.*

Patet ex conicis.

LEMMA XIV.

Perpendiculum, quod ab umbilico parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium est proportionale inter distantias umbilici à puncto contactus & à vertice principali figuræ.

Sit enim *AP* parabola, *S* umbilicus ejus, *A* vertex principalis, *P* punctum contactus, *PO* ordinatim applicata ad diametrum principalem, *PM* tangens diametro principali occurrens in *M*, & *SN* linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur *AN* & ob æquales *MS* & *SP*, *MN*, & *NP*, *MA* & *AO*



parallelæ erunt rectæ *AN* & *OP*; & inde triangulum *SAN* rectangulum erit ad *A*, & simile triangulis æqualibus *SNM*, *SNP*: ergo *PS* est ad *SN* ut *SN* ad *SA*. *Q. D. E.*

Corol. 1. *PSq* est ad *SNq* ut *PS* ad *SA*.

(s) *Corol.* 2. Et ob datam *SA* est *SNq* ut *PS*.

Corol. 3. Et concursus tangentis cujusvis *PM* cum recta *SN*, quæ ab umbilico in ipsam perpendicularis est, incidit in rectam *AN* quæ parabolam tangit in vertice principali. PRO-

(r) 266. Dem.... Illius demonstrationem jam superius in Compendio de Conicis, Theor. IV. de Parabolâ dedimus.

(s) Cum sit (per coroll. 1.) $SA \times PS^2 = SN^2 \times PS$, adeóque $SA \times PS = SN^2$; erit ob datam SA, SN^2 ut PS, id est, variationes quadrati SN^2, in eâdem parabolâ erunt ut variationes rectæ SP sive ut distantiæ à foco.

Nam

DE MOTU CORPORUM

PROPOSITIO XIII. PROBLEMA VIII.

Moveatur corpus in perimetro parabolæ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.

Maneat constructio lemmatis, sitque P corpus in perimetro parabolæ, & à loco Q, in quem corpus proxime movetur, age ipsi SP parallelam QR & perpendicularem QT, necnon Qv tangenti parallelam, & occurrentem tum diametro PG in v, tum distantiæ SP in x. Jam ob similia triangula (t) Pxv, SPM, & æqualia unius latera SM, SP, æqualia sunt alterius latera Px seu QR & Pv. Sed ex conicis quadratum ordinatæ Qv æquale est rectangulo sub latere recto & segmento diametri Pv, id est (per lem. XIII.) rectangulo $4PS \times Pv$, seu $4PS \times QR$; & punctis P & Q coeuntibus, ratio Qv ad Qx (per corol. 2. lem. VII.) fit ratio æqualitatis. Ergo Qx *quad.* eo in casu æquale est rectangulo $4PS \times QR$. Est autem (ob similia triangula QxT, SPN) Qxq ad QTq ut PSq ad SNq, hoc est (per corol. 1. lem. XIV.) ut PS ad SA, id est, ut $4PS \times QR$ ad $4SA \times QR$, & inde (per prop. IX. lib. V. elem.) (u) QTq & $4SA \times QR$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ æquale SP

(t) * Nam ob parallelas MP & Qv, MS & PG, est angulus vPx = PSM & Pxv = QxT = MPS.

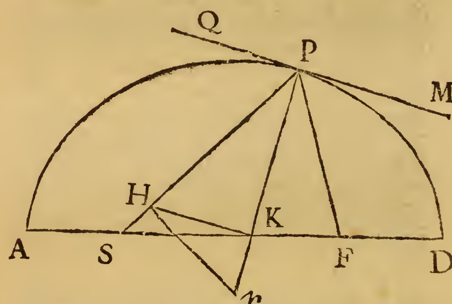
(u) 267. Quoniam latus rectum principale $L = 4AS$, & est $4AS \times QR = QT^2$, erit etiam in parabolâ ut in cæteris Sectionibus conicis (264), latus rectum principale $L = \frac{QT^2}{QR}$.

268.

$SPq \times 4SA$: & propterea (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta est reciprocè ut $SPq \times 4SA$, id est, ob datam $4SA$ reciprocè in duplicatâ ratione distantiæ SP. *Q. E. I.*

Corol. 1. (x) Ex tribus novissimis propositionibus consequens est, quod si corpus quodvis *P* secundum lineam quamvis rectam *PR* quâcunque cum velocitate exeat de loco *P*, & vi centripetâ, quæ sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ locorum à centro, simul agitetur; movebitur hoc corpus in aliquâ sectionum conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra. Nam datis umbilico, & puncto contactus, & positione tangentis, describi potest sectio conica, quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit. Datur autem curvatura ex datâ vi centripetâ, & velocitate corporis: & orbes duo se mutuo tangentes eâdem vi centripetâ eâdemque velocitate describi non possunt.

Co-



(x) 268. Si corpus moveatur in aliquâ sectionum conicarum umbilicum habente in centro virium, vis centripeta erit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ locorum ab umbilico, & contrà si vis centripeta fuerit quadrato distantiæ à centro virium reciprocè proportionalis, corpus movebitur in aliquâ sectionum conicarum... Dem... Prima pars propositionis à Newtono eleganter demonstrata, potest adhuc aliter & generatim demonstrari. Vis centripeta ut $\frac{SP}{SY^3 \times R}$ (212.) sed in omni sectione conicâ $R = \frac{L \times SP^3}{2SY^3}$ (239.) Ergò $\frac{SP}{SY^3 \times R} = \frac{2SY^3 \times SP}{SY^3 \times L \times SP^3} = \frac{2}{L \times SP^2}$ hoc est, ob datam $\frac{2}{L}$, vis est ut $\frac{1}{SP^2}$. Q. e. 1um.

Corpus *P*, datâ cum velocitate secundum directionem datam PQ projiciatur, sitque vis centripetæ ad punctum S tendentis quantitas absoluta data in puncto dato P, in variis à centro distantiis ea vis sit semper in ratione inversâ quadrati distantiæ à centro S, si ea fuerit corporis *P* velocitas quam vi centripetâ ut est in P uniformiter urgente acquireret cadendo per $\frac{1}{2}$ SP & præterea P S sit ad PQ perpendicularis, corpus *P* circulum describet cujus centrum S & radius PS (201.) Si verò alia fuerit velocitas, aut PS ad PQ obliquâ, corpus *P* aliam describet orbitam in quâ tangens PQ, non semper erit ad radium vectorem SP perpendicularis. Sit igitur PQ ad SP obliqua, datur Pr, radius circuli orbitam à corpore *P* describendam osculantis in P; ex r in PS demittatur perpendicularis rH, & ex H in Pr perpendicularis HK, jungaturque SK;

De Motu Corporum.

Corol. 2. Si velocitas, quâcum corpus exit de loco suo *P*, ea sit, quâ lineola *PR* in minimâ aliquâ temporis particulâ describi possit; & vis centripeta potis sit eodem tempore corpus idem movere per spatium *QR*: movebitur hoc corpus in conicâ aliquâ sectione; cujus latus rectum principale est quantitas illa (y) $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimo fit, ubi lineolæ *PR*, *QR* in infinitum diminuuntur. Circulum in his corollariis refero ad ellipsin; & casum excipio, ubi corpus rectà descendit ad centrum.

PRO-

SK; Deindè fiat angulus QPF complementum ad duos rectos anguli QPS, & si fuerit PF parallela ipsi SK, describatur parabola cujus umbilicus S, axis SK, & punctum perimetri P, data sunt. Si verò PF ipsi SK occurrat in puncto aliquo F, tunc focis S, & F, & perimetri puncto P datis describatur Hyperbola si puncta S & F cadant ad eandem partem puncti K, & Ellipsis si cadant ad partes contrarias, & corpus *P* movebitur in sectione conicâ per eam constructionem descriptâ. Nam (per construct.) angulus QPF, est complementum anguli QPS, ad duos rectos; sed angulus SPM, est quoque ejusdem anguli QPS, complementum ad duos rectos, ac proindè QPF = SPM, ergò subducto communi angulo SPF, erit angulus QPS = FPM, adeòque QP, tangens sectionis in P, (prop. 48. Lib. 3. conic. Apoll. & per Theor. III. aut IV. de Hyp. Ell. & Parab.) Cum igitur sectionis axis sit SK, & PK ad tangentem PQ normalis (per constr.) erit Pr radius curvaturæ sectionis in puncto P, (239.) eadem igitur est sectionis conicæ & orbitæ quam corpus *P* describit tangens atque curvatura in puncto P, porrò sectio conica DPA describi potest vi aliquâ centripetâ ad umbilicum S tendente quæ sit semper reciprocè proportionalis quadrato distantiæ ab illo puncto S (per superius demonstrata) & ex datis corporis alicujus *A* sectionem describentis, velocitate in puncto P, directione tangentis PQ, directione vis PS, & curvaturâ sectionis conicæ in P, datur vis centripetæ quantitas absoluta in puncto P, (242.) quâ corpus *A* in sectione conicâ retinetur in P, ponamus velocitatem corporis *A* eandem cum velocitate projectionis corporis *P* orbitam suam describentis, tùm eadem erit ejus orbitæ & Sectionis Conicæ curvatura in P, idem virium centrum S, idem punctum P, eadem tangens PQ, eadem velocitas projectionis, eadem lex vis centripetæ, ac proindè eadem illius quantitas absoluta in puncto P, tam in sectione conicâ quàm in orbitâ à corpore *P* describendâ. Cùm igitur corpus P, iis positis unicam curvam describere possit & quidem sectionem conicam DPA possit describere, eam reverâ describet (244.) Q. e. 2um.

2am. hujusce propositionis partem formulis analyticis invenerunt Hermannus & Bernoullius in monumentis Academiæ Parisiensis, an. 1710.

(y) * Patet ex notâ 267.

269.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA VI.

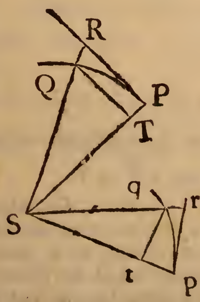
Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta sit reciprocè in duplicatâ ratione distantiæ locorum à centro; dico quod orbium latera recta principalia sunt in duplicatâ ratione arearum, quas corpora radiis ad centrum ductis eodem tempore describunt.

(z) Nam (per corol 2. prop. XIII.) latus rectum L æquale est quantitati $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta P & Q. Sed linea minima QR dato tempore est ut vis centripeta generans, hoc est (per hypothesin) reciprocè ut SPq. Ergo $\frac{QTq}{QR}$ est ut $QTq \times SPq$, hoc est, latus rectum L in duplicatâ ratione areæ $QT \times SP$. *Q. E. D.*

Corol. (a) Hinc ellipseos area tota, eique proportionale rectangulum sub axibus est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti, & ratione temporis periodici. Namque area tota est ut area $QT \times SP$, quæ dato tempore describitur, ducta in tempus periodicum.

PRO-

(z) 269. Sint in Hypothesi propositionis XIV. duarum sectionum conicarum arcus quam minimi PQ, pq, simul descripti, L, l, earumdem latera recta, (& per prop. VI. & Hyp.) $QR : qr = Sp^2 : SP^2$. Sed (267.) $\frac{QT^2}{QR} : \frac{qt^2}{qr} = L : l = \frac{QT^2}{Sp^2} : \frac{qt^2}{SP^2} = QT^2 \times SP^2 : qt^2 \times Sp^2$.



Sunt autem $QT \times SP$, $qt \times Sp$, ut sectores evanescentes SQP, Sqp, ergò latera recta L, l, sunt in duplicatâ ratione arearum simul descriptarum; nam areæ quævis simul descriptæ sunt semper ut sectores SQP, Sqp, simul descripti, ob æquabilem circà centrum virium S arearum descriptionem in utrâque sectione conicâ. Hinc in analogiis loco quadrati areæ dato tempore descriptæ substitui potest sectionis latus rectum & contrà, dummodo id fiat in Hypothesi propositionis.

(a) 270. *Hinc Ellipseos area tota eique proportionale rectangulum sub axibus* (250.) *est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti & ratione temporis periodici.*

X 2

PROPOSITIO XV. THEOREMA VII.

Iisdem positis, dico quod tempora periodica in ellipsibus sunt in ratione sesquiplicatâ majorum axium.

(b) Namque axis minor est medius proportionalis inter axem majorem & latus rectum, atque ideo rectangulum sub axibus est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti & sesquiplicatâ ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum (per corol. prop. XIV.) est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti & ratione periodici temporis. Dematur utrobique subduplicata ratio lateris recti, & manebit sesquiplicata ratio majoris axis eadem cum ratione periodici temporis *Q. E. D.*

(c) *Corol.* Sunt igitur tempora periodica in ellipsibus eadem ac in circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus ellipseon.

PRO-

dici. Namque tempus periodicum (252.) est ut area tota directe & area tempore dato descripta inverse, adeòque area tota est ut area $QT \times SP$ quæ dato tempore describitur (hoc est, (269.) ut radix quadrata lateris recti) ducta in tempus periodicum.

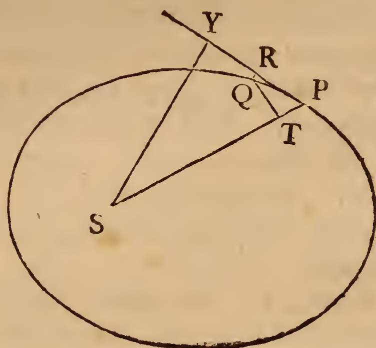
(b) 271. Sit Ellipsis axis major A, minor B, Latus rectum L, tempus periodicum T; & quoniam $A:B=B:L$, erit $B^2 = A \times L$, $B = A^{\frac{1}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$, $A \times B = A^{\frac{3}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$, sed rectangulum $A \times B$, (270.) est ut $T \times L^{\frac{1}{2}}$, ergò $A^{\frac{3}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$ est ut $T \times L^{\frac{1}{2}}$, & dividendo utrumque terminum per $L^{\frac{1}{2}}$ erit $A^{\frac{3}{2}}$ ut T.

(c) 272. Circulus est species ellipsis cujus foci cum centro coincidunt & Latus rectum cum diametro; sed tempora periodica in Ellipsibus quæ axem majorem æqualem habent sunt æqualia (271.) ergò in Ellipsi & circulo cujus diameter seu axis æquatur axi majori ellipsis, tempora periodica æquantur.

Ve-

PROPOSITIO XVI. THEOREMA VIII.

Iisdem positis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demissisque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum sunt in ratione compositâ ex ratione perpendiculorum inversè, & subduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè.



Ab umbilico *S* ad tangentem *PR* demitte perpendiculum *SY*, & velocitas corporis *P* erit reciprocè in subduplicatâ ratione quantitatis $\frac{SYq}{L}$. Nam velocitas illa est ut arcus quam minimus *PQ* in datâ temporis particulâ descriptus, hoc est (per lem. VII.) ut tangens (d) *PR*, id est, ob proportionales *PR* ad *QT* & *SP* ad *SY*, ut $\frac{SP \times QT}{SY}$, sive ut *SY* reciprocè & $SP \times QT$ directè; estque $SP \times QT$ ut area dato tempore descripta, id est (per prop. XIV.) in subduplicatâ ratione lateris recti. *Q. E. D.*

Corol. 1. (e) Latera recta principalia sunt in ratione compositâ ex duplicatâ ratione perpendiculorum, & duplicatâ ratione velocitatum.

Corol. 2. Velocitates corporum, in (f) maximis & minimis ab umbilico communi distantiis, sunt in ratione compositâ ex ratione

(d) * Velocitas est ut tangens PR, sed ob angulos ad T & Y rectos & angulos QPT, YPS, punctis P, Q, coeuntibus æquales, triangulum evanescens QPT, simile erit triangulo PSY, adeòque QP (PR) : QT = SP : SY, & $PR = \frac{SP \times QT}{SY}$.

(e) * Velocitatis quadratum c^2, est directè ut $\frac{L}{SY^2}$ (prop. XVI.) ergò *L* est ut $c^2 \times SY^2$.

(f) * Maximæ & minimæ distantiæ sunt axis partes ab umbilico ad vertices principales contentæ, adeoque cùm illic axis sit per-

De Motu Corporum.

ne diſtantiarum inverſè, & ſubduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè. Nam perpendicula jam ſunt ipſæ diſtantiæ.

Corol. 3. (g) Ideoque velocitas in conicâ ſectione, in maximâ vel minimâ ab umbilico diſtantiâ, eſt ad velocitatem in circulo in eadem à centro diſtantia in ſubduplicatâ ratione lateris recti principalis ad duplam illam diſtantiam.

Corol. 4. (h) Corporum in ellipſibus gyrantium velocitates in mediocribus diſtantiis ab umbilico communi ſunt eædem, quæ corporum gyrantium in circulis ad eaſdem diſtantias; hoc eſt (per corol. 6. prop. IV.) reciprocè in ſubduplicatâ ratiône diſtantiarum. Nam perpendicula jam ſunt ſemi-axes minores, & hi ſunt ut mediæ proportionales inter diſtantias & latera recta. Componatur hæc ratio inverſè cum ſubduplicatâ ratione laterum rectorum directè, & fiet ratio ſubduplicata diſtantiarum inverſè.

Corol. 5. In eadem figurâ, vel etiam in figuris diverſis, quarum latera recta principalia ſunt æqualia, velocitas corporis eſt reciprocè ut perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem.

Corol. 6. (i) In parabolâ velocitas eſt reciprocè in ſubduplicatâ ratione diſtantiæ corporis ab umbilico figuræ; in ellipſi ma-

pendicularis tangenti, ipſa perpendicula ad tangentem in maximis & minimis diſtantiis ſunt ipſæ diſtantiæ; mediocres diſtantiæ ſunt diſtantiæ ab umbilico ad vertices axis minoris Ellipſeos, adeòque ſemiaxi majori æquantur.

(g) * Nam circulus ille (272.) eſt ellipſis cujus latus rectum eſt ipſa diameter, ideoque eſt ipſa dupla diſtantia ab umbilico ſeu centro, quare cum eadem ponatur diſtantia tam in conicâ ſectione quàm in circulo, velocitates ſunt in ſubduplicatâ ratione laterum rectorum, hoc eſt in ſubduplicatâ ratione lateris recti ſectionis conicæ, ad duplam illam diſtantiam quæ eſt latus rectum circuli.

(h) * Sit *A* corporis in Ellipſi gyrantis mediocris diſtentia ab umbilico, ſit etiam circuli radius *A*; ſemiaxis minor, ſeu perpendicularis demiſſa ex umbilico in tangentem axi majori parallellam ſit *B*, latus rectum *L*, & circuli latus rectum (272.) erit 2 A, velocitas in Ellipſi ſit C, in circulo c, & erit (per prop. XVI.) $C^2 : c^2 = \frac{L}{B^2} : \frac{2A}{A^2} = L \times A : 2B^2$; ſed ex Conicis diſtantiâ à foco ad extremitatem ſemi axis minoris (quæ eſt mediocris diſtantia) eſt æqualis ſemiaxi majori, eſt ergo diſtantia *A* ſemiaxis major, ideoque cum ex conicis ſit $A : B = 2B : L$, eſt $2B^2 = A \times L$, ergò $C^2 = c^2$, & $C = c$.

(i) *In Parabolâ velocitas eſt reciprocè in ſubduplicatâ ratione diſtantiæ corporis ab umbilico figuræ*, cum enim velocitas ſit reciprocè ut perpendiculum demiſſum ab umbili-

magis variatur, in hyperbolâ minus quàm in hac ratione. Nam (per corol. 2. lem. XIV.) perpendiculum demissum ab umbilico ad tangentem parabolæ est in subduplicatâ ratione distantiæ. In hyperbolâ perpendiculum minus variatur, in ellipsi magis. LIBER PRIMUS.

Co-

bilico ad Tangentem, per præced. Coroll., & (per Cor. 2. Lem. XIV.) quadratum ejus perpendiculi sit semper in Parabolâ ut distantia à foco, erit velocitas reciprocè ut radix quadrata illius distantiæ à foco, sive in *subduplicatâ ratione distantiæ* &c.

276. Lemma. Sit Ellipsis A P B, cujus axis major A D, foci S & H, semiaxis minor B C; M y tangens in P, S Y & H y in tangentem perpendiculares; ob angulos Y P S, H P y, æquales (prop. 48. lib. 3. conic. Apoll. sup. Theor. I V. de Ellip.) similia sunt triangula S P Y, H P y, unde S P : S Y :: H P : H y $= \frac{SY \times HP}{SP}$, ac proindè $SY \times Hy = \frac{SY^2 \times HP}{SP}$ $= BC^2$ (ex conicis Vid. sup. n. 236.) sed H P + S P = A D (prop. 52. lib. 3. conic. Apoll. sup. Theor. III. de Ellipsi) unde est HP=AD−SP ergò $\frac{SY^2 \times AD - SP}{SP}$ $= BC^2$; & $SY^2 = \frac{BC^2 \times SP}{AD - SP}$. Ergò in Ellipsi, SY^2 variatur in ratione $\frac{BC^2 \times SP}{AD - SP}$ sive ob quantitatem BC^2, constantem in ratione $\frac{SP}{AD - SP}$.

Crescat distantia SP, minor fiet AD−SP, si non mutaretur denominator fractionis $\frac{SP}{AD - SP} = SY^2$, cresceret SY^2 sicut SP, cum autem minuatur denominator S p crescente, eo ipso major fit valor fractionis $\frac{SP}{AD - SP}$ ergo crescente S P, SY^2 magis crescit quam in solâ ratione S P, *ergo perpendiculum in ellipsi magis variatur quam in subduplicatâ ratione distantiæ* S P.

In Hyperbolâ verò, quoniam H P − S P = A D (prop. 51. lib. 3. conic. Apoll. Theor. III. de Hyp.) & H P = A D + S P, eodem modo reperitur $SY^2 = \frac{BC^2 \times SP}{AD + PS}$, & crescente SP, crescit etiam AD + SP, si idem maneret denominator cresceret SY^2 sicut SP, denominatore aucto, fractio $\frac{SP}{AD + SP}$ fit minor quam eo manente, sed ea exprimit valorem quadrati perpendiculi S Y, ergo SY^2 minus crescit quàm S P sive *perpendiculum in Hyperbolâ minus variatur quam in subduplicatâ ratione distantiæ* S P.

277.

DE MOTU CORPORUM.

Corol. 7. (k) In parabolâ velocitas corporis ad quamvis ab umbilico diſtantiam eſt ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem à centro diſtantiam in ſubduplicatâ ratione numeri binarii ad unitatem; (l) in ellipſi minor eſt, in hyperbolâ major quàm in hac ratione. Nam per hujus corollarium ſecundum velocitas in vertice parabolæ eſt in hac ratione, & per corollaria ſexta hujus & propoſitionis quartæ ſervatur eadem proportio in omnibus diſtantiis. Hinc etiam in parabolâ velocitas ubique æqualis eſt velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam diſtantiam, in ellipſi minor eſt, in hyperbolâ major.

Co-

(k) 277. Sit latus rectum parabolæ L, adeóque diſtantia foci à vertice $\frac{1}{4} L$, & ex umbilico tanquam centro ac radio $\frac{1}{4} L$, deſcribatur circulus, ejus latus rectum ſeu diameter erit $\frac{1}{2} L$; undè velocitas corporis in vertice parabolæ erit ad velocitatem corporis in illo circulo revolventis ut $\sqrt{L}$ ad $\sqrt{\frac{1}{2} L}$, hoc eſt, ut $\sqrt{2}$ ad 1. (corol. 2. hujuſce Prop.) ſed per coroll. 6. velocitas in vertice parabolæ eſt ad velocitatem in aliâ quâvis ab umbilico diſtantiâ SP, ut $\sqrt{SP}$ ad $\sqrt{\frac{1}{4} L}$, & (per corol. 6. prop. IV.) velocitas in circulo cujus radius $\frac{1}{4} L$, eſt etiam ad velocitatem in alio circulo cujus radius SP, ut $\sqrt{SP}$, ad $\sqrt{\frac{1}{4} L}$; quarè velocitas in vertice parabolæ eſt ad velocitatem in eâdem parabolâ ad diſtantiam SP, ut velocitas in circulo cujus radius $\frac{1}{4} L$, ad velocitatem in circulo cujus radius eſt SP, ac proindè alternando velocitas in vertice parabolæ eſt ad velocitatem in circulo radio $\frac{1}{4} L$ deſcripto, hoc eſt, $\sqrt{2}$ ad 1, ut velocitas in parabolâ in diſtantiâ SP, ad velocitatem in circulo ad eandem à centro ſeu umbilico diſtantiam deſcripto.

278. *Hinc etiam in parabolâ velocitas ubique æqualis eſt velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam diſtantiam*; nam velocitas in circulo cujus radius $\frac{1}{2}$ SP eſt ad velocitatem in circulo cujus radius SP, ut $\sqrt{2}$ ad 1, (per coroll. 6. prop. IV.) ſed velocitas in parabolâ ad diſtantiam SP, eſt ad velocitatem in circulo cujus radius SP, etiam ut $\sqrt{2}$. ad 1, velocitas igitur in parabolâ ad diſtantiam SP, æquatur velocitati in circulo cujus radius $\frac{1}{2}$ SP.

(l) 279. *In Ellipſi velocitas corporis ad quamvis ab umbilico diſtantiam eſt ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem à centro diſtantiam in minore ratione quam* $\sqrt{2}$ ad 1; *in Hyperbolâ in ratione majore.* Sit enim Ellipſis vel hyperbolæ latus rectum L, diſtantia ab umbilico SP, perpendiculum ad tangentem ſectionis in puncto P demiſſum SY; SP, ſit radius circuli, C ſit velocitas in Ellipſi vel hyperbola ad diſtantiam SP; C, velocitas in circulo, & erit (per prop. XVI.) $c^2 : C^2 = \frac{L}{SY^2} : \frac{2SP}{SP^2} = L \times SP : 2SY^2$; ſed (276) $2SY^2 = \frac{2BC^2 \times SP}{AD \mp SP}$, ergo $c^2 : C^2 = L \times SP : \frac{2BC^2 \times SP}{AD \mp SP} = L \times \overline{AD \mp SP} : 2BC^2$; & ob $L \times AD = 4BC^2$ ſeu $2BC^2 = L$

Corol. 8. Velocitas gyrantis in ſectione quâvis conicâ eſt ad velocitatem gyrantis in circulo in diſtantiâ dimidii lateris recti principalis ſectionis, ut diſtantia illa ad perpendiculum ab umbilico in tangentem ſectionis demiſſum. (m) Patet per corollarium quintum.

Corol. 9. (n) Unde cum (per corol. 6. prop. IV.) velocitas gyrantis in hoc circulo ſit ad velocitatem gyrantis in circulo quovis alio reciprocè in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in conicâ ſectione ad velocitatem gyrantis in circulo in eâdem diſtantiâ, ut media proportionalis inter diſtantiam illam communem & ſemiſſem principalis lateris recti ſectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem ſectionis demiſſum.

P R O-

$= \frac{L \times AD}{2}$, eſt $c^2 : C^2 = 2AD \mp 2SP : AD$; undè in Ellipſi in quâ 2 S P habet ſignum $-$, ratio c^2 ad C^2, minor eſt quam ratio 2, ad 1, & ratio c ad C, minor quam ratio $\sqrt{2}$, ad 1; in hyperbolâ major ob $+ 2SP$ (276.)

280. Coroll. Quoniam diſtantia ab altero ſectionis foco $HP = AD \mp SP$, erit $c^2 : C^2 = 2HP : AD = HP : \frac{1}{2}AD$, hoc eſt, velocitas in Ellipſi & hyperbolâ ad quamvis ab umbilico ſeu centro virium diſtantiam S P eſt ad velocitatem in circulo ad eandem diſtantiam in ratione ſubduplicatâ diſtantiæ H P ab altero umbilico ad ſemiaxem majorem.

(m) * Nam iſte circulus & ſectio Conica idem latus rectum habent, quia in circulo diſtantia à Centro ſemi diametro æquatur & tota diameter eſt latus Rectum, ideo velocitates ſunt reciprocè ut perpendicula in Tangentem demiſſa (per Cor. 5, hujuſce) ſed in circulo ſemidiameter perpendiculo æquatur, ergo velocitates in ſectione & in circulo ſunt ut ſemi-diameter circuli ad Perpendiculum &c.

(n) 281. Sit C velocitas corporis gyrantis in circulo ad diſtantiam dimidii lateris recti $\frac{1}{2}L$, c velocitas in ſectione conicâ ad diſtantiam SP, K velocitas in circulo ad eandem diſtantiam SP, & erit (per coroll. 8.) $c^2 : C^2 = \frac{1}{4}L^2 : SY^2$ (& per cor. 6. prop. IV.) $C^2 : K^2 = SP : \frac{1}{2}L$. undè, ex æquo, $c^2 : K^2 = SP \times \frac{1}{4}L^2 : SY^2 \times \frac{1}{2}L = SP \times \frac{1}{2}L : SY^2$. Fiat $SP : m = m : \frac{1}{2}L$, & erit $m^2 = SP \times \frac{1}{2}L$, ac proindè $c^2 : K^2 = m^2 : SY^2$ & $c : K = m : SY$.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IX.

Posito quod vis centripeta sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ locorum à centro, & quod vis illius quantitas absoluta sit cognita; requiritur linea, quam corpus describit de loco dato cum datâ velocitate secundum datam rectam egrediens.

Vis centripeta tendens ad punctum *S* ea sit, quâ corpus *p* in orbitâ quâvis datâ *p q* gyretur, & cognoscatur hujus velocitas in loco *p*. De loco *P* secundum lineam *PR*

282. Sit C, centrum Ellipsis, CB semiaxis minor, foci S & H, tendatque vis centripeta ad focum S; velocitas in P erit ad velocitatem in B, in subduplicatâ ratione distantiæ H P à foco H, ad distantiam S P ab altero foco seu centro virium S; Nam velocitas in P dicatur C, velocitas in B dicatur c, & erit (per cor. 5. prop. XVI.) $C : c = CB : SY$, adeóque $C^2 : c^2 = CB^2 : SY^2$, hoc est, ob $CB^2 = SY \times Hy$ (235.) $C^2 : c^2 = SY \times Hy : SY^2 = Hy : SY$; sed ob similia triangula SPY, HPy, $Hy : SY = HP : SP$. Ergò $C^2 : c^2 = HP : SP$, & $C : c = HP^{\frac{1}{2}}, SP^{\frac{1}{2}}$ Q. e. D.

Theorema illud invenit clarissimus Geometra Abrahamus de Moivre.

283. Velocitas angularis corporis P, in quâvis orbitâ Q P p, revolventis seu angulus P S Q, quem radius vector S P, dato tempore minimo describit est directè ut Q T perpendicularis ad radium vectorem SP, & distantia S P inversè, dum puncta Q & P coeunt, nam linea perpendicularis Q T pro arcu circuli haberi potest, undè angulus $PSQ = \frac{QT}{SP}$ (153.)

284. Coroll. 1. Hinc velocitas angularis in eâdem orbitâ est ubique reciprocè in duplicatâ ratione distantiæ S P à centro virium S. Nam sectores P S Q, p S q, eodem tempusculo descripti sunt æquales (prop. I.). Undè $QT \times SP = qt \times Sp$, adeóque $QT : qt = Sp : SP$, & hinc $\frac{QT}{SP} : \frac{qt}{Sp} = \frac{Sp}{SP} : \frac{SP}{Sp} = Sp^2 : SP^2$.

285. Coroll. 2. Velocitates angulares in sectionibus conicis circà umbilicum communem seu centrum virium descriptis sunt inter se ut radices quadratæ laterum rectorum principalium directè & quadrata dis-

exeat corpus *P* cum datâ velocitate, & mox inde, cogente vi centripetâ, deflectat illud in coni ſectionem *P Q*. Hanc igitur recta *P R* tanget in *P*. Tangat itidem recta aliqua *p r* orbitam *p q* in *p*, & ſi ab *S* ad eas tangentes demitti intelligantur perpendicula, erit (per corol. 1. prop. XVI.) latus rectum principale coni ſectionis ad latus rectum principale orbitæ in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione perpendiculorum & duplicatâ ratione velocitatum, atque ideo datur. ([a]) Sit *L* coni ſectionis latus

diſtantiarum inversè. Nam, (per prop. XIV.) Latera recta *L*, *l*, ſunt in duplicatâ ratione ſectorum P S Q, p S q, ſimul deſcriptorum, ſeu $L^{\frac{1}{2}} : l^{\frac{1}{2}} = QT \times SP : qt \times Sp$, adeóque $\frac{L^{\frac{1}{2}}}{SP} : \frac{l^{\frac{1}{2}}}{Sp} = QT : qt$; & hinc velocitates angulares ſeu anguli minimi P S Q, p S q, hoc eſt, $\frac{QT}{SP}$, $\frac{qt}{Sp}$, ſunt ut $\frac{L^{\frac{1}{2}}}{SP^2}$, $\frac{l^{\frac{1}{2}}}{Sp^2}$.

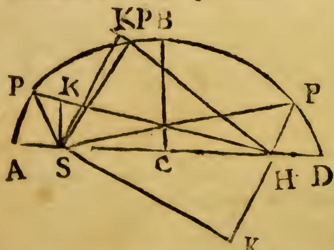
([a]) Solutio hujus Problematis duas continet partes; Sit enim corpus è puncto P ſecundum lineam P R datâ cum velocitate projectum & retineatur circa punctum S per vim centripetam quæ ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ locorum à Centro cujuſque quantitas abſoluta in puncto P ſit cognita, id corpus deſcribet (per Cor. 1. Prop. XIII.) ſectionem aliquam Conicam cujus 1°. quæritur Latus Rectum principale, 2°. Dato umbilico S illius ſectionis, puncto P, Tangente PR, & latere recto quæritur alter umbilicus, quo nempe invento & ex cæteris datis deſcribetur ſectio Conica quam Corpus propoſitum percurrit.

Ad primam ſolutionis partem, fingitur ſectio quælibet Conica cujus umbilicus ſit S, & alter umbilicus & latus rectum ad arbitrium ſumuntur, unde in quovis ejus puncto P duci poterit Tangens, & quantitas vis in eo puncto erit cognita, eſt enim ad vim in puncto P quæ data eſt reciprocè ut quadrata linearum S p, S P; Invenietur etiam velocitas in eo puncto p; Nam velocitas corporis gyrantis in circulo ad diſtantiam S p (ſive arcus in eo deſcriptus tempore quo arcus PQ deſcribitur) eſt media proportionalis inter vim centripetam in p, quæ inventa eſt, & duplam diſtantiam S p (per naturam circuli), hæc verò eſt ad velocitatem in hâc Sectione Conicâ, ut perpendiculum ab S ad Tangentem communem demiſſum ad mediam proportionalem inter diſtantiam S p & ſemiſſem lateris Recti iſtius ſectionis.

Cum ergo (per Cor. 1. Prop. XVI.) *Latera Recta principalia ſectionum circà umbilicum communem deſcriptarum ſint in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione perpendiculorum & duplicatâ ratione velocitatum* & ob datas Tangentes in p & P dentur perpendicula ex S in eas Tangentes demiſſa, deturque Velocitas corporis moti in P & inventa ſit velocitas in puncto p, datur ratio Lateris

rectum. Datur præterea ejuſdem coni ſectionis umbilicus S. Anguli RPS complementum ad duos rectos fiat angulus RPH; & dabitur poſitione linea PH, in quâ umbilicus alter H locabitur. Demiſſo ad PH perpendiculo SK, erigi intelligatur ſemiaxis conjugatus BC, (b) & erit $SPq - 2KPH + PHq = SHq = 4CHq = 4BHq - 4BCq = \overline{SP + PH}:quad. - L \times \overline{SP + PH}$ (c) $= SPq + 2SPH + PHq - L \times \overline{SP + PH}$. Addantur utrobique $2KPH - SPq - PHq + L \times \overline{SP + PH}$, & fiet $L \times \overline{SP + PH} = 2SPH + 2KPH$, ſeu $SP + PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L. Unde datur PH tam longitudine quam poſitione. Nimirum ſi ea ſit corporis in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quam $2SP + 2KP$, jacebit PH ad eandem partem tangentis PR

Recti ſectionis aſſumptæ ad Latus Rectum ſectionis quam corpus P deſcribit; Quod ergo invenitur, eratque primum.



(b) *Erit* $SP^2 - 2KP \times PH + PH^2 = SH^2$, Etenim (per 12. & 13. 2. Elem.) in omni Triangulo SPH, quadratum lateris SH quod conſideratur ut Hypothenuſa anguli P, æquatur quadratis aliorum laterum SP PH dempto duplo Rectanguli lateris PH in quod cadit perpendiculum, ducti in partem PK ab Angulo P ad perpendiculum uſque interceptam, quæ quidem PK ſumitur cum ſigno + ſi ſit ab eâdem parte Tangentis ac S & cum ſigno − ſi ſit in parte oppoſitâ.

(c) 287. $SH^2 = 4CH^2 = 4BH^2 - 4BC^2$ &c. Ex naturâ Ellipſeos eſt $2BH$ æqualis axi majori $2AC$ ideoque æqualis $SP + PH$ & $4BH^2 = \overline{SP + PH}^2$, pariter eſt $2AC : 2BC = 2BC : L$ eſt ergo $4BC^2 = L \times 2AC$ ſive $L \times \overline{SP + PH}$ unde eſt $4BH^2 - 4BC^2 = \overline{SP + PH}^2 - L \times \overline{SP + PH}$.

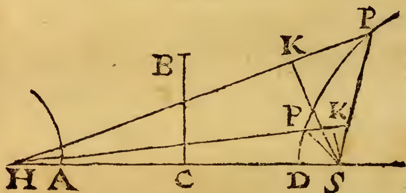
Collatis itaque valoribus ejuſdem quantitatis SH^2, eſt $SP^2 - 2KP \times PH + PH^2 = SP^2 + 2SP \times PH + PH^2 - L \times \overline{SP + PH}$, utrinque detractis æqualibus manet $-2KP \times PH = 2SP \times PH - L \times \overline{SP + PH}$ tranſpoſitiſque partibus negativis eſt $L \times \overline{SP + PH} = 2SP \times PH + 2KP \times PH$ ſive $\overline{2SP + 2KP} \times PH$ unde eſt $2SP + 2KP : L = SP + PH : PH$ & dividendo $2SP + 2KP - L : L = SP : PH$

cum linea PS; ideoque figura erit ellipsis, & ex datis umbilicis S, H, & axe principali $SP+PH$, dabitur. Sin tanta sit corporis velocitas ut latus rectum L æquale fuerit $2SP+2KP$, longitudo PH infinita erit; & propterea figura erit parabola axem habens SH parallelum lineæ PK, & inde dabitur. Quod si corpus majori adhuc cum velocitate de loco suo P exeat, capienda erit longitudo PH ad alteram partem tangentis; ideoque tangente inter umbilicos pergente, figura erit hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum SP & PH, & inde dabitur. Nam si corpus in his casibus revolvatur in conicâ sectione sic inventâ, demonstratum est in prop. XI, XII, & XIII, quod vis centripeta erit ut quadratum distantiæ corporis à centro virium S reciprocè; ideoque linea PQ rectè exhibetur, quam corpus tali vi describet, de loco dato P, cum datâ velocitate, secundum rectam positione datam PR egrediens. *Q.E.F.*

Corol. 1. Hinc in omni coni sectione ex dato vertice principali D, latere recto L, & umbilico S, datur umbilicus alter H capiendo DH ad DS ut est latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$. (d) Nam proportio $SP+PH$ ad PH ut $2SP+2KP$ ad L in casu hujus corollarii, fit $DS+DH$ ad DH ut $4DS$ ad L, & divisim DS ad DH ut $4DS-L$ ad L.

unde quo magis accedit valor lateris recti L ad quantitatem $2SP+2KP$, eo major est PH respectu SP, si $L=2SP+2KP$, infinitum est SP respectu PH, hoc est, Ellipsis abit in Parabolam, si L sit majus quam $2SP+2KP$, primus terminus Proportionis fit negativus, ideoque PH in partem oppositam Tangentis cadet & sectio fiet Hyperbola; manentibus autem cæteris crescit Latus Rectum cum velocitate in puncto P datâ: Unde quo major fit velocitas respectu vis centripetæ eo magis elongatur Ellipsis quam describit corpus propositum vel etiam in Parabolâ movetur, & tandem in Hyperbolâ.

288. Demonstratio pro Hyperbolâ ita instituitur: Quia PK non est in eâdem parte Tangentis ac S, sumitur PK cum signo − ideoque est $SH^2=SP^2+2KP\times PH+PH^2$, & per naturam Hyperbolæ $SH^2=4CH^2=4CA^2+4CB^2$ sive quia $2CA=PH-SP$ & $4CB^2=L\times 2CA$ est $SH^2=PH^2-2SP\times PH$



$+SP^2+L\times\overline{PH-SP}$ unde collatis valoribus SH^2 & detractis quantitatibus communibus est $2KP\times PH=-2SP\times PH+L\times\overline{PH-SP}$ & transpositis quantitatibus negativis est $2KP\times PH+2SP\times PH=L\times\overline{PH-SP}$ unde est $2SP+2KP:L=PH-SP:PH$, & convertendo $L-2SP-2KP:L=SP:PH$.

(d) 289. In casu hujus corollarii punctum P cadit in D, punctum K cadit in S, fitque $PK=DS=SP$, & $PH=DH$. Quare in omni sectione conicâ est DH, ad DS, ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & 4DS.

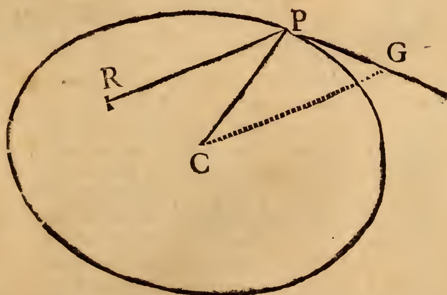
De Motu Corporum.

Corol. 2. Unde si datur corporis velocitas in vertice principali *D*, invenietur orbita expeditè, capiendo scilicet latus rectum ejus ad duplam distantiam *DS*, in duplicatâ ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in circulo ad distantiam *DS* gyrantis (per corol. 3. prop. XVI.); dein *DH* ad *DS* ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & 4 *DS*.

Corol. 3. Hinc etiam si corpus moveatur in sectione quâcunque conicâ, & ex orbe suo impulsu quocunque exturbetur; cognosci potest orbis, in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo, quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsus loco, secundum rectam positione datam, exibit.

Corol. 4. Et si corpus illud vi aliquâ extrinsecus impressâ continuo perturbetur, innotescet cursus quam proximè, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, & ex seriei analogiâ mutationes continuas in locis intermediis æstimando.

Scholium.



Si corpus *P* vi centripetâ ad punctum quodcunque datum *R* tendente moveatur in perimetro datæ cujuscunque sectionis conicæ, cujus centrum sit *C*; & requiratur lex vis centripetæ: ducatur *CG* radio *RP* parallela, & orbis tangenti *PG* occurrens in *G*; & (e) vis illa (per corol. 1. & schol. prop. X. & corol. 3. prop. VII.) erit ut $\frac{CG\ cub.}{RP\ quad.}$

(e) 290. Vis ad centrum vel à centro C, tendens est ut CP, (per coroll. 1. Prop. X. & Not. 232.) adeòque exponatur per lineam CP; vis ad punctum R, tendens exponatur per lineam A, & (per corol. 3. prop. VII.) erit $CP \times RP^2 : CG^3 = CP : A = \frac{CG^3}{RP^2}$.

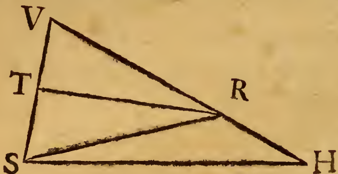
Si

SECTIO IV.

De inventione orbium ellipticorum, parabolicorum & hyperbolicorum ex umbilico dato.

LEMMA XV.

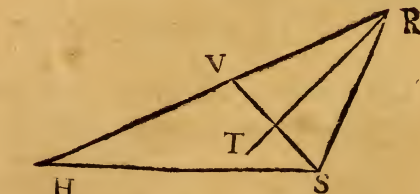
Si ab ellipseos vel hyperbolæ cujusvis umbilicis duobus S, H, *ad punctum quodvis tertium* V *inflectantur rectæ duæ* SV, HV, *quarum una* HV *æqualis sit axi principali figuræ, id est, axi in quo umbilici jacent, altera* SV *à perpendiculo* TR *in se demisso bisecetur in* T; *perpendiculum illud* TR *sectionem conicam alicubi tanget: & contra, si tangit, erit* HV *æqualis axi principali figuræ.*



Secet enim perpendiculum *TR* rectam *HV* productam, si opus fuerit, in *R*; & jungatur *SR*. Ob æquales *TS*, *TV*, æquales erunt & rectæ *SR*, *VR* & anguli *TRS*, *TRV*. (f) Unde punctum *R* erit ad sectionem conicam, & perpendiculum *TR* tanget eandem & contra. *Q. E. D.*

PRO-

(f) * Si fuerint S, & H, Ellipseos umbilici, erit SR + RH = HV = axi majori, ac proindè R punctum perimetri Ellipsis quam TR tangit in R, ob angulos TRS, TRV, æquales (per prop. 52. & 46. lib. 3. conic. Apollon. Theor. III. & IV. de El.) & contrà si TR tangat Ellipsim in R, & ducatur SV, ad TR perpendicularis, erit ob angulos TRS, TRV, æquales VR = SR, & VH = SR + RH = axi majori.
 * Si fuerint S, & H, Hyperbolæ umbilici ob æquales TS, TV, erit SR = VR, & HR − SR = HV æqualis axi majori, & R punctum Hyperbolæ quam tangit in R recta TR ob angulos VRT, TRS, æquales (per prop. 51. & 46. lib. 3. conic. Apoll. Theor. III. & IV. de Hyperb.) & contrà si TR tangat Hyperbolam in R, & agatur SV ad TR perpendicularis erit VR = SR, & HV = HR − RS, æqualis axi majori, ut patet.



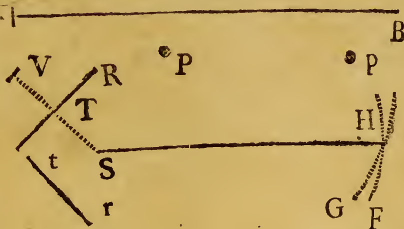
Si

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA X.

Datis umbilico & axibus principalibus describere trajectorias ellipticas & hyperbolicas, quæ transibunt per puncta data, & rectas positione datas contingent.

Sit S communis umbilicus figurarum; AB longitudo axis principalis trajectoriæ cujusvis; P punctum per quod trajectoria debet transire; & TR recta quam debet tangere. Centro P intervallo $AB-SP$, si orbita sit ellipsis, vel $AB+SP$, si ea sit hyperbola, describatur circulus HG. Ad tangentem TR demittatur perpendiculum ST, & producatur idem ad V, ut sit TV æqualis ST; centroque V & intervallo AB describatur circulus FH. Hac methodo sive dentur duo puncta P, p, sive duæ tangentes TR, tr, sive punctum P & tangens TR, describendi sunt circuli duo. Sit H eorum intersectio communis, & umbilicis S, H, axe illo dato describatur trajectoria. Dico factum. Nam trajectoria descripta (eo quod $PH+SP$ in ellipsi, & $PH-SP$ in hyperbola æquatur axi) transibit per punctum P, & (per lemma superius) tanget rectam TR. Et eodem argumento vel transibit eadem per puncta duo P, p, vel tanget rectas duas TR, tr. (g) *Q. E. F.*



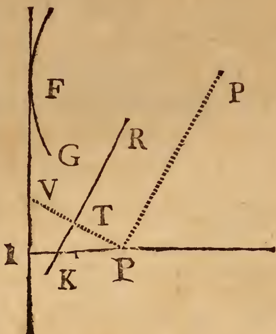
PROPOSITIO XIX. PROBLEMA XI.

Circa datum umbilicum trajectoriam parabolicam describere, quæ transibit per puncta data, & rectas positione datas continget.

Sit S umbilicus, P punctum & TR tangens trajectoriæ describendæ. Centro P intervallo PS describe circulum FG. Ab um-

* (g) Si orbita sit Hyperbola, focus H, erit in rectâ H S, ultra S, productâ.

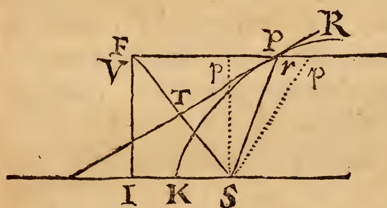
umbilico ad tangentem demitte perpendicularem *ST*, & produc eam ad *V*, ut sit *TV* æqualis *ST*. Eodem modo describendus est alter circulus *fg*, si datur alterum punctum *p*; vel inveniendum alterum punctum *v*, si datur altera tangens *tr*; dein ducenda recta *IF* quæ tangat duos circulos *FG*, *fg* si dantur duo puncta *P*, *p*, vel transeat per duo puncta *V*, *v*, si dantur duæ tangentes *TR*, *tr*, vel tangat circulum *FG* & transeat per punctum *V*, si datur punctum *P* & tangens *TR*. Ad *FI* demitte perpendicularem *SI*, eamque biseca in *K*; & axe *SK*, vertice principali *K* describatur parabola. Dico factum. (h) Nam parabola, ob æquales *SK* & *IK*, *SP* & *FP*, transibit per punctum *P*; & (per lem. XIV. corol. 3.) ob æquales *ST* & *TV* & angulum rectum *STR*, tanget rectam *TR*. *Q. E. F.*



PRO-

(h) 291. *Nam Parabola ob æquales SK & IK, SP & FP, transibit per punctum P* scilicet Parabola descripta *ob æquales SK & IK* habet pro directrice lineam IF (per Theor. II. de Parab. n. 224. de Conicis), cum verò distantia puncti cujusvis Parabolæ à Directrice sit æqualis distantiæ ejus puncti à foco, vice versâ, punctum quod æqualiter à foco & à Directrice distabit pertinebit ad Parabolam, Finge enim lineam FP Directrici perpendicularem occurrere quidem Parabolæ in puncto P, ita ut sit FP = SP, sed in eâ posse sumi aliud punctum p ita ut sit etiam Sp = Fp = FP ± Pp, erit ob FP = SP, Sp = SP ± Pp sed cum SPp sit Triangulum, absurdum est (per 20. 1. Elem.) esse Sp = SP ± Pp ergo absurdum est fingere aliud Punctum præter id quod ad Parabolam pertinet tale ut ejus distantiâ à directrice sit æqualis ejus distantiæ à foco, ergo *ob æquales SP & FP*, Parabola cujus directrix est IF & umbilicus S *transibit per punctum P.*

2us. Casus. Parabola descripta *ob æquales ST, TV, ob angulum Rectum STR tanget rectam TR*, ejus enim Parabolæ descriptæ directrix est VI. Jam verò ducatur ex V perpendicularis in directricem quæ rectæ TR occurrat in r & ab r ducatur ad focum linea rS, ob æquales ST TV & angulum rectum STR erit Vr = rS & punctum r ad Parabolam pertinebit per superiorem demonstrationis partem, eâdem ratione probabitur angulum VrT æqualem esse angulo TrS ideoque linea Tr bifariam dividit angulum VrS, sed ea linea Parabolæ Tangens est quæ bifariam dividit angulum quem faciunt duæ lineæ ductæ à puncto quovis Parabolæ una ad focum altera perpendiculariter ad directricem (per Theor. III. de Parabola n. 224.) ergo linea TR tangit Parabolam descriptam sive *Parabola descripta tanget Rectam TR.*



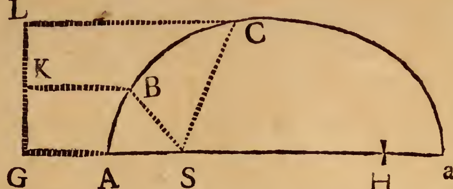
292.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XX. PROBLEMA XII.

Circa datum umbilicum trajectoriam quamvis specie (i) *datam describere, quæ per data puncta transibit & rectas tanget positione datas.*

Cas. 1. Dato umbilico *S*, describenda sit trajectoria *ABC* per puncta duo *B*, *C*. Quoniam trajectoria datur specie, dabitur ratio axis principalis ad distantiam umbilicorum. In ea ratione cape *KB* ad *BS*, & *LC* ad *CS*. Centris *B*, *C*, intervallis *BK*, *CL*, describe circulos duos, & ad rectam *KL*, quæ tangat eosdem in *K* & *L*, demitte perpendiculum *SG*, idemque seca in *A* & *a*, ita ut sit *GA* ad *AS* & *Ga* ad *aS* ut est *KB* ad *BS* & axe *Aa*, verticibus *A*, *a*, describatur trajectoria. Dico factum. Sit enim *H* umbilicus alter figuræ descriptæ, & cum sit *GA* ad *AS* ut *Ga* ad *aS*, erit divisim *Ga*−*GA* seu *Aa* ad *aS*−*AS* seu *SH* in eâdem ratione, ideoque in ratione quam habet axis principalis figuræ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus; (k) & propterea figura descripta est ejusdem speciei cum describenda. (l) Cumque sint *KB* ad *BS* & *LC* ad *CS* in eâdem ratione, transibit hæc figura per puncta *B*, *C*, ut ex conicis manifestum est.



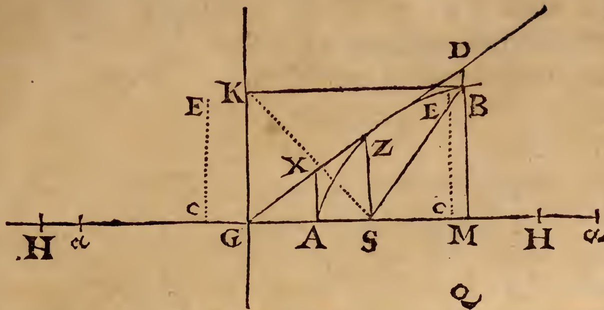
(i) 292. Sectiones conicæ sunt ejusdem speciei seu similes quarum axes duo, vel quod idem est, axis major & focorum distantia sunt inter se in datâ ratione ; Ex hâc enim ratione unicè pendent partium sectionis ratio ac respectiva positio, atque hinc fit ut parabolæ omnes similes sint quod in omnibus focorum distantia infinita majori axi æqualis sit.

(k) * Si describenda sit hyperbola, punctum a, sumi debet in perpendiculo SG, ad alteram partem lineæ GL, producto ut sit G, inter A, & a, tumque erit Ga + GA, seu Aa ad aS + AS, seu SH, in ratione GA ad AS, adeóque in ratione quam habet axis principalis hyperbolæ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus, & propterea hyperbola descripta similis est hyperbolæ describendæ.

(l) Ut demonstretur *puncta B & C ad Sectionem Conicam descriptam pertinere* quædam prævia ex Conicis sunt usurpanda.

293. Lemma... Sit sectionis conicæ AZB, axis major A a, foci S, H, semiaxis minor c E erectâ ad axem perpendiculari SZ per punctum Z, ducatur tangens D Z G quæ axi occurrat in G; tum ex punctis G, A, & quovis alio axis puncto M, erigantur ad axem perpendiculares G K, A X, M B D, & ex puncto sectionis B, ducatur ad G K, perpendicularis B K, erit 1°. $SZ = \frac{1}{2} L$, seu dimidio lateri recto, etenim ordinata in foco est semper æqualis semilateri Recto, (per Theor. III. de Ell. & Hyp. & Cor. 2. Theor. I. de Parab. n. 224.)

294.



294. 2°. Erit. GA ad AS sicut axis major ad distantiam focorum, hoc est $GA:AS=Aa:SH$; Nam cum G sit punctum in quo Tangens secat Diametrum, ejus distantiæ GA, Ga, ab utroque vertice sunt inter se sicut abscissæ AS Sa ab utroque vertice Diametri sumptæ, sive est (per Lem. V. de Conic. n. 224.) $GA:Ga=AS:Sa$ & convertendo $GA:Aa=AS:Sa-AS$ sive SH (quia $AS=Ha$) ergo alternando $GA:AS=Aa:SH$.

295. 3°. Erit factum $GS\times Sc$ æquale quadrato semi axis minoris, nam quia est $GA:AS=Aa:SH$, est componendo $GS:AS=SH+Aa:SH$, & sumendo dimidium terminorum ultimæ rationis est $GS:AS=Sc+ca$ (sive Sa)$:Sc$, est ergo $GS\times Sc=AS\times Sa$, sed factum $AS\times Sa$, (partium ab uno foco ad utrumque axis majoris verticem sumptarum) est semper æquale quadrato semi axis minoris, nam id factum æquatur in Ellipsi cA^2-cS^2 (per 5. 2. Elem.) & in Hyperbola cS^2-cA^2 (per 6. 2. Elem.) utrumque verò æquatur quadrato semi axis minoris per naturam focorum (Theor. III. de Hyper. & Ellip. 224.) est ergo $GS\times Sc=cE^2$.

296. 4°. Perpendicularis AS in axis Vertice A erecta & terminata ad Tangentem in extremitate *Z* ordinatæ quæ insistit foco S est æqualis AS distantiæ foci à Vertice... Nam cum ob Triangula similia XGA ZGS sit $GA:AX=GS:SZ$ sive $\frac{1}{2}L=\frac{2cE^2}{2cA}$ & sit $cE^2=GS\times Sc$ est $GA:AX=GS:\frac{GS\times Sc}{cA}=cA:Sc$ (& duplicando hos terminos) $=Aa:SH$, sed in eadem ratione est GA ad AS (294) ergo $GA:AX=GA:AS$ & $AX=AS$.

In Parabolâ idem verum est, in ea enim est $GA=AS$, $GS=2AS$ & $SZ=\frac{1}{2}L=2AS$ (Cor. I. Lem. V. de Coni. 224). Ergo hæc proportio $GA:AX=GS:SZ$ in hanc mutatur $AS:AX=2AS:2AS$ ergo $AS=AX$.

297. 5°. Linea à foco S, ad curvæ punctum quodvis B ducta est æqualis lineæ DM, quæ per id punctum transit, & perpendiculariter ad axim ducitur, terminaturque hinc ab axi, illinc à Tangente GZ Produc enim DM ad Q ubi iterum occurrit Sectioni Conicæ sitque $MQ=BM$, erit (per Cor. 2. Lem. III. de Conic. n. 224.) $ZX^2:ZD^2=AX^2:DM\times DP$ (sive DM^2-BM^2 per 6. 2. Elem.) sed ob Parallelas AX, SZ, MD est $ZX:ZD=AS:SM$ & $ZX^2:ZD^2=AS^2:SM^2$. Ergo est $AS^2:SM^2=AX^2$ (sive AS^2 per 296)$:DM^2-BM^2$ unde est $SM^2=DM^2-BM^2$ & addendo utrinque BM^2, SM^2+BM^2 (sive SB^2 per 47. 1. Elem.) $=DM^2$ & $SB=DM$.

298. 6°. Si ex sectionis quovis puncto B, ducatur perpendicularis BK ad lineam GK, & linea BS ad focum, erit semper $KB:BS=GA:AS$, nam propter Triangula similia GMD GAX, est GM (sive KB ob Parallelas GM & KB, GK & MB)$:MD$ (sive BS per 297) $=GA:AX$ (sive AS per 296) hoc est $KB:BS=GA:AS$ ideoque $KB:BS=Aa:SH$ quoniam $GA:AS=Aa:SH$ (per 294).

299. Conversa etiam vera est si ducatur perpendicularis in lineam GK, & in ea sumatur B, ita ut sit $KB:BS=GA:AS=Aa:SH$ punctum B est in Sectione Conicâ descriptâ.

Sit enim Sectio Hyperbola aut Parabola, illa in unico puncto B secabitur per lineam KB, eritque (per 298) $KB:BS=Aa:SH$, dico autem nullum aliud punctum β sumi posse in ea linea KB producta si lubet, ita ut sit $KB:BS=Aa:SH$, fingatur enim dari illud punctum β, subtrahanturque termini duarum priorum rationum à se mutuo, erit $KB-K\beta$ (sive $B\beta$)$:BS-\beta S=Aa:SH$ sed quia in Hyperbola est Aa, minor quam SH, & in Parabola ei est æqualis, erit $B\beta$ minor

De Motu Corporum.

Cas. 2. Dato umbilico *S*, describenda sit trajectoria quæ rectas duas *TR*, *tr* alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendicula *ST*, *St* & produc eadem ad *V*, *v*, ut sint *TV*, *tv*, æquales *TS*, *tS*. Biseca *Vv* in *O*, & erige perpendiculum infinitum *OH*, rectamque *VS* infinite productam seca in *K* & *k*, ita ut sit *VK* ad *KS* & *Vk* ad *kS* ut est trajectoriæ describendæ

nor aut æqualis differentiæ SB—Sβ, sed SBβ est Triangulum, ergo absurdum est (per 20. 1. Elem.) unum ejus latus ut Bβ esse minus aut æquale differentiæ aliorum, non datur ergo punctum illud β.

2°. Sectio sit Ellipsis; Ducatur SK; si GK sit æqualis semi axi minori, erit SK : GK = Aa : SH nam (per 295) est GS : cE (sive GK ex Hyp.) = cE : Sc & $GS^2 : GK^2 = cE^2 : Sc^2$, & componendo $GS^2 + GK^2$ (sive SK^2 per 47. 1. Elem.) : $GK^2 = cE^2 + Sc^2$ (sive cA^2 per nat. focorum) : Sc^2 & SK : GK = cA : Sc & duplicando terminos posterioris rationis est SK : GK = Aa : SH.

Si GK sit major quam cE erit $GS^2 : GK^2$ in minori ratione quam cE^2 ad Sc^2, & componendo erit $GS^2 + GK^2$ sive SK^2 ad GK^2 in minori ratione quam $cE^2 + Sc^2$ ad Sc^2 unde tandem deducetur in hoc casu esse SK ad GK in minori ratione quam Aa ad SH.

Et pariter si GK sit minor quam cE, erit SK ad GK in majori ratione quam Aa ad SH.

Sed (per princ. Trigo.) est in Triang. SKG, sinus totalis ad sinum ang. KSG (sive ad sinum anguli SKB huic æqualem ob Parallelas GS KB) sicut KS ad KG. Ergo ratio sinus totalis ad sin Ang. SKB, æqualis est rationi Aa ad SH, si GK sit æqualis cE, est illâ minor si GK superet cE, est illa major si GK minor sit quam cE.

Ut verò lineæ KB BS habeant rationem Aa ad SH, oportet ut in Triang. KBS, sinus angulorum KSB SKB sint in eâ ratione Aa ad SH; Ergo si GK sit æqualis cE, est Sinus totalis: Sin. SKB = Sin. KSB: Sin. SKB, ideoque in hoc casu erit Sin. tot. = Sin. KSB, hoc est, linea SB erit perpendicularis in SK, unica ergo erit, unicumque punctum B, sicut etiam linea KB in unico puncto Sectioni Conicæ occurret.

Si GK sit major cE est sin. totalis ad sin. SKB in minori ratione quam sin. KSB ad sin. SKB, unde sinus totalis minor esse deberet sinu KSB quod quidem est absurdum, nul-

axis principalis ad umbilicorum diſtantiam. Super diametro Kk deſcribatur circulus ſecans OH in H, & umbilicis S, H, axe principali ipſam VH æquante, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Nam biſeca Kk in X, & junge HX, HS, HV, Hv. Quoniam eſt VK ad KS ut Vk ad kS; & compoſite ut $VK+Vk$ ad $KS+kS$; diviſimque ut $Vk-VK$ ad $kS-KS$, id eſt, (m) ut $2VX$ ad $2KX$ & $2KX$ ad $2SX$, ideoque ut VX ad HX & HX ad SX, ſimilia erunt triangula VXH, HXS, & propterea VH erit ad SH ut VX ad XH, ideoque ut VK ad KS. Habet igitur trajectoriæ deſcriptæ axis principalis VH eam rationem ad ipſius umbilicorum diſtantiam SH, quam habet trajectoriæ deſcribendæ axis principalis ad ipſius umbilicorum diſtantiam, & propterea ejuſdem eſt ſpeciei. Inſuper cum VH, vH æquentur axi principali, & VS, vS à rectis TR, tr perpendiculariter biſecentur, liquet (ex lem. xv.) rectas illas trajectoriam deſcriptam tangere. *Q. E. F.* (n)

Caſ.

nulla ergo duci poteri linea SB quæ determinet punctum B tale ut ſit KB ad SB ſicut Aa ad SH, ſicut etiam in eo caſu linea KB nullibi occurrit Sectioni Conicæ.

Denique ſi GK ſit minor cE, eſt ſin. tot. ad ſin. SKB in majori ratione quam ſinus KSB ad ſin. SKB, dabitur ergo ſinus KSB, ſed ut ad acutum vel obtuſum angulum æqualiter pertinet duæ duci poterunt lineæ SB (ſed non plures) quæ requiſitam cum KB habeant rationem, ut etiam linea KB hoc in caſu duobus in punctis Ellipſim ſecat.

Ergo ſi $KB:BS=GA:AS=Aa:SH$ punctum B eſt in Sectione Conicâ.

Ex his autem liquet curvam ſecundum Newtonianam ſolutionem deſcriptam tranſire per puncta B & C omnia enim planè conveniunt ad Lemmatis (293) Hypotheſim.

In iis omnibus parabolam uſurpamus pro ellipſi in quâ diſtantia focorum infinita eſt, ac proindè axi majori æqualis.

(m) * *Id eſt, ut* $2VX$ *ad* $2KX$, & $2KX$ *ad* $2SX$; nam $KX=kX=HX$ (per conſtr.) adeóque $VK+Vk=2VK+2KX=2VX$, & $KS+kS=Kk=Vk-VK=2KX$; & quia $kS-KS=kX+SX=KX+SX=KS+2SX$, erit $kS-KS=2SX$, adeóque $VK:KS=VX:HX=HX:SX$. Quarè ſimilia erunt triangula VXH, HXS, quorum latera VX & XH, HX & KS, proportionalia communem angulum X, complectuntur.

(n) * Si deſcribenda ſit hyperbola, in SV, versùs V productâ, ità ſumantur puncta K, k, ut inter utrumque poſitum ſit V, cæteraque fiant ut Newtonus præſcribit, & quoniam $VK:KS=Vk:kS$, erit $Vk-VK:kS-KS=VK:KS=VK+Vk:KS+kS$, ſed $Vk-VK=2VX$, $kS-KS=2KX$, $VK+Vk=2KX$, & $KS+kS=2SX$. Reliqua demonſtratio eadem eſt ac pro ellipſi.

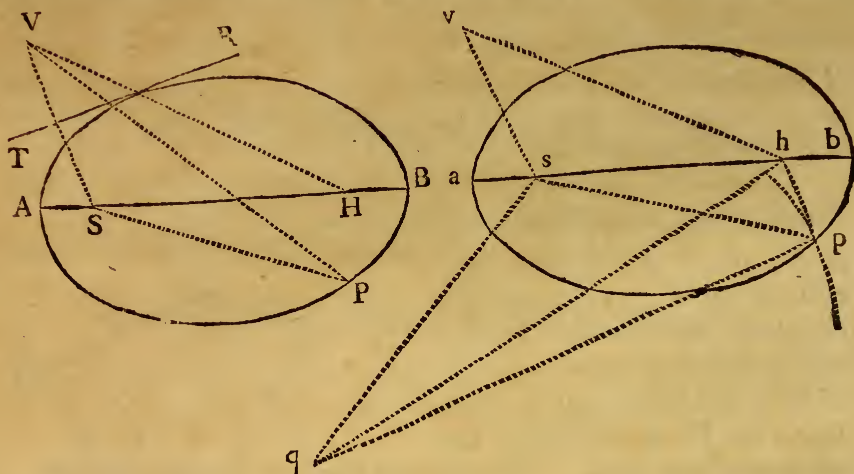
Caſ. 3. Dato umbilico *S* deſcribenda ſit trajectoria quæ rectam *TR* tanget in puncto dato *R*. In rectam *TR* demitte perpendicularem *ST*, & produc eandem ad *V*, ut ſit *TV* æqualis *ST*. Junge *VR* & rectam *VS* infinite productam ſeca in *K* & *k*, ita ut ſit *VK* ad *SK* & *Vk* ad *Sk* ut ellipſeos deſcribendæ axis principalis ad diſtantiam umbilicorum; circuloque ſuper diametro *Kk* deſcripto ſecetur producta recta *VR* in *H*, & umbilicis *S*, *H*, axe principali rectam *VH* æquante, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Namque *VH* eſſe ad *SH* ut *VK* ad *SK* atque ideo ut axis principalis trajectoriæ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus, (o) patet ex demonſtratis in caſu ſecundo, & propterea trajectoriam deſcriptam ejuſdem eſſe ſpeciei cum deſcribendâ, rectam vero *TR* quâ angulus *VRS* biſecatur, tangere trajectoriam in puncto *R*, patet ex conicis. *Q. E. F.*

Caſ. 4. Circa umbilicum *S* deſcribenda jam ſit trajectoria *APB*, quæ tangat rectam *TR*, tranſeatque per punctum quodvis *P* extra tangentem datum, quæque ſimilis ſit figuræ *aph*, axe principali *ab* & umbilicis *s*, *h* deſcriptæ. In tangentem *TR* demitte perpendiculum *ST*, & produc idem ad *V*, ut ſit *TV* æqualis *ST*. Augulis autem *SVP*, *SPV* fac angulos *hsq*, *shq* æquales; centroque *q* & intervallo quod ſit ad *ab* ut *SP* ad *VS* deſcribe circulum ſecantem figuram *apb* in *p*. Junge *sp* & age *SH* quæ ſit ad *sh* ut eſt *SP* ad *sp*, quæque angulum *PSH* angulo *psh* & angulum *VSH* angulo *psq* æquales conſtituat. Denique umbilicis *S*, *H*, & axe principali *AB* diſtantiam *VH* æquante, deſcribatur ſectio conica. Dico factum. Nam ſi agatur *sv* quæ ſit ad *sp* ut eſt *sh* ad *sq*, quæ-

(o) * Centro circuli litterâ X, notato, jungantur HX, HS, HV, & eadem eſt demonſtratio quæ caſus 2ⁱ pro ellipſi, & ſi producatur RV, SV, verſùs V, ut punctum V, ſitum ſit inter K & k, eadem quoque erit demonſtratio pro hyperbolâ.

Si-

que conſtituat angulum *vsp* angulo *hsq* & angulum *vsh* angulo *psq* æquales, triangula *svh*, *spq* erunt ſimilia, & propterea *vh*



erit ad *pq* ut eſt *sh* ad *sq*, id eſt (ob ſimilia triangula *VSP*, *hsq*) ut eſt *VS* ad *SP* ſeu *ab* ad *pq*. Æquantur ergo *vh* & *ab*. Porro (p) ob ſimilia triangula *VSH*, *vsh*, eſt *VH* ad *SH* ut *vh* ad *sh*, id eſt, axis conicæ ſectionis jam deſcriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis *ab* ad umbilicorum intervallum *sh*; & propterea figura jam deſcripta ſimilis eſt figuræ *aph*. Tranſit autem hæc figura per punctum *P*, (q) eo quod triangulum *PSH* ſimile ſit triangulo *psh*; & quia *VH* æquatur ipſius axi & *VS* biſecatur perpendiculariter à recta *TR*, tangit eadem rectam *TR*. (r) *Q. E. F.*

LEM-

* (p) Similia ſunt triangula VSH, vsh, nam (per conſtr.) angulus VSP = hsq = vsp, & angulus HSP = hsp, adeóque angulus VSH = vsh; & præteteà sp : sh = SP : SH, & sv : sp = sh : sq = SV : SP, ob ſimilia triangula VSP, hsq; quarè ex æquo sv : sh = SV : SH, triangula igitur VSH, vsh, quorum latera proportionalia æquales angulos complectuntur ſunt ſimilia.

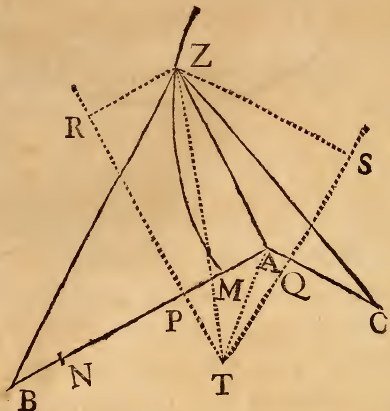
* (q) Nam ſi ducatur recta SP, perimetro figuræ occurrens in P, & angulum PSH, æqualem faciens angulo psh, patet ob ſimilitudinem ſectionum conicarum, triangula duo PSH, psh, fore ſimilia; undè viciſſim manifeſtum eſt punctum P, eſſe in perimetro figuræ, ſi triangulum PSH, ſimile ſit triangulo psh.

* (r) Eadem eſt conſtructio ac demonſtratio pro hyperbolâ, ſi foci H, h, & vertices B, b, ad contrariam partem transferantur.

Erit

LEMMA XVI.

A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ sunt.



Cas. 1. Sunto puncta illa data *A*, *B*, *C* & punctum quartum *Z*, quod invenire oportet; ob datam differentiam linearum *AZ*, *BZ*, locabitur punctum *Z* in hyperbola cujus umbilici sunt *A* & *B*, & principalis axis differentia illa data. Sit axis ille *MN*. Cape *PM* ad *MA* ut est *MN* ad *AB*, & erecta *PR* perpendiculari ad *AB*, demissaque *ZR* perpendiculari ad *PR*; erit, (f) ex naturâ hujus hyperbolæ, *ZR* ad *AZ* ut est *MN* ad *AB*. Simili discursu punctum *Z* locabitur in aliâ hyperbolâ, cujus umbilici sunt *A*, *C* & principalis axis differentia inter *AZ* & *CZ*, ducique potest *QS* ipsi *AC* perpendicularis, ad quam si ab hyperbolæ hujus puncto quovis *Z* demittatur normalis *ZS*, hæc fuerit ad *AZ* ut est differentia inter *AZ* & *CZ* ad *AC*. Dantur ergo rationes ipsarum *ZR* & *ZS* ad *AZ*, & idcirco datur earundem *ZR* & *ZS* ratio ad invicem; ideoque si rectæ *RP*, *SQ* concurrant in *T*, & agantur *TZ* & *TA*, figura *TRZS* dabitur specie, & recta *TZ* in qua punctum *Z* alicubi locatur, dabitur positione. Dabitur etiam recta *TA*, ut & angulus *ATZ*; & ob datas rationes ipsarum *AZ*

* (f) Erit ex naturâ hujus hyperbolæ ZR, ad AZ, ut est MN, ad AB, (298). 300.

AZ ac (t) TZ ad ZS dabitur earundem ratio ad invicem; & inde dabitur triangulum ATZ, cujus vertex est punctum Z. *Q. E. I.*

Cas. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta AZ & BZ, æquantur, ita age rectam TZ, ut bisecet rectam AB; dein quære triangulum ATZ ut supra.

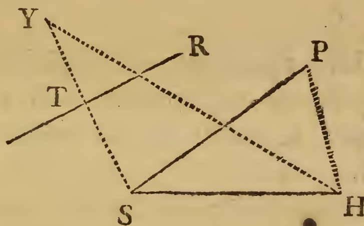
Cas. 3. Si omnes tres æquantur, locabitur punctum Z in centro circuli per puncta A, B, C transeuntis. *Q. E. I.*

Solvitur etiam hoc lemma problematicum per librum tactionum *Apollonii* à *Vieta* restitutum.

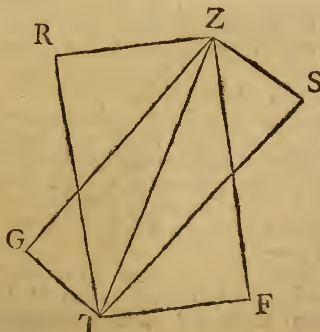
PROPOSITIO XXI. THEOREMA XIII.

Trajectoriam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data & rectas positione datas continget.

Detur umbilicus S, punctum P, & tangens TR, & inveniendus sit umbilicus alter H. Ad tangentem demitte perpendiculum ST, & produc idem ad Y, ut sit TY æqualis ST, & erit YH æqualis axi principali. Junge SP, HP, & erit SP diffe-

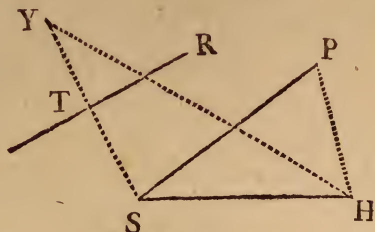


(t) 300. Et recta T Z, in quâ punctum Z, alicubi locatur, dabitur positione; ductis enim T F ad R T, & T G ad S T perpendicularibus, quæ sint in ratione datâ R Z ad Z S, agantur G Z, F Z, ipsis T S, R T parallelæ & se mutuò intersecantes in puncto aliquo Z, juncta TZ, habebit positionem quæsitam; patet enim perpendicula Z S, Z R, ex puncto Z, in rectas T S, T R, demissa, esse lineis TG, T F æqualia adeóque in datâ ratione.



De Motu Corporum.

differentia inter HP & axem principalem. (u) Hoc modo si dentur plures tangentes TR, vel plura puncta P, devenietur semper ad lineas totidem YH, vel PH, à dictis punctis Y vel P ad umbilicum H ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus SP differunt ab iisdem, atque ideo quæ vel æquantur sibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per lemma superius, datur umbilicus ille alter H. Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ vel est YH; vel, si trajectoria ellipsis est, $PH+SP$; sin hyperbola, $PH-SP$) habetur trajectoria. *Q. E. I.*

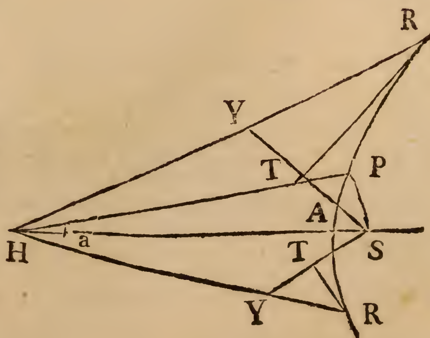


Scholium.

Ubi trajectoria est hyperbola, sub nomine hujus trajectoriæ oppositam hyperbolam non comprehendo. Corpus enim pergendo in motu suo in oppositam hyperbolam transire non potest.

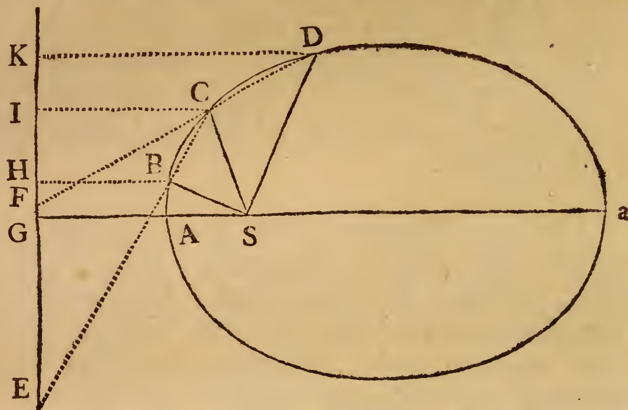
Casus

(u) 301. Si dentur tres tangentes, dabuntur tria puncta ut Y, ex quibus ad umbilicum H, inflectendæ erunt tres rectæ æquales ut YH, quod fit per Cas. 3. Lemmatis superioris. Si duæ dentur tangentes & punctum perimetri sectionis P, dabuntur duo puncta ut Y, ex quibus ad umbilicum H, inflectendæ erunt duæ rectæ æquales, & 3um punctum P, ex quo ducenda PH, cujus differentia à lineâ YH, est data SP. Nam in ellipsi $PH+SP=YH$, adeóque $YH-PH=SP$; in hyperbolâ $PH-SP=YH$, undè $PH-YH=SP$, estque Casus 2us Lem. XVI. Tandem si dentur tria perimetri puncta ut P, locum habet Casus 1us ejusdem Lemmatis.



* Ja-

Casus ubi dantur tria puncta sic solvitur expeditius. Dentur puncta *B*, *C*, *D*. Junctas *BC*, *CD* produc ad *E*, *F*, ut sit *EB* ad *EC* ut *SB* ad *SC*, & *FC* ad *FD* ut *SC* ad *SD*. Ad *EF* ductam & productam demitte normales *SG*, *BH*, inque *GS* infinite productâ cape *GA* ad *AS* & *Ga* ad *aS* ut est *HB* ad *BS*; & erit *A* vertex, & *Aa* axis principalis trajectoriæ: quæ, perinde ut *GA* major, æqualis, vel minor fuerit quam *AS*, erit ellipsis, parabola vel hyperbola; puncto *a* in primo casu cadente ad eandem partem lineæ *GF* cum puncto *A*; in secundo casu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ *GF*. Nam si demittantur ad *GF* perpendicula *CI*, *DK*; erit *IC* ad *HB* ut *EC* ad *EB*, hoc est, ut *SC* ad *SB*; & vicissim *IC* ad *SC* ut *HB* ad *SB* sive ut *GA* ad *SA*. Et simili argumento probabitur esse *KD* ad *SD* in eâdem ratione. (x) Jacent ergo puncta *B*, *C*, *D* in coni sectione circa umbilicum *S* ita descripta, ut rectæ omnes, ab umbilico *S* ad singula sectionis puncta ductæ, sint ad perpendicula à punctis iisdem ad rectam *GF* demissa in datâ illâ ratione.



Methodo haud multum dissimili hujus problematis solutionem tradit clarissimus Geometra *de la Hire*, conicorum suorum lib. VIII. prop. XXV.

SEC-

(x) * *Jacent ergo puncta B, C, D, in Coni Sectione* (vide n. 298.)

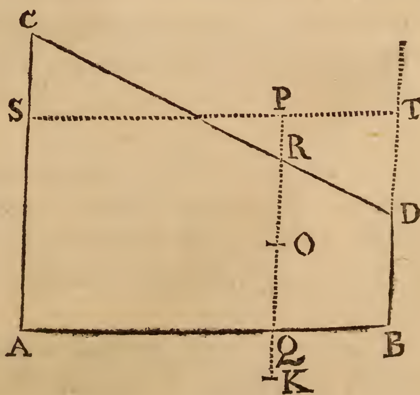
SECTIO V.

Inventio orbium ubi umbilicus neuter datur.

LEMMA XVII.

Si à datæ conicæ sectionis puncto quovis P *ad trapezii alicujus* ABDC, *in conicâ illâ sectione inscripti, latera quatuor infinitè producta* AB, CD, AC, DB *totidem rectæ* PQ, PR, PS, PT *in datis angulis ducantur, singulæ ad singula: rectangulum ductarum ad opposita duo latera* PQ×PR, *erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera opposita* PS×PT *in datâ ratione.*

Cas. 1. Ponamus primò lineas ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, putà *PQ* & *PR* lateri *AC*, & *PS* ac *PT* lateri *AB*. Sintque insuper latera duo ex oppositis, putà *AC* & *BD*, sibi invicem parallela. Et recta, quæ bisecat parallela illa latera, erit una ex diametris conicæ sectionis, & bisecabit etiam *RQ*. Sit *O* punctum in quo *RQ* bisecatur, & erit *PO* ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc *PO* ad *K*, ut sit *OK* æqualis *PO*, & erit *OK* ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta *A*, *B*, *P* & *K* sint ad conicam sectionem, & *PK* secet *AB* in dato angulo, erit (per prop. 17, 19, 21 & 23. lib. III. conicorum *Apollonii*) rectangulum *PQK* ad rectangulum *AQB* in datâ ratione. (y) Sed *QK* & *PR* æqua-



(y) *Erit Rectangulum PQK ad Rectangulum AQB in datâ ratione.* Liquet (per Lem. III. de Conic.) quod si linea quævis in Sectione Conicâ terminata ut PK secet aliam

æquales sunt, utpote æqualium OK, OP, & OQ, OR differentiæ, & inde etiam rectangula PQK & $PQ \times PR$ æqualia sunt; atque ideo rectangulum $PQ \times PR$ est ad rectangulum AQB, hoc est ad rectangulum $PS \times PT$ in datâ ratione. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ponamus jam trapezii latera opposita AC & BD non esse parallela. Age Bd parallelam AC & occurrentem tum rectæ ST in t, tum conicæ sectioni in d. Junge Cd secantem PQ in r, & ipsi PQ parallelam age DM secantem Cd in M & AB in N. Jam ob similia triangula BTt, DBN; est Bt seu PQ ad Tt ut DN ad NB. Sic & (z) Rr est ad AQ seu PS ut DM ad AN. Ergo ducendo antecedentes in antecedentes & consequentes in consequentes, ut rectangulum PQ in Rr est ad rectangulum PS in Tt, ita rectangulum NDM est ad rectangulum ANB, & (per cas. 1.) ita rectangulum PQ in Pr est ad rectangulum PS in Pt, (†) ac divisim ita rectangulum $PQ \times PR$ est ad rectangulum $PS \times PT$. *Q. E. D.*

Cas.

aliam lineam etiam in Sectione Conicâ terminatam ut A B, Rectangulum partium lineæ PK erit ad Rectangulum partium lineæ A B ut Rectangulum partium lineæ cujusvis alîus Parallelæ lineæ P K & ad Sectionem terminatæ, ad Rectangulum partium quas hæc nova linea secat in lineâ A B: ideo ubicumque sit punctum P Rectangula PQK & AQB erunt in eâdem datâ ratione.

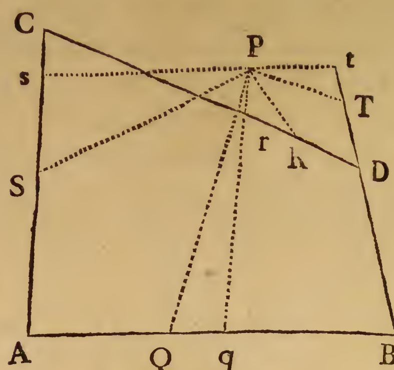
(z) * *Rr : AQ seu PS = DM : AN.* Sunt enim propter parallelas R r, D M, triangula r CR MCD similia, ideóque R r : D M = C r : C M; sed est C r : C M = AQ vel PS : AN; ergò R r : D M = AQ, vel PS : A N & R r : PS = D M : A N.

(†) * *Ac divisim.* Ex Demonstratis NDM : A N B = PQ × R r : PS × T t = PQ × P r : PS × P t, & divisim NDM : A N B = PQ × P r − PQ × R r : PS × P t − PS × T t = PQ × P R : PS × P T, sed ratio NDM ad A N B data est, ergò & ratio PQ × P R ad PS × P T.

 * Cum

De Motu Corporum.

Cas. 3. Ponamus denique lineas quatuor *PQ*, *PR*, *PS*, *PT* non esse parallelas lateribus *AC*, *AB*, sed ad ea utcunque inclinatas. Earum vice age *Pq*, *Pr* parallelas ipsi *AC*; & *Ps*, *Pt* parallelas ipsi *AB*; & propter datos angulos triangulorum *PQq*, *PRr*, *PSs*, *PTt*, dabuntur rationes *PQ* ad *Pq*, *PR* ad *Pr*, *PS* ad *Ps*, & *PT* ad *Pt*; atque ideo rationes compositæ $PQ \times PR$ ad $Pq \times Pr$, & $PS \times PT$ ad $Ps \times Pt$. Sed, per superius demonstrata, ratio $Pq \times Pr$ ad $Ps \times Pt$ data est: ergo & ratio $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. *Q. E. D.*



LEMMA XVIII.

Iisdem positis, si rectangulum ductarum ad opposita duo latera trapezii PQ×PR *sit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera* PS×PT *in datâ ratione; punctum* P, *à quo lineæ ducuntur, tanget conicam sectionem circa trapezium descriptam.*

Per puncta *A*, *B*, *C*, *D* & aliquod infinitorum punctorum *P*, putà *p*, concipe conicam sectionem describi: dico punctum *P* hanc semper tangere. Si negas, junge *AP* secantem hanc conicam sectionem alibi quam in *P*, si fieri potest, putà in *b*. Ergo si ab his punctis *p* & *b* ducantur in datis angulis ad latera trapezii rectæ *pq*, *pr*, *ps*, *pt* & *bk*, *bn*, *bf*, *bd*; erit ut $bk \times bn$ ad $bf \times bd$ ita (per lem. XVII.) $pq \times pr$ ad $ps \times pt$, & ita (per hypoth.) $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. Est & propter similitudinem trapeziorum *bkAf*, *PQAS*, ut *bk* ad *bf* ita *PQ* ad *PS*. Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correspondentes hujus, erit *bn* ad *bd* ut *PR* ad *PT*. (‡) Ergo trapezia æquiangula *Dnbd*; *DRPT*

(‡) * Cum sit $bk \times bn : bf \times db = PQ \times PR : PS \times PT$ item $bf : bk = PS : PQ$ erit $bn : bd = PR : PT$.

Ergò

ſimilia ſunt, & (a) eorum diagonales *Db*, *DP* propterea coincidunt. Incidit itaque *b* in interſectionem rectarum *AP*, *DP* ideoque coincidit cum puncto *P*. Quare punctum *P*, ubicunque ſumatur, incidit in aſſignatam conicam ſectionem. *Q. E. D.* (b)

Corol. Hinc ſi rectæ tres *PQ*, *PR*, *PS* à puncto communi *P* ad alias totidem poſitione datas rectas *AB*, *CD*, ſin-

(a) *Ergò trapezia æquiangula D n b d, D R P T, ſimilia ſunt, & eorum diagonales D d, D P, propterea coincidunt;* nam jungantur n d, R T, & duo triangula n d b, R T P, æquiangula erunt ob latera b n, b d, & P R, P T; proportionalia, & angulos n b d, R P T, æquales; quarè & duo triangula n d D, R T D, æquiangula erunt ob angulum D, communem, & angulos ad T & t, R & n, æquales, erit igitur b n : n D = P R : R D, adeóque ductis diagonalibus D b, D P, duo triangula b D n, P D R, erunt ſimilia, ac proindè angulus P D R, æqualis angulo b D n, quod eſſe non poteſt, niſi diagonales D b, D P, coincidant.

(b) 302. Lemma XVIII per analyſim facilè demonſtrari poteſt. Producta enim P S, donec ſingulis trapezii lateribus occurrat in F, E, S, H, ob datos omnes angulos figuræ, data erit ratio laterum quibus ſingula triangula F P T, F E D, P E R, E C S, S H A, P H Q, clauduntur. Aſſumptis igitur C E, tanquam abſciſſâ & P E tanquam ordinatâ loci punctorum P, data erit ratio P E, ad P R, adeóque P E, in datam quantitatem ducta æquabitur ipſi P R; ob datam C D, invenietur E D, ut potè æqualis C D − C E, & per triangulum F E D ſpecie datum invenietur E F, ac proindè P F = E F − E P, & inde per triangulum FPT, invenietur PT, omneſque illæ lineæ exprimentur per lineas C E, P E, unius dimenſionis, & alias datas quantitates. Similiter E S & C S & S A = C A − C S, atquè H S, per triangulum S A H, ſpecie datum, & hinc P H = H S + S E + E P, adeóque P Q, per triangulum P H Q, invenientur in lineis C E & P E, unius dimenſionis & aliis datis quantitatibus. Quarè in rectangulis P Q × P R, P S × P T, rectæ variabiles C E, P E, non plures quam duas dimenſiones obtinebunt, undè æquatio quæ ex rectangulo-

DE MOTU CORPORUM.

ſingulæ ad ſingulas, in datis angulis ducantur, ſitque rectangulum ſub duabus ductis (c) $PQ \times PR$ ad quadratum tertiæ PS in datâ ratione: punctum P, à quibus rectæ ducuntur, locabitur in ſectione conicâ quæ tangit lineas AB, CD in A & C; & contra. Nam coeat linea BD cum lineâ AC, manente poſitione trium AB, CD, AC; dein coeat etiam linea PT cum linea PS: & rectangulum $PS \times PT$ evadet PS *quad.* rectæque AB, CD, quæ

gulorum illorum ratione datâ reperitur ſecundum gradum non ſuperabit; Cum igitur, ut vulgò notum eſt, æquationis quadraticæ locus ſit Sectio conica, patet locum punctorum P, eſſe ad ſectionem conicam. Quod autem ſectio illa per puncta C, D, P, A, tranſeat inito calculo facilè oſtenditur, nam ſi in æquatione loci ponatur $CE = o$, invenietur valor unus ipſius $PE = o$, adeóque punctum P, cadit in C, ſi ponatur $CE = CD$, invenietur quoque valor unus $PE = o$, ac proindè punctum P, cum puncto D, coincidit; idem pari argumento reſpectu punctorum A, B, reperitur, ſi ponatur $AQ = o$ vel $AQ = AB$.

(c) *Hinc ſi rectæ tres* &c. Sint tres lineæ AB, CD, AC poſitione datæ, & lineæ AB, CD tangant ſectionem conicam in A & C, & à puncto communi P ducantur tres Rectæ PQ, PR, PS in datis angulis ad ſingulas AB, CD, AC erit $PQ \times PR$ in ratione datâ ad quadratum tertiæ PS: Sit enim PS parallela lineæ DC & ſint RP, PQ parallelæ lineæ CA ſitque PK chorda Sectionis, ſumatur medium

quæ curvam in punctis A & B, C & D secabant, jam (†) curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt, sed tantùm tangent. LIBER PRIMUS.

Scholium.

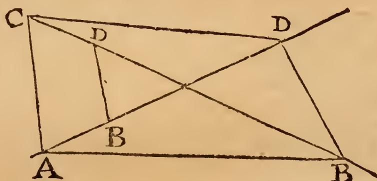
Nomen conicæ sectionis in hoc lemmate latè sumitur, ita ut sectio tam rectilinea per verticem coni transiens, quam circularis basi parallela includatur. ([d]) Nam si punctum p incidit in rectam, quâ puncta A & D vel C & B junguntur, conica sectio vertetur in geminas rectas, quarum una est recta illa in quam punctum p incidit, & altera est recta quâ alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si trapezii anguli duo oppositi simul sumpti æquentur duobus rectis, & lineæ quatuor PQ, PR, PS, PT ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibusvis æqualibus, sitque rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ æquale rectangulo sub duabus aliis $PS \times PT$, sectio conica eva-

dium O chordæ A C ducaturque per punctum D DO, quæ secabit tam chordam PK quam totam RQ in medio (vide Lem. IV. de Conic. n. 224.) hinc erit RK=PQ, sed est (per Cor. 2. Lem. III. de Conic. n. 224.) CR^2 ad $RP \times RK$ in datâ ratione, ideoque est CR^2 ad $RP \times PQ$ in datâ ratione, sed ob parallelas CR SP & CS RP est PS=CR, ergo PS^2 est ad $RP \times PQ$ in datâ ratione.

Si lineæ PS, RP, PQ in aliis sed datis angulis ad lineas AC CD AD inclinentur, dabuntur earum rationes ad has priores, unde deducetur eodem modo ac in Lemmate XVII. in isto etiam casu fore SP^2 ad $RP \times PQ$ in datâ ratione.

Pariter & conversa demonstrabitur ut Lemma XVIII.

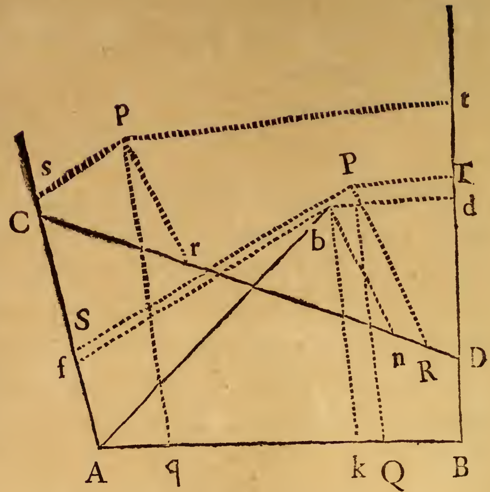
(†) * *Jam curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt, sed tantùm tangent*; puncta enim A & B, C & D, semper supponuntur in conicæ sectionis perimetro posita; quarè evanescentibus distantiis AB & CD, lineæ AB & CD, ultimò coincidunt cum tangentibus sectionem in punctis A & C. Vid. Lem. VI. Newt.



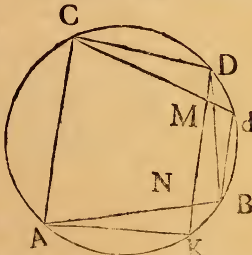
([d]) 303. Puncta quatuor A, B, D, C, sint in perimetro hyperbolæ vel in perimetris duarum hyperbolarum oppositarum, planum sectionis quo hyperbola in cono generatur accedat ad coni verticem; hyperbolæ in triangula rectilinea mutantur quæ erunt loca punctorum P, & quorum latera vel coincidunt cum duobus trapezii lateribus vel sunt ipsius diagonales, ac proindè punctum P, incidit in rectam quâ quævis ex punctis quatuor A, B, C, D, junguntur & *conica sectio vertitur in geminas rectas quarum una est recta illa in quâ punctum P incidit & altera est recta quâ alia duo ex punctis quatuor junguntur.*

De Motu Corporum.

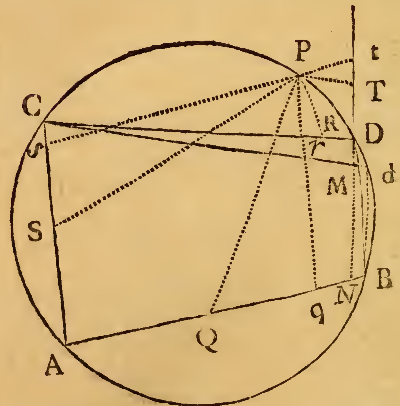
evadet circulus. (e) Idem fiet, si lineæ quatuor ducantur in angulis quibusvis, & rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ sit ad rectangulum sub aliis duabus $PS \times PT$ ut rectangulum sub sinubus angulorum S, T, in quibus duæ ultimæ PS, PT ducuntur, ad rectangulum sub sinubus angulorum Q, R, in quibus duæ primæ PQ, PR,



(e) 304. *Sectio Conica evadet circulus.* Si ex trapezii A B D C circulo inscripti angulo quovis D, agatur recta D N, lateri A C parallela, & lateri A B occurrens in N, deindè ex altero angulo B, ducatur B d, lateri A C parallela circulo occurrens in d, jungaturque C d rectam D N, secans in N, erit $DN \times DM = AN \times NB$. Nam jungatur A K, & quoniam arcus C D, & A K, D d, & K B, inter easdem parallelas intercepti æquales sunt, anguli D C d, & BAK, CDK & AKD, iis arcubus insistentes & æqualium arcuum chordæ C D, A K, æquantur; quarè triangula A K N, C D M, similia & æqualia sunt; est igitur $DM = NK$; sed ex naturâ circuli $AN \times NB = KN \times DN$, ergò $AN \times NB = DM \times DN$.



305. Si ergo sectio conica trapezio circumscripta vertatur in circulum, hoc est, si sectionis planum basi coni fiat parallelum, erit rectangulum P Q × P R ad rectangulum P S × P T, ut rectangulum sub sinubus angulorum S, T, ad rectangulum sub sinubus angulorum Q, R... Dem... factâ constructione Cas. 3^{i}. Lem. XVII. agantur rectæ D N, B d, lateri A C parallelæ, ut in articulo superiori; & erit per demonstrationem casus 2^{i}. Lem. XVII., $ND \times DM : AN \times NB = Pq \times Pr : Ps \times Pt$, hoc est (304) $Pq \times Pr = Ps \times Pt$. Jam verò angulorum sinubus litterâ S designatis



P R, ducuntur. (f) Cæteris in casibus locus puncti *P* erit aliqua trium figurarum, quæ vulgo nominantur sectiones conicæ. (g) Vice autem trapezii *A B C D* substitui potest quadrilaterum, cujus latera duo opposita se mutuo instar diagonalium decussant. Sed & è punctis quatuor *A*, *B*, *C*, *D* possunt unum vel duo abire ad infinitum, eoque pacto latera figuræ, quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in casu sectio conica transibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum. LIBER PRIMUS.

LEM-

signatis erit S. P q A = S. C A B, & S. P r C = S. A C D, ob parallelas P q, A C, & S. P s S = S. P s C = S. C A B, & S. P t T = S. A B D, ob parallelas s t, A B, & ob angulum A C D, complementum anguli ABD ad duos rectos, S. P t T = S. ACD.

Porrò

P Q : P q = S. P q A (S. C A B) : S. P Q B
P s : P S = S. P S C : S. P s S (S. C A B).
P R : P r = S. P r C (S. ACD) : S. P R C.
P t : P T = S. P T t : S. P t T. (S. A C D).

Ergò per compositionem rationum

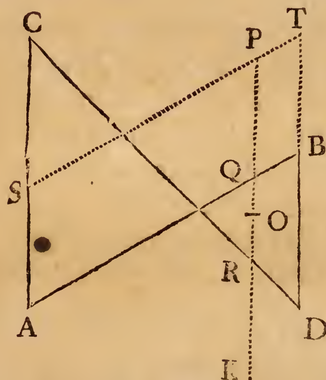
P Q × P R × P s × P t : P S × P T × P q × P r
= P Q × P R : P S × P T
= S. P S C × S. P T t : S. P Q B × S. P R C.

Q. e. D.

306. Coroll... Eâdem manente proportione, si omnes anguli ad S, T, Q, R, fuerint æquales, rectangulum P Q × P R, erit quoque æquale rectangulo P S × P T.

(f) * Nam vel punctum P, locabitur in sectione rectilineâ per verticem coni transeunte, vel in circulo, vel tandem in aliquâ trium sectionum conicarum, nullæ enim aliæ sunt sectiones conicæ, ut notum est.

(g) 307. *Vice autem trapezii substitui potest quadrilaterum A B D C, cujus latera duo A B, C D, se mutuò instar diagonalium decussant;* huic enim quadrilatero absque mutatione aptari possunt tam constructiones quam demonstrationes Lemmatum X V I I. & XVIII. Exemplum sit



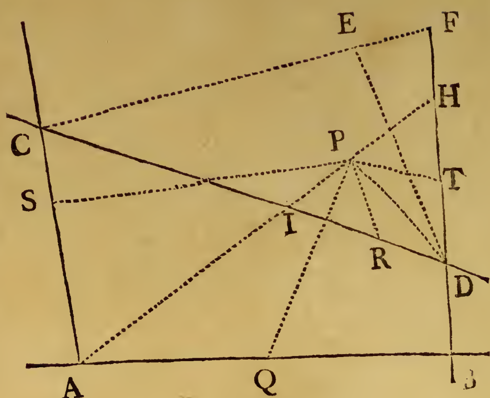
Cas. 1. Lem. X V I I. ponamus lineas ex puncto P, ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, putà P Q & P R, lateri A C & P S, ac PT, lateri A B; sintque insuper latera duo ex oppositis putà A C & B D, sibi invicem parallela & recta quæ bisecat &c. cæteræ omnes demonstrationis partes eodem modo transferuntur ad quadrilaterum CABD.

 308.

LEMMA XIX.

De Motu Corporum.

Invenire punctum P, *à quo si rectæ quatuor* PQ, PR, PS, PT *ad alias totidem positione datas rectas* AB, CD, AC, BD, *singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, rectangulum sub duabus ductis,* PQ×PR, *sit ad rectangulum sub aliis duabus,* PS×PT, *in datâ ratione.*



Lineæ *AB*, *CD*, ad quas rectæ duæ *PQ*, *PR* unum rectangulorum continentes ducuntur, conveniant cum aliis duabus positione datis lineis in punctis *A*, *B*, *C*, *D*. Ab eorum aliquo *A* age rectam quamlibet *AH*, in quâ velis punctum *P* reperiri. Secet ea lineas oppositas *BD*, *CD*, nimirum *BD* in *H* & *CD* in *I*, & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes *PQ* ad *PA* & *PA* ad *PS*, ideoque ratio *PQ* ad *PS*. Auferendo hanc à datâ ratione *PQ*×*PR* ad *PS*×*PT*, dabitur ratio *PR* ad *PT*, & addendo datas rationes *PI* ad *PR*, & *PT* ad *PH* dabitur ratio *PI* ad *PH*, atque ideo punctum *P*. *Q.E.I.*

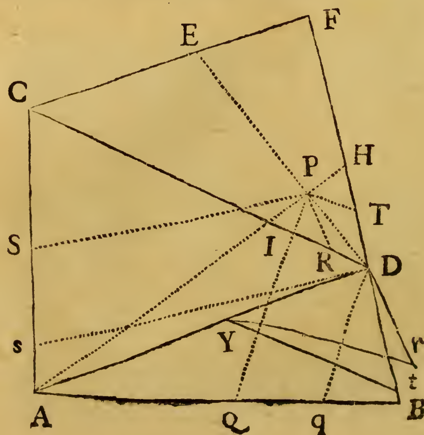
Corol. 1. Hinc (h) etiam ad loci punctorum infinitorum *P*

(h) 308. Minima sit punctorum P, D, distantia PD, agantur Ds, Dq, ad AC, AB, in angulis datis PSC, PQA, & junctâ AD, ex illius quovis puncto Y, ducantur Yr, lateri CD, parallela, & Yt, ad DB, in angulo dato PTH; tum ex puncto D, ad Yr, ducatur Dr, in angulo dato PRI; punctis P, D, coeuntibus erit PQ:PA=Dq:DA, & PA:PS=DA:Ds, adeóque PQ:PS=Dq:Ds, & proindè PQ×PR:PS×PT=Dq×PR:Ds×PT. Ratio data rectanguli PQ×PR ad PS×PT sit A ad B, & erit Dq×PR:Ds×PT=A:B, adeóque

PR:PT=A×Ds:B×Dq

& evanescente PD, ob similia triangula PIR, DYr, erit

PI:PR=DY:Dr.



punctum quodvis *D* tangens duci potest. Nam chorda *P D*, ubi puncta *P* ac *D* conveniunt, hoc est, ubi *A H* ducitur per punctum *D*, tangens evadit. Quo in casu, ultima ratio evanescentium *I P* & *P H* invenietur ut supra. Ipsi igitur *A D* duc parallelam *C F*, occurrentem *B D* in *F*, & in eâ ultimâ ratione sectam in *E*, & *D E* tangens erit, propterea quod *C F* & evanescens *I H* parallelæ sunt, & in *E* & *P* similiter sectæ.

Corol. 2. Hinc etiam locus punctorum omnium *P* definiri potest. Per quodvis punctorum *A*, *B*, *C*, *D*, puta *A*, duc loci tangentem *A E*, & per aliud quodvis punctum *B* duc tangenti parallelam *B F* occurrentem loco in *F*. Invenietur autem punctum *F* per lem. XIX. Biseca *B F* in *G*, & actâ indefinita *A G* erit positio diametri ad quam *BG* & *FG* ordinatim applicantur. Hæc *A G* occurrat loco in *H*, (i) & erit *A H* diameter sive latus transversum, ad quod latus rectum erit ut *B G q* ad *A G* × *G H*. Si (k) *A G* nusquam occurrit loco, lineâ *A H* existente infinitâ, locus erit parabola, & latus rectum ejus ad diametrum *A G* pertinens erit $\frac{BGq}{AG}$. Sin ea alicubi occurrit, locus hyperbola erit, ubi puncta *A* & *H* sita sunt ad easdem partes ipsius *G*: & ellipsis, ubi *G* intermedium est, nisi forte angulus *A G B* rectus sit, & insuper *BG quad.* æquale rectangulo *A G H*, quo in casu circulus habebitur.

& ob similia triangula P T H, Y t D, erit

P T : P H = Y t : D Y

ergò per compositionem rationum

P I : P H = A × D s × Y t : B × D q × D r = C E : E F, ob parallelas I H : C F, ducta D E, erit tangens in D.

(i) * Et erit A H, diameter (per prop. 7am lib. 2. conic. Apoll. Lemma IV. de Conic. 224.) sive latus transversum ad quod latus rectum erit ut BG^2 ad AG × GH (per prop. 21. lib. 1. conic. Apoll. Theor. II. de Hyp. & de Ellip. & Theor. I. de Parab. n. 224.)

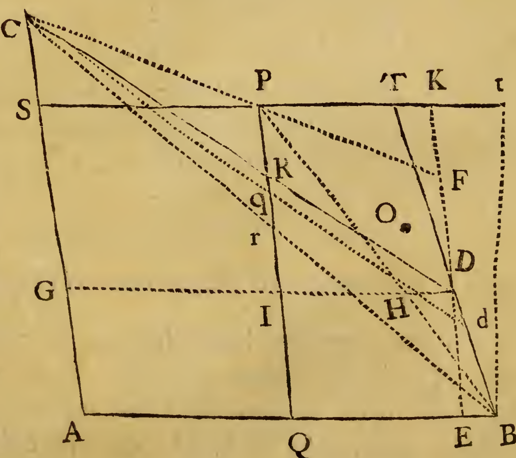
(k) 309. Locus omnium punctorum P. est aliqua ex quinque coni sectionibus, per Lem. XVIII. & ipsius scholium. Si locus fue-

Atque ita problematis veterum de quatuor lineis ab *Euclide* incœpti & ab *Appollonio* continuati non calculus, sed compositio geometrica, qualem veteres quærebant in hoc corollario exhibetur. (1)

LEMMA XX.

Si parallelogrammum quodvis ASPQ *angulis duobus oppositis* A *&* P *tangit sectionem quamvis conicam in punctis* A *&* P; *& lateribus unius angulorum illorum infinitè productis* AQ, AS *occurrit eidem sectioni conicæ in* B *&* C; *à punctis autem occursuum* B *&* C *ad quintum quodvis sectionis conicæ punctum* D *agantur rectæ duæ* BD, CD *occurrentes alteris duobus infinitè productis parallelogrammi lateribus* PS, PQ *in* T *&* R: *erunt semper abscissæ laterum partes* PR *&* PT *ad invicem in datâ ratione. Et contra, si partes illæ abscissæ sunt ad invicem in datâ ratione, punctum* D *tanget sectionem conicam per puncta quatuor* A, B, C, P *transeuntem.*

Cas. 1. Jungantur *BP*, *CP* & à puncto *D* agantur rectæ duæ *DG*, *DE*, quarum prior *DG* ipsi *AB* parallela sit & occurrat *PB*, *PQ*, *CA* in *H*, *I*, *G*; altera *DE* parallela sit ipsi *AC* & occurrat *PC*, *PS*, *AB* in *F*, *K*, *E*: & erit (per lem. XVII.) rectangulum *DE×DF* ad rectangulum *DG×DH*



fuerit linea recta ac proindè tangens ipsa AE, (303) recta BF, tangenti parallela nullibi occurret loco; si verò locus fuerit alia coni sectio, recta BF, huic sectioni occurret in puncto aliquo F, tumque diameter AG, vel utrinque terminabitur ad hyperbolas oppositas, quo casu, puncta A & H, sita erunt ad easdem partes ipsius G, vel claudetur Ellipsi aut circulo, & punctum G inter A & H positum erit, vel tandem nullibi occurret loco qui proindè erit parabola. Porrò datis sectionis conicæ vertice, diametro, hujus latere recto ac ordinatarum angulo sectio describi potest (per prop. 52. 53. 54. 55. lib. 1. conic. Apoll. sive ex iis quæ in notâ 224. de Conicis tradita fuere).

(1) * Hoc veterum problema primus in suâ Geometriâ Cartesius per calculum analyticum generaliter resolvit.

in ratione datâ. Sed est PQ ad DE (seu IQ) ut PB ad HB, ideoque ut PT ad DH; & vicissim PQ ad PT ut DE ad DH. Est & PR ad DF ut RC ad DC, ideoque ut (IG vel) PS ad DG, & vicissim PR ad PS ut DF ad DG; & conjunctis rationibus fit rectangulum $PQ \times PR$ ad rectangulum $PS \times PT$ ut rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$, atque ideo in datâ ratione. Sed dantur PQ & PS, & propterea ratio PR ad PT datur. *Q. E. D.*

Cas. 2. Quod si PR & PT ponantur in datâ ratione ad invicem, (m) tum simili ratiocinio regrediendo, sequetur esse rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$ in ratione datâ, ideoque punctum D (per lem. XVIII.) contingere conicam sectionem transeuntem per puncta A, B, C, P. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si agatur BC secans PQ in r, & in PT capiatur Pt in ratione ad Pr quam habet PT ad PR: erit Bt tangens conicæ sectionis ad punctum B. Nam concipe punctum D coire cum puncto B, ita ut chordâ BD evanescente, BT tangens evadat; & CD ac BT coincident cum CB & Bt.

Corol. 2. Et vice versâ si Bt sit tangens, & ad quodvis conicæ sectionis punctum D conveniant BD, CD; erit PR ad PT ut Pr ad Pt. Et contra, si sit PR ad PT ut Pr ad Pt: convenient, BD, CD ad conicæ sectionis punctum aliquod D.

Corol. 3. Conica sectio non secat conicam sectionem in punctis pluribus quam quatuor. Nam, si fieri potest, transeant duæ conicæ sectiones per quinque puncta A, B, C, P, O; easque secet recta BD in punctis D, d, & ipsam PQ secet recta Cd in q. Ergo PR est ad PT ut Pq ad PT; (n) unde PR & Pq sibi invicem æquantur, contra hypothesin. LEM-

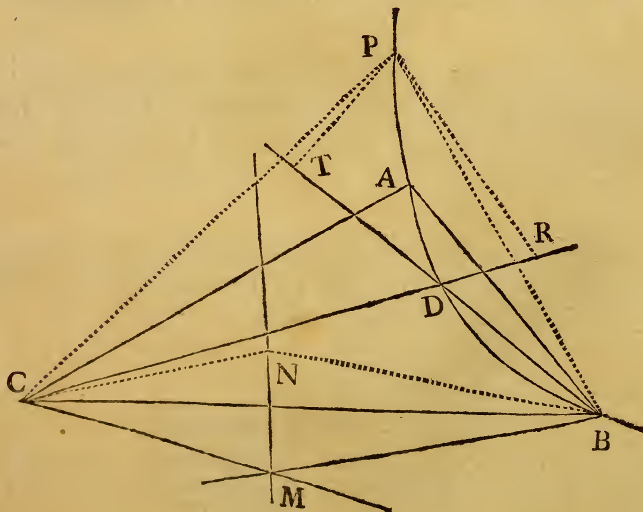
(m) * *Nam si PR & PT ponantur in ratione datâ*, erit quoque ob datas PQ, PS, rectangulum $PQ \times PR$, ad rectangulum $PS \times PT$, in ratione datâ; sed per demonstrata in 1°. casu $PQ \times PR : PS \times PT = DE \times DF : DH \times DG$; ergò $DE \times DF$ ad $DH \times DG$ in ratione datâ.

(n) * Cum enim duæ sectiones conicæ se mutuò intersecent in punctis O & B, (per hyp.) duci poterit recta BD, quæ duos sectionum arcus in B & O convenientes secet in punctis duobus, eritque per coroll. 1. lem. XX. $PR : PT = Pr : Pt = Pq : PT$, adeóque $PR : PT = Pq : PT$, undè PR & Pq. sibi invicem æquantur, ac proindè C d, coincidit cum C D, & punctum d, cum puncto D, (contra hyp.).

LEMMA XXI.

Si rectæ duæ mobiles & infinitæ BM, CM *per data puncta* B, C *ceu polos ductæ, concursu suo* M *describant tertiam positione datam rectam* MN; *& aliæ duæ infinitæ rectæ* BD, CD, *cum prioribus duabus ad puncta illa data* B, C *datos angulos* MBD, MCD *efficientes ducantur: dico quod hæ duæ* BD, CD *concursu suo* D *describent sectionem conicam per puncta* B, C *transeuntem. Et vice versâ, si rectæ* BD, CD *concursu suo* D *describant sectionem conicam per data puncta* B, C, A *transeuntem, & sit angulus* D B M *semper æqualis angulo dato* A B C, *angulusque* D C M *semper æqualis angulo dato* A C B: *punctum* M *continget rectam positione datam.*

Nam in rectâ *MN* detur punctum *N*, & ubi punctum mobile *M* incidit in immotum *N*; incidat punctum mobile *D* in im-



motum *P*. Junge *CN*, *BN*, *CP*, *BP*, & a puncto *P* age rectas *PT*, *PR* occurrentes ipsis *BD*, *CD* in *T* & *R*, & facientes an-

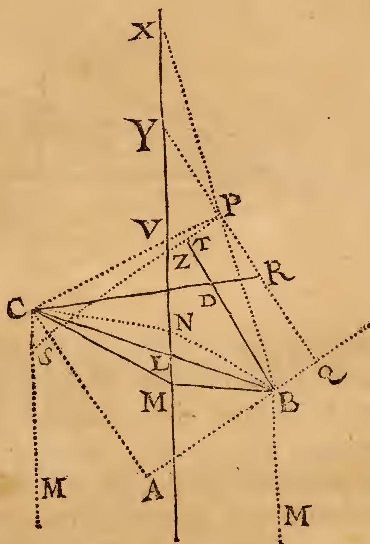
angulum *BPT* æqualem angulo dato *BNM*, & angulum *CPR* æqualem angulo dato *CNM*. Cum ergo (ex hypothesi) æquales sint anguli *MBD*, *NBP*, ut & anguli *MCD*, *NCP*; aufer communes *NBD* & *NCD*, & restabunt æquales *NBM* & *PBT*, *NCN* & *PCR*: ideoque triangula *NBM*, *PBT* similia sunt, ut & triangula *NCM*, *PCR*. Quare *PT* est ad *NM* ut *PB* ad *NB*, & *PR* ad *NM* ut *PC* ad *NC*. Sunt autem puncta *B*, *C*, *N*, *P* immobilia. Ergo *PT* & *PR* datam habent rationem ad *NM*, proindeque datam rationem inter se; atque ideo (per lem. xx. (o)) punctum *D*, perpetuus rectarum mobilium *BT* & *CR* concursus, contingit sectionem conicam, per puncta *B*, *C*, *P* transeuntem. *Q. E. D.*

Et

(o) *Atque ideo per Lemma XX.* &c. ut pateat Lemma XX. ad hanc demonstrationem applicari, hæc sunt supplenda constructioni Newtonianæ.

Concurrant lineæ BM, CM in puncto lineæ NM infinite distanti, hoc est, sint illi lineæ NM parallelæ, & ducantur lineæ BA, CA facientes cum illis lineis BM, CM angulos MBA, MCA datis MBD, MCD æquales. Dico lineas BA, CA fore parallelas lineis PT, PR secundum constructionem Newtonianam descriptis: Productis enim BP & PT (si necesse sit) donec secent rectam datam MN in X & Z, erit angulus BPZ exterior respectu Trianguli PZX, ideoque æqualis angulis X & PZX, & angulus BNM erit exterior respectu Trianguli BNX ideoque æqualis angulis X & XBN, anguli vero BPZ & BNM æquales sunt per constructionem Newton. ergo anguli X & PZX æquales sunt angulis X & XBN, unde angulus PZX, quem facit linea PT cum recta NM est æqualis angulo XBN sive angulo dato MBD quem facit linea BA cum linea BM ipsi NM parallela, ergo per naturam Parallelarum, est linea PT parallela lineæ BA.

Eodem plane modo demonstrabitur lineam CA esse Parallelam lineæ PR. Quibus positis, sit sectio Conica per puncta B, C, P & A transiens, lineæ BD, CD juxta conditiones in Lemmate præscriptas ductæ, concursu suo D percurrent eam sectionem Conicam: Productis enim lineis PT, PR, donec secent lineas CA, BA, in S & Q fiet *Parallelogrammum ASPQ*,



quod in Angulis suis oppositis A & P tangit sectionem conicam & lateribus anguli A productis occurrit eidem sectioni in B & C, & lineæ BD, CD à punctis occursuum B & C ductæ (secundum conditiones Lemmatis hujusce XXI.) *abscindunt à Parallelogrammi lateribus PS, PQ partes PT, PR quæ sunt ad invicem in datâ ratione* (per demonstrationem Newtonianam hujusce) *ergo* (per 2. casum Lem. XX.) *punctum D tangit sectionem Conicam per puncta quatuor A, B, C, P transeuntem.*

Et contra, ſi punctum mobile *D* contingat ſectionem conicam tranſeuntem per data puncta *B*, *C*, *A*, & ſit angulus *DBM* ſemper æqualis angulo dato *ABC*, & angulus *DCM* ſemper æqualis angulo dato *ACB*, & ubi punctum *D* incidit ſucceſſivè in duo quævis ſectionis puncta immobilia *p*, *P*, punctum mobile *M* incidat ſucceſſivè in puncta duo immobilia *n*, *N*: per eadem *n*, *N*, agatur recta *nN*, & hæc erit locus perpetuus puncti illius mobilis *M*. Nam, ſi fieri poteſt, verſetur punctum *M* in lineâ aliquâ curvâ. Tanget ergo punctum *D* ſectionem conicam per puncta quinque *B*, *C*, *A*, *p*, *P* tranſeuntem, ubi punctum *M* perpetuò tangit lineam curvam. Sed & ex jam demonſtratis tanget etiam punctum *D* ſectionem conicam per eadem quinque puncta *B*, *C*, *A*, *p*, *P*, tranſeuntem, (P) ubi punctum

(P) * *Ubi punctum M, perpetuò tangit lineam rectam* n N &c. cum enim angulorum datorum A B C, A C B, latera duo coincidunt cum rectâ C B, punctum A, aliorum laterum B A, C A, interſectio, locatur in ſectione conicâ per polos C, B, tranſeunte; dum verò latera duo B n, & C n, B N, & C N, ſeſe interſecant in n, N, aliorum laterum B p, & C p, B P & C P interſectiones p, P, ſunt in eâdem ſectione conicâ ex demonſtratis.

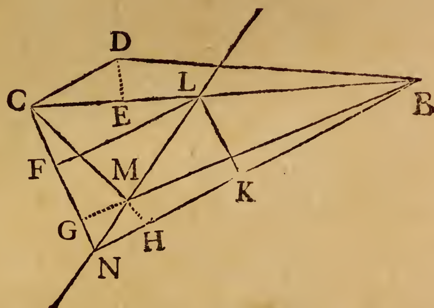
310,

tum M perpetuò tangit lineam rectam. Ergo duæ ſectiones conicæ tranſibunt per eadem quinque puncta, contra corol. 3. lemmat. xx. Igitur punctum M verſari in lineâ curvâ abſurdum eſt. *Q. E. D.* (q)

(q) 310. In hâc organicâ ſectionum conicarum deſcriptione, angulorum circà polos mobilium crura utrinque producantur, ut cum duo crura v. gr. C P, B P ſuprà lineam C B divergunt, infrà eandem producta convergant.

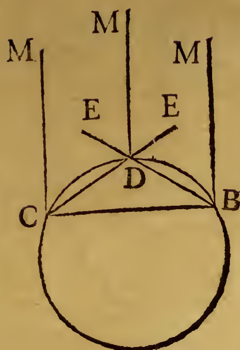
Si recta N M, per polorum alterutrum C, vel B, tranſeat, aut ſi anguli B C D, C B D, ſimul evaneſcant, punctum D deſcribet lineam rectam. Nam in 1°. caſu angulorum datorum unus immobilis manet, dum alter circà polum ſuum rotatur & crurum ſuorum cum immobilis anguli cruribus interſectione lineam rectam deſcribit; Si enim recta N M cum anguli dati D C M crure altero C M coincidat, immobili manente angulo D C M, alterius D B M crura rectas M C, C D perpetuò interſecabunt; deindè ſi crure B M, coincidente cum C B, ut rectam C M poſitione datam perpetuò ſecet in C, immobilis maneat angulus D B M, alterius D C M circà polum C rotati crus C D rectam B D perpetuò interſecabit.

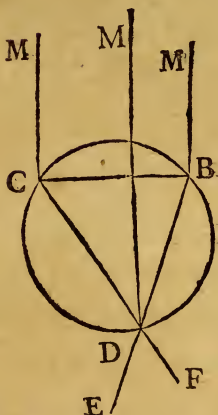
In 2°. caſu anguli B C N, C B N circà polos C, B mobiles, crurum duorum C N, B N concurſu, rectam N M L poſitione datam & aliorum crurum C B, B C ſeu C D, B D concurſu D lineam quamlibet percurrant, ſintque N punctum fixum M & D puncta mobilia; ductis ex puncto L dato ad latera data C N, B N perpendicularibus L F, L K ex puncto mobili M ad eaſdem perpendicularibus M G, M H & ex puncto D ad rectam C B, perpendiculari D E; ſit $CE = x$, $DE = y$, $CB = a$, ac proindè $EB = a - x$, $MN = z$, $LN = b$, $LF = c$, $FN = d$, $CN = e$, $LK = f$, $NK = h$, $NB = g$; & ob triangula N M G, N F L ſimilia, $NL\,(b) : LF\,(c) = MN\,(z) : GM = \frac{cz}{b}$, & $LN\,(b) : FN\,(d) = MN\,(z) : GN = \frac{dz}{b}$, adeòque $CG = CN - GN$



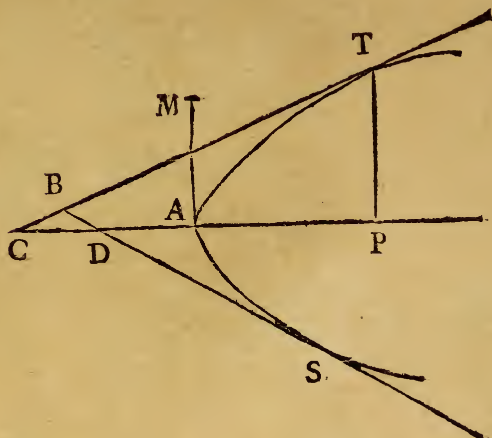
$= \frac{be - dz}{b}$; porrò ob angulos æquales DCE, MCG, & DEC, MGC, triangula D C E, M C G ſimilia ſunt; quarè $CG\,(\frac{be - dz}{b}) : GM\,(\frac{cz}{b}) = CE\,(x) : DE\,(y)$. Undè $czx = bey - dzy$, & $z = \frac{bey}{cx + dy}$; ob triangula N L K, N M H, ſimilia $NL\,(b) : LK\,(f) = NM\,(z) : MH = \frac{fz}{b}$, & $NL\,(b) : NK\,(h) = MN\,(z) : NH = \frac{hz}{b}$. undè $BH = \frac{gb - hz}{b}$; ob ſimilia triangula BED, BHM, $BH\,(\frac{gb - hz}{b}) : MH\,(\frac{fz}{b}) = BE\,(a - x) : DE\,(y)$ quarè $faz - fzx = gby - hzy$, & $z = \frac{gby}{fa + hy - fx} = \frac{bey}{cx + dy}$, adeóque $gcx + gdy = fae + hey - fex$. Cum igitur æquatio ſit unius dimenſionis, locus punctorum D, eſt linea recta.

DE MOTU CORPORUM.

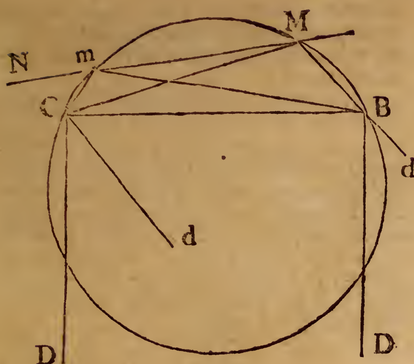




311. Si angulorum mobilium M C D, M B D crura C M, B M sibi invicem parallela maneant, seu, si recta N M ad distantiam infinitam abeat, crura alia C D, B D concursu suo D circulum describent, & contrà. Concurrant enim C M, D M, B M ad distantiam infinitam, & angulus M C D æqualis erit angulo M D F, ac M B D æqualis M D E; quoniam igitur dati sunt anguli M C D, M B D dabuntur quoque anguli M D F, M D E ac etiam angulus E D F & ei æqualis C D B. quarè cum curva concursu D descripta, necessariò transeat per puncta data C, & B, patet punctum D seu verticem anguli dati C D B chordæ C B insistentis esse in circuli peripheriâ. Et contrà, si concursus D, tangat circulum per puncta C, & B transeuntem, dabuntur tres anguli C D B, M C D, M B D atque adeò in quadrilatero M C D B M, cujus duo latera C M, B M concurrunt in M, dabitur angulus C M B, quod fieri nequit, nisi recta N M ad distantiam infinitam abeat, hoc est, nisi parallela fiant crura C M, B M.



312. Lemma. Si duæ rectæ parabolam tangant, & puncta contactuum in infinitum abeant, binæ tangentes se mutuò intersecant ad angulum infinitesimum & evadunt parallelæ axi parabolæ. Sit enim parabolæ axis C P, vertex A, C T tangens in T &, axem secans in C, T P ad axem ordinata, A M latus rectum axis, erit C P = 2 A P, & A P : P T = P T : A M, adeóque 2 A P (C P) : P T = 2 P T : A M. Si punctum contactûs T, in infinitum abeat, erit 2 P T, infinita respectu A M, & proindè C P, infinita respectu P T, hoc est, sinus totus C P infinitus evadit respectu tangentis P T anguli T C P, quarè angulus ille infinitesimus est, & tangens axi C P parallela, altera tangens B S, axem secet in D, & tangentem C T in B, & punctum contactûs S in infinitum abeat; erit angulus S D P infinitesimus & angulus T B D duobus internis atque infinitesimis B C D, B D C æqualis, erit quoque infinitesimus.

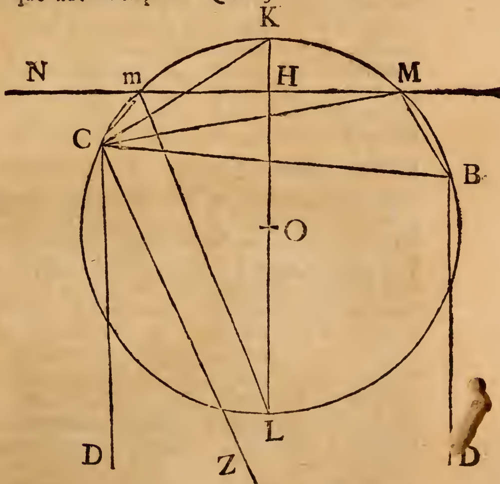


313. Super datâ rectâ C B, describatur segmentum circuli B M m C, quod capiat angulum B M C, datorum M C D, M B D supplementum ad quatuor rectos & compleatur circulus. Si recta data N M, quam in descriptione sectionis conicæ percurrit crurum B M C M concursus M hunc circulum secet, describetur hyperbola; si recta N M circulum contingat, describetur parabola; si recta N M circulo nullibi occurrat, describetur ellipsis.

Cas. 1. Recta N M circulum secet in punctis m, M, & crura C d, B d, & C D, B D, sibi invicem parallela erunt sive concurrent ad distantiam infinitam; nam cum in quadrilatero DCMBD d C m B d angulus M vel m sit complementum angulorum C & B ad quatuor Rectos, angulus ad D vel d, evanescit, ideoque lineæ C D, B D erunt parallelæ. Cum verò in omni Sectione Conicâ inveniri possit Tangens parallela chordæ cuivis datæ (per Lemma IV. de Conicis pag. 129.) ductæ intelligantur Tangentes Sectionis chordis C D C d Parallelæ, illæ Tangentes facient inter se angulum æqualem angulo D c d quem faciunt inter se illæ chordæ, & puncta contactuum erunt ad distantiam infinitam, nulla verò est sectio conica præter hyperbolam cujus ad infinitam distantiam tangentes angulum finitum communi intersectione faciant; in Ellipsi enim nulla est tangens ad distantiam infinitam, & in parabolâ hujusmodi tangentes angulum infinitesimum duntaxat, facerent (per Lemma superius 313). Si igitur recta M N circulum secet, describetur hyperbola cujus asymptoti seu tangentes ad distantiam infinitam rectis C D, C d parallelæ sunt & se mutuò intersecant in centro trajectoriæ. Q. e. 1.

Cas. 2. Quoniam angulus m C M, in 1°. casu æqualis est asymptotorum angulo D C d, ob æquales D C M, d C m; si manentibus circulo & distantiâ polorum C B, puncta intersectionum m, M ad se mutuò accedant, decrescet angulus D C d, & tandem punctis m, M coeuntibus, hoc est, secante M N in tangentem mutatâ angulus ille evanescet, dum rectæ C D, B D manent parallelæ, & ad distantiam infinitam cum trajectoriâ conveniunt. In hoc igitur casu duæ rectæ, ipsis C D, C d parallelæ & trajectoriam ad distantiam infinitam tangentes, se mutuò intersecant in angulo infinitesimo, seu in unicam lineam coeunt axi trajectoriæ parallelam, & proindè hyperbola casus primi mutatur in parabolam (312). Q. e. 2.

Cas. 3. Si recta N M nullibi circulo occurrat, rectæ B D, C D quarum concursu D sectio conica describitur nunquam possunt fieri parallelæ, & proindè curva non abit in infinitum, sed in se redit, estque adeò Ellipsis. Q. e. 3.



314. Coroll. 1. Ex his axes trajectoriæ facilè determinantur. Sit O centrum circuli C m M B ut suprà (313) descripti, ab hoc centro in rectam N M cadat perpendicularis O H circulo occurrens in pun-

punctis K & L, & rectæ N M in H, jungatur C K, & fiat angulus K C Z æqualis angulo mobili M C D, aut quod idem eſt, anguli M C D crus C M ducatur ad poſitionem C K, & alterum crus C Z erit parallelum axi majori, & perpendiculare axi minori trajectoriæ, modò punctum K ſit rectæ M N propius quam punctum oppoſitum L; nam arcus K m, K M ſunt æquales & angulus $KCm = KCM = \frac{1}{2} mCM = DCZ$; cumque m C M æqualis ſit angulo quo aſymptoti ſe mutuò interſecant, erit DCZ dimidium illius anguli, adeóque C Z parallela axi qui aſymptotorum angulum biſecat; & ſi punctum K regulæ propius ſit quam punctum oppoſitum L, erit angulus m C M acutus, ac proindè axis major qui angulum aſymptotorum acutum biſecat, erit rectæ C Z parallelus, axis verò minor huic rectæ perpendicularis; undè ſi detur trajectoriæ centrum dabuntur axes, & ſi deſcripta ſit trajectoria, invenitur axis poſitio, ductâ ad C Z normali ad trajectoriam utrinque terminatâ quam axis perpendiculariter & bifariam dividit; inventâ autem axium poſitione, habetur centrum in eorum interſectione communi. Superior autem conſtructio non ſolum hyperbolæ convenit, ſed & parabolæ in quam hyperbola mutatur, dum puncta m, M coeunt, atque etiam Ellipſi in quam vertitur parabola, dum recta M N, extrà circulum tranſit.

315. Coroll. 2. Axium trajectoriæ quadrata ſunt ad invicem ut K H, ad L H; nam axes ſunt inter ſe ut coſinus dimidii anguli aſymptotorum ad ſinum dimidii ejuſdem anguli; eſt verò K C m qui æqualis eſt dimidio anguli aſymptotorum, etiam æqualis angulo m L K, adeóque L H eſt ad H m ut axis ad axem; ſed $LH : Hm = Hm : KH$, ac proindè $LH : KH = LH^2 : Hm^2$. Ergò quadrata axium ſunt ad invicem ut L H ad K H.

316. Corol. 3. Si angulorum mobilium ſumma duobus rectis æqualis fuerit, rectæ B D, C D fiunt parallelæ, quandò punctum M pervenit ad m, ubi recta N M occurrit rectæ C B productæ, ſi opus eſt, & quandò M abit in infinitum, cum in utroque caſu evaneſcat angulus B M C. Si itaque linea M N, in hâc hypotheſi alicubi occurrat rectæ B C productæ, duæ rectæ trajectoriam in diſtantiâ infinitâ contingent, & ſe mutuò ad angulum datum interſecabunt, adeóque deſcribetur hyperbola; at ſi M N rectæ C B non occurrat, ſed ipſi parallela ſit, rectæ C D, B D non evadent parallelæ, niſi quando punctum M abit in infinitum, ac proindè trajectoria erit parabola. Quoniam igitur recta M N rectæ C B productæ occurrit,

PROPOSITIO XXII. PROBLEMA XIV.

Trajectoriam per data quinque puncta describere.

Dentur puncta quinque *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. Ab eorum aliquo *A* ad alia duo quævis *B*, *C*, quæ poli nominentur, age rectas *AB*, *AC*, hisque parallelas *TPS*, *QRP* per punctum quartum *P*. Deinde à polis duobus *B*, *C* age per punctum quintum *D*, infinitas duas *BDT*, *CRD*, novissimè ductis *TPS*, *PRQ* (priorem priori & posteriorem posteriori) occurrentes in *T* & *R*. Denique de rectis *PT*, *PR*, actâ rectâ *tr* ipsi *TR* parallelâ, abscinde quasvis *Pt*, *Pr* ipsis *PT*, *PR* proportionales; & si per earum terminos *t*, *r* & polos *B*, *C* actæ *Bt*, *Cr* concurrant in *d*, locabitur punctum illud *d* in trajectoriâ quæsitâ. Nam punctum illud *d* (per lem. xx.) versatur in conicâ sectione per puncta quatuor *A*, *B*, *C*, *P* transeunte; & lineis *Rr*, *Tt* evanescentibus, coït punctum *d* cum puncto *D*. Transibit ergo sectio conica per puncta quinque *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. *Q. E. D.*

Idem

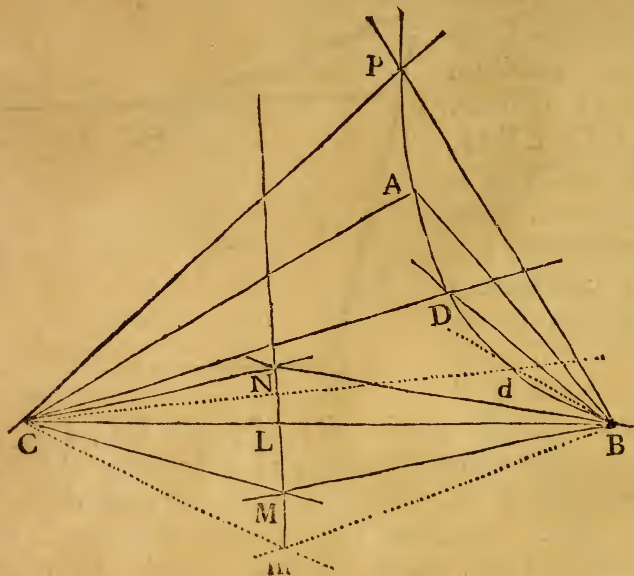
occurrit, vel ipsi parallela est, patet nunquam posse Ellipsim describi, si angulorum mobilium summa, duobus rectis æqualis fuerit.

Scholium. Si crura CM, BM concursu suo M percurrant sectionem conicam per polum alterum C transeuntem, crura duo reliqua CD, BD concursu suo D describunt curvam secundi generis per polum alterum B transeuntem, præterquam ubi anguli BCD, CBD simul evanescunt, quo casu punctum D describet sectionem conicam per polum C transeuntem, & eâdem methodo curvas varias tertii, quarti, superiorum generum describere licet. Sed hæc ad præsens institutum non pertinent, qui plura desideraverit legat Geometriam Organicam Celeberrimi Matheseos Professoris Colini Mac-Laurin, ex quo eximio opere non pauca excerpsimus.

De Motu Corporum.

Idem aliter.

E punctis datis junge tria quævis *A*, *B*, *C*; & circum duo eorum *B*, *C*, ceu polos, rotando angulos magnitudine datos *ABC*, *ACB*, applicentur crura *BA*, *CA* primò ad punctum *D*, deinde ad punctum *P*, & notentur puncta *M*, *N* in qui-



bus altera crura *BL*, *CL* casu utroque se decussant. Agatur recta infinita *MN*, & rotentur anguli illi mobiles circum polos suos *B*, *C*, eâ lege ut crurum *BL*, *CL* vel *BM*, *CM* intersectio, quæ jam sit *m*, incidat semper in rectam illam infinitam *MN*; & crurum *BA*, *CA*, vel *BD*, *CD*, intersectio, quæ jam sit *d*, trajectoriam quæsitam *PADdB* delineabit. Nam punctum *d* (per lem. XXI.) continget sectionem conicam per puncta *B*, *C* transeuntem; & ubi punctum *m* accedit ad puncta *L*, *M*, *N*, punctum *d* (per constructionem) accedet ad puncta *ADP*. Describetur itaque sectio conica transiens per puncta quinque *A*, *B*, *C*, *P*, *D*. *Q. E. F.*

Corol.

Corol. 1. (r) Hinc recta expeditè duci poteſt, quæ trajectoriam quæſitam in puncto quovis dato *B* continget. Accedat punctum *d* ad punctum *B*, & recta *B d* evadet tangens quæſita.

Corol. 2. (ſ) Unde etiam trajectoriarum centra, diametri & latera recta inveniri poſſunt, ut in corollario ſecundo lemmatis XIX.

Scholium.

Conſtructio prior evadet paulo ſimplicior jungendo *B P*, & in eâ, ſi opus eſt, productâ capiendo *Bp* ad *BP* ut eſt *PR* ad *PT*; & per *p* agendo rectam infinitam *p e* ipſi *SPT* parallelam, & in eâ (t) capiendo ſemper *p e* æqualem *P r*; & agendo rectas *B e*, *C r* concurrentes in *d*. Nam cum ſint *P r* ad *P t*, *P R* ad *PT*, *pB* ad *PB*, *p e* ad *P t* in eâdem ratione; erunt *p e* & *P r* ſemper æquales. Hâc methodo puncta trajectoriæ inveniuntur expeditiſſimè, niſi mavis curvam, ut in conſtructione ſecundâ, deſcribere mechanicè.

PRO-

(r) 317. Tangens in B, coincidit cum crure B d anguli mobilis d B m, dum alterius anguli d C m, crus C d, coincidit cum rectâ CB. Nam in hoc caſu, chorda B d evaneſcit & poſitione congruit cum tangente; unde tangens per punctum quodvis datum expeditè duci poteſt etiam nondùm deſcriptâ ſectione conicâ, ſi punctum illud datum pro polo uſurpetur.

(ſ) 318. Per quodvis punctorum datorum puta h, duc trajectoriæ tangentem, & per aliud quodvis punctum datum C, duc tangenti parallelam occurrentem trajectoriæ jam deſcriptæ in puncto aliquo; aut ſi deſcripta non fuerit trajectoria circà polos, rotentur anguli mobiles, donec crurum C D, B D concurſus D, reperiatur in rectâ tangenti parallelâ; vel tandem punctum illud in quo recta tangenti parallela trajectoriæ occurrit, geometricè quæratur per lem. XIX. Nam (vid. fig. & demonſtr. Lem. XX) cum data ſint quinque puncta C, A, B, D, P, dabitur ratio conſtans rectangulorum PQ × PR, PS × PT, hoc eſt, rectangulorum DE × DF, DG × DH, adeóque (per Lem. XIX.) invenietur punctum concurſus trajectoriæ cum lineâ per punctum datum C ductâ. Cætera fiant ut in coroll. 2°. Lem. XIX. poſſent etiam trajectoriarum axes & centra inveniri eo modo quo docuimus num. 314.

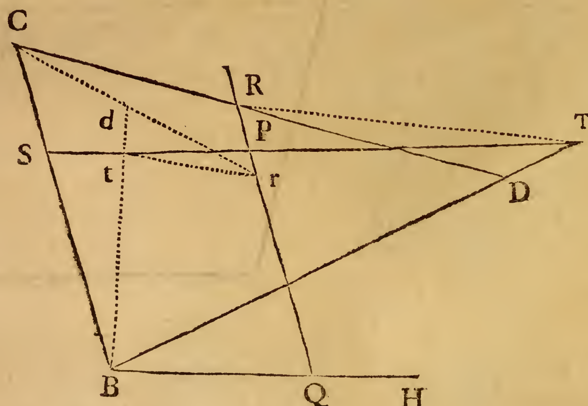
(t) * Hoc eſt linearum p e, P r, alterutra ad arbitrium capiatur, & altera aſſumptæ æqualis fiat, aganturque rectæ B e, C r, concurrentes in d; nam (per priorem conſtr.) P r : P t = P R : P T = p B : PB, (per hanc conſtr.); & junctâ B t, ob parallelas p e, P t, erit p B : P B = p e : P t, atque adeò P r : P t = p e : P t, unde P r = p e.

* De-

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA XV.

Trajectoriam describere, quæ per data quatuor puncta transibit, & rectam continget positione datam.

Cas. 1. Dentur tangens *HB*, punctum contactus *B*, & alia tria puncta *C*, *D*, *P*. Junge *BC*, & agendo *PS* parallelam rectæ *BH*, & *PQ* parallelam rectæ *BC*, comple parallelogrammum *BSPQ*. Age *BD* secantem *SP* in *T*, & *CD* secantem



PQ in *R*. Denique, agendo quamvis *tr* ipsi *TR* parallelam, de *PQ*, *PS* abscinde *Pr*, *Pt* ipsi *PR*, *PT* proportionales respectivè; & actarum *Cr*, *Bt* concursus *d* (per lem. xx.) (u) incidet semper in trajectoriam describendam.

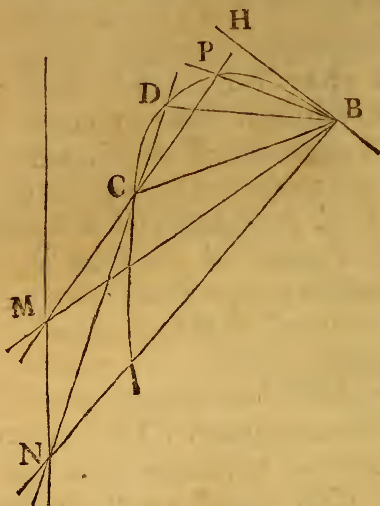
Idem aliter.

Revolvatur tum angulus magnitudine datus *CBH* circa polum *B*, tum radius quilibet rectilineus & utrinque productus *DC* circa polum *C*. Notentur puncta *M*, *N*, in quibus anguli crus *BC*

(u) * Demonstratio clara fit, si in figurâ Lem. XX: punctum B accedat ad punctum A, & recta ABQ sectionis conicæ tangens evadat.

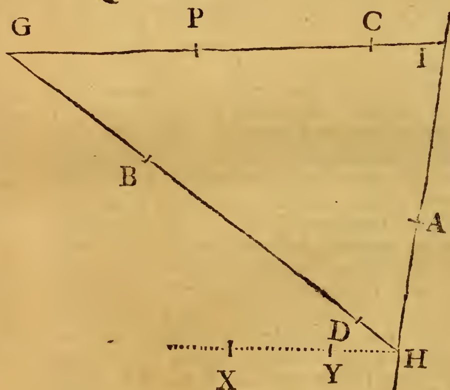
* Nam

BC secat radium illum, ubi crus alterum *BH* concurrit cum eodem radio in punctis *P* & *D*. Deinde ad actam infinitam *MN* concurrant perpetuo radius ille *CP* vel *CD* & anguli crus *BC*, & cruris alterius *BH* concursus cum radio delineabit trajectoriam quæsitam.



Nam si in (x) constructionibus problematis superioris accedat punctum *A* ad punctum *B*, lineæ *CA* & *CB* coincident, & linea *AB* in ultimo suo situ fiet tangens *BH*; atque ideo constructiones ibi positæ evadent eædem cum constructionibus hic descriptis. Delineabit igitur cruris *BH* concursus cum radio sectionem conicam per puncta *C*, *D*, *P* transeuntem, & rectam *BH* tangentem in puncto *B*. *Q. E. F.*

Cas. 2. Dentur puncta quatuor *B*, *C*, *D*, *P* extra tangentem *HI* sita. Junge bina lineis *BD*, *CP* concurrentibus in *G*, tangentique occurrentibus in *H* & *I*. Secetur tangens in *A*, ita ut sit *HA* ad *IA*, ut est rectangulum sub mediâ proportionali inter *CG* & *GP* & mediâ proportionali inter *BH* & *HD*,



(x) * Nam in alterâ problematis XXII. solutione ABC, ACB, sunt anguli circà polos C & B mobiles; undè si punctum A accedat ad punctum B, coincidunt crura CA, CB, & unicam rectam constituunt, evanescente angulo ACB, remanet verò angulus ABC quem tangens AB cum BC continet; quarè dum anguli ABC, crus BC cum radio AC, si necessum sit, producto, perpetuò concurrit in rectâ aliquâ positione datâ ut NM, cruris AB & radii CA concursus trajectoriam describit.

ad rectangulum sub mediâ proportionali inter DG & GB & mediâ proportionali inter PI & IC; & erit A punctum contactus. Nam si rectæ PI parallela HX trajectoriam secet in punctis quibusvis X & Y: erit (ex conicis) (y) punctum A ita locandum, ut fuerit HA *quad.* ad AI *quad.* in ratione compositâ ex ratione rectanguli XHY ad rectangulum BHD, seu rectanguli CGP ad rectangulum DGB, & ex ratione rectanguli BHD ad rectangulum PIC. Invento autem contactus puncto A, describetur trajectoria ut in casu primo. *Q. E. F.*

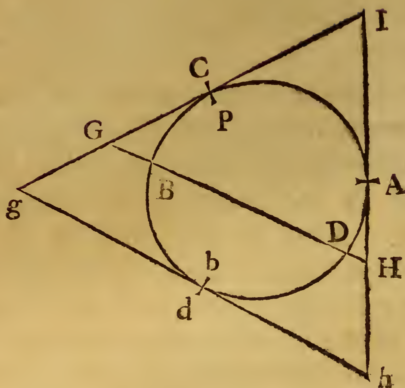
Capi autem potest punctum A vel inter puncta H & I, vel extra; & perinde trajectoria dupliciter describi.

(y) 319. *Erit ex Conicis*; scilicet si A sit punctum contactus erit (per Cor. 3. Lem. III. de Conic. p. 119.) HA^2 ad AI^2 ut rectangulum XHY ad rectangulum PIC, sed ratio rectanguli XHY ad rect. PIC, potest considerari ut composita ex ratione rect. XHY ad rect. BHD, & ex ratione ejusdem rect. BHD ad rect. PIC. Est verò rect. XHY ad rect. BHD ut rect. CGP ad rect. DGB (per Lem. III. de Conic. p. 117.) sunt enim HX, GC, duæ Parallelæ in Sectione Conicâ ductæ & per tertiam lineam GH sectæ, ideoque factum partium HX, HY Parallelæ HX, quæ sumuntur ab intersectione H ad curvæ puncta X & Y, est ad $BH \times HD$ factum partium lineæ secantis GH sumptarum ab intersectione H ad puncta curvæ B & D, sicut factum partium alterius Parallelæ $CG \times GP$, ad $DG \times GB$ factum partium correspondentium lineæ secantis. Est ergo ratio HA^2 ad AI^2 æqualis rationi compositæ ex ratione rect. CGP ad rect. DGB &, rect. BHD ad rect. PIC ideoque est HA: ad AI ut $\sqrt{CGP} \times \sqrt{BHD}$ ad $\sqrt{DGB} \times \sqrt{PIC}$, sed Radices quadratæ illorum Rectangulorum sunt ipsæ mediæ

diæ proportionales inter illorum latera; Ergo *est HA ad AI ut est rect. sub media proportionali inter CG & GP & media proportionali inter BH & HD ad rect. sub media proportionali inter DG & GB & media proportionali inter PI & IC.* Si itaque HI in A secetur in eâ ratione, habebitur punctum contactus.

320. Coroll. 1. Si ex punctis quibuslibet H & I rectæ HI sectionem conicam tangentis in A, agantur duæ quævis rectæ IG, HG convenientes in G, & sectionem conicam secantes in punctis quatuor C, P, D, B; factum $CGP \times BHD$, erit ad factum $DGB \times PIC$, in datâ ratione, nempè in ratione HA^2, ad AI^2; Ducta enim linea HYX lineæ ICP parallela, erit ut prius (per Lem. III. de Conic. p. 117.) $DGB : BHD = CGP : XHY = \frac{CGP \times BHD}{DGB}$, est verò $HA^2 : AI^2 = HXY \left(\frac{CGP \times BHD}{DGB}\right) : PIC$ (per Cor. 3. ejusdem Lem.) ergo $HA^2 : AI^2 = CGP \times BHD : DGB \times PIC$.

Quod si linea HYX, extra sectionem cadat aut eam tangat, ex puncto quovis h lineæ HAI, ducatur alia linea hyx lineæ ICP parallela quæ sectioni occurrat in x & y, & ducatur alia linea hdbg lineæ HDBG Parallela ita ut sectioni occurrat in d & b, & lineæ PC in g, habebiturque ut prius $hA^2 : AI^2 = CgP \times bhd : dgb \times PIC$. Sed cum ob parallelas GH, bh sit (per Lemma 3um. de Con. p. 117.) $CgP : dgb = CGP : DGB$, & (per Cor. 3. ejusd. Lem.) sit $hA^2 : bhd = HA^2 : BHD$ substitutis his ultimis rationibus loco priorum in proportione $hA^2 : AI^2 = CgP \times bhd : dgb \times PIC$ fiet $HA^2 : AI^2 = CGP \times BHD : DGB \times PIC$ ut prius. Undè satis patet demonstrationem constructionis universalem esse, quomodocumque rectæ GI, GH flectantur, adeóque etiam valere, ubi recta HX sectioni non occurrit.



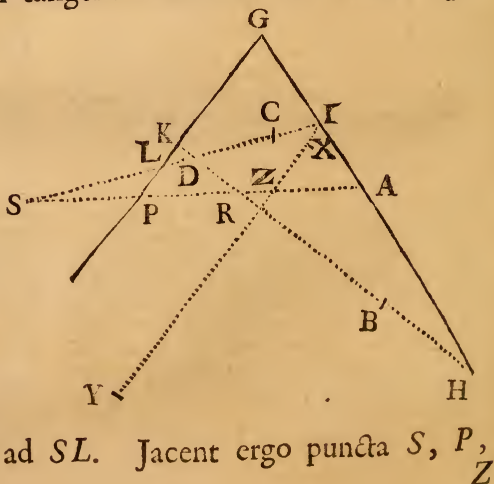
321. Coroll. 2. Coeuntibus punctis C, P, recta IG fit tangens in C & $GP = GC$, $CI = PI$, adeóque $CGP = GC^2$, & $PIC = CI^2$; undè in hoc casu $HA^2 : AI^2 = GC^2 \times BHD : CI^2 \times DGB$. Coeuntibus quoque punctis B & D, & secante GH, in tangentem gh, mutatâ erit $hA^2 : AI^2 = gC^2 \times dh^2 : CI^2 \times gd^2$, ac proindè $hA : AI = gC \times dh : CI \times gd$; & $hA \times CI \times gd = AI \times gC \times dh$. Quarè si ducantur tres rectæ sectionem conicam tangentes & inter se concurrentes in punctis I, g, h, facta ex tribus tangentium partibus inter concursuum & contactuum puncta alternatim sumptis AI, Cg, dh, & Ah, IC, gd, sunt æqualia.

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO XXIV. PROBLEMA XVI.

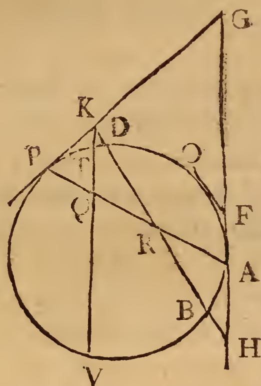
Trajectoriam describere, quæ transibit per data tria puncta, & rectas duas positione datas continget.

Dentur tangentes *HI*, *KL* & puncta *B*, *C*, *D*. Per punctorum duo quævis *B*, *D* age rectam infinitam *BD* tangentibus occurrentem in punctis *HK*. Deinde etiam per alia duo quævis *C*, *D* age infinitam *CD* tangentibus occurrentem in punctis *I*, *L*. Actas ita seca in *R* & *S*, ut sit *HR* ad *KR* ut est media proportionalis inter *BH* & *HD* ad mediam proportionalem inter *BK* & *KD*; & *IS* ad *LS* ut est media proportionalis inter *CI* & *ID* ad mediam proportionalem inter *CL* & *LD*. Seca autem pro lubitu vel inter puncta *K* & *H*, *I* & *L*, vel extra eadem; dein age *RS* secantem tangentes in *A* & *P*, & erunt *A* & *P* puncta contactuum. Nam si *A* & *P* supponantur esse puncta contactuum alicubi in tangentibus sita; & per punctorum *H*, *I*, *K*, *L* quodvis *I*, in tangente alterutra *HI* situm, agatur recta *IY* tangenti alteri *KL* parallela, quæ occurrat curvæ in *X* & *Y*, & in ea sumatur *IZ* media proportionalis inter *IX* & *IY*, erit, ex conicis, (z) rectangulum *XIY* seu *IZ quad.* ad *LP quad.* ut rectangulum *CID* ad rectangulum *CLD*, id est (per constructionem) ut *SI quad.* ad *SL quad.* atque ideo *IZ* ad *LP* ut *SI* ad *SL*. Jacent ergo puncta *S*, *P*, *Z*



(z) *Erit ex Conicis rect. XIY ad LP² ut rect. CID ad rect. CLD.* Scilicet cum P supponatur punctum contactus alicubi in Tangente KL situm & cum linea IY sit (per const.) parallela Tangenti KL & utraque secetur per lineam IL, illa in I hæc in L erit (per Lem. III. de Conic. p. 117.) rect. partium Parallelæ IY ab inter-

Z in unâ rectâ. Porro tangentibus concurrentibus in *G*, erit (ex conicis) rectangulum *XIY* seu *IZ quad.* ad *IA quad.* ut *GP quad.* ad *GA quad.* ideoque *IZ* ad *IA* ut *GP* ad *GA*. Jacent ergo puncta *P*, *Z* & *A* in unâ rectâ, ideoque puncta *S*, *P* & *A* sunt in unâ rectâ. Et (a) eodem argumento probabitur quod puncta *R*, *P* & *A* sunt in unâ rectâ. Jacent igitur puncta contactuum *A* & *P* in rectâ *RS*. Hisce autem inventis, trajectoria describetur ut in casu primo problematis superioris (b). *Q. E. F.* In



interfectione I ad curvæ puncta X & Y sumptarum ad Rectang. partium Parallelæ LP ab interfectione L ad curvæ puncta (quæ coeunt in uno P quia LP debet esse Tangens, ideóque illud rectangulum est quadratum LP) sicut rect. CID, ad rect. CLD quia nempe hæc rectangula sunt facta partium lineæ secantis IL factis partium singulæ Parallelæ correspondentia, ideóque (per const.) $IZ^2 : LP^2 = SI^2 : SL^2$ atque adeo $IZ : LP = SI : SL$, cum igitur sit IZ parallela LP (per const.) puncta S, P, Z, jacent in unâ rectâ. Porrò Tangentibus concurrentibus in G, cum supponatur punctum contactus alicubi situm in Tangente GA erit (per Cor. 2. ejusdem Lem. III. de Con. p. 118.) XIY (sive IZ^2) : $IA^2 = GP^2 : GA^2$ ideoque &c.

(a) *Et eodem argumento probabitur quod puncta R, P & A, sunt in unâ rectâ,* si per punctum K, agatur recta KV, tangenti GH, parallela, quæ occurrat curvæ in T & V, & in eâ sumatur KQ, media proportionalis inter KT & KV, cum recta KH secet Parallelas KV & AH erit (per Lem. III. de Con. p. 117.) rectan. VKT (sive KQ^2) ad AH^2 sicut rect. BKD ad rect. BHD hoc est ut KR^2 ad HR^2 (per const.) adeóque erit $KQ : AH = KR : RH$, quare puncta Q, R, & A erunt in eadem rectâ. Porrò Tangentibus concurrentibus in G erit (per Cor. 2. Lem. III. de Conic.) VKT (KQ^2): $PK^2 = GA^2 : GP^2$ & $KQ : PK = GA : GP$, unde erunt P, Q & A in eâdem rectâ, ideoque P, R, & A in eâdem rectâ.

(b) 322. Coroll. 1. Hinc si duæ rectæ HG, PG (vid. fig. Newt.) concurrentes in G, sectionem conicam tangant in A & P, jungaturque AP & producatur, & ex punctis quibusvis I & H, in unâ tangentium GH, sumptis agantur ad idem sectionis conicæ punctum D, duæ rectæ ID, HD, quarum altera ID secet sectionem conicam in C, rectam AP in S, & tangentem GP in L, altera verò HD secet sectionem in B, rectam AP, in R, & tangentem GP, in K; erit semper $HR^2 : KR^2 = BHD : BKD$. & $IS^2 : LS^2 = CID : CLD$, quomodocumque inflectantur rectæ ID, HD, & tangentes GA, GP.

323. Coroll. 2. Si puncta D & C, coeant, (vid. fig. Newt.) ut ILS, tangens evadat in D, seu C, erit $CI = DI$, & $CL = DL$, adeóque $IS^2 : LS^2 = DI^2 : DL^2$, & $IS : LS = DI : DL$. h. e. si Tangens IL, terminata per duas alias Tangentes, secet in S lineam AB jungentem puncta contactus earum Tangentium, ejus partes à sectione S ad utramque Tangentem sumptæ, erunt inter se sicut ejus partes à puncto contactus ad easdem Tangentes terminatæ.

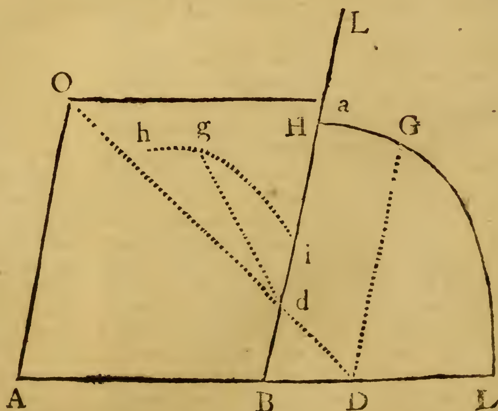
De Motu Corporum.

In hâc propoſitione, & caſu ſecundo propoſitionis ſuperioris conſtructiones eædem ſunt, ſive recta *XY* trajectoriam ſecet in *X* & *Y*, ſive non ſecet; eæque non pendent ab hâc ſectione. Sed demonſtratis conſtructionibus ubi recta illa trajectoriam ſecat, innoteſcunt conſtructiones, ubi non ſecat; iiſque ultra demonſtrandis brevitatis gratiâ non immoror.

LEMMA XXII.

Figuras in alias ejuſdem generis figuras mutare.

Tranſmutanda ſit figura quævis *HGI*. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ *AO*, *BL* tertiam quamvis poſitione datam *AB* ſecantes in *A* & *B*, & a figuræ puncto quovis *G*, ad rectam *AB* ducatur quævis *GD*, ipſi *OA* parallela. Deinde à puncto aliquo *O*, in linea *OA* dato, ad punctum *D* ducatur recta *OD*, ipſi *BL* occurrens in *d*, & à puncto occurſus erigatur recta *dg* datum quemvis angulum cum rectâ *BL* continens, atque eam habens rationem ad *Od* quam habet *DG* ad *OD*; & erit *g* punctum in figurâ novâ *hgi* puncto *G* reſpondens. Eâdem ratione puncta ſingula figuræ primæ dabunt puncta totidem figuræ novæ.



Concipe igitur punctum *G* motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum *g* motu itidem continuo percurret puncta omnia figuræ novæ & eandem deſcribet. Diſtinctionis gratiâ nominemus *DG* ordinatam primam, *dg* ordinatam novam; *AD* abſciſſam primam,

mam, *ad* abſciſſam novam; *O* polum, *OD* radium abſcindentem, *OA* radium ordinatum primum, & *Oa* (quo parallelogrammum *OABa* completur) radium ordinatum novum.

Dico jam quod, ſi punctum *G* tangit rectam lineam poſitione datam, punctum *g* tanget etiam lineam rectam poſitione datam. Si punctum *G* tangit conicam ſectionem, punctum *g* tanget etiam conicam ſectionem. Conicis ſectionibus hic circulum annumero. Porro ſi punctum *G* tangit lineam (c) tertii ordinis analytici, punctum *g* tanget lineam tertii itidem ordinis; & ſic de curvis lineis ſuperiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejuſdem ſemper ordinis analytici quas puncta *G*, *g* tangunt. (d) Etenim ut eſt *ad* ad *OA* ita ſunt *Od* ad *OD*, *dg* ad *DG*, & *AB* ad *AD*; ideoque *AD* æqualis eſt $\frac{OA \times AB}{ad}$, & *DG* æqualis eſt $\frac{OA \times dg}{ad}$. Jam ſi punctum *G* tangit rectam lineam, atque ideo in æquatione quâvis, quâ relatio inter abſciſſam *AD* & ordinatam *DG* habetur, indeterminatæ illæ *AD* & *DG* ad unicam tantum dimenſionem aſcendunt, ſcribendo in hâc æquatione

OA

(c) 324. Newtonus lineas geometricas in ordines analyticos diſtinguit ſecundùm numerum dimenſionum æquationis quâ relatio inter ordinatas & abſciſſas definitur; vel (quod perinde eſt) ſecundùm numerum punctorum in quibus à lineâ rectâ ſecari poſſunt; tot enim dimenſiones habet æquatio ad curvam quot poſſunt eſſe illius curvæ & rectæ interſectiones; nam ſi interſectiones illæ ſeorſim quærantur, quoniam eadem eſt omnium lex & conditio, idem erit calculus in caſu unoquoque & proptereà eadem ſemper concluſio, quæ igitur debet omnes interſectiones ſimul complecti & indifferenter exhibere, adeóque tot eſſe debent æquationis radices ac proinde dimenſiones quot ſunt interſectiones. Hinc linea primi ordinis erit recta ſola, lineæ ſecundi ſive quadratici ordinis erunt ſectiones conicæ & circulus, & lineæ tertii ſive cubici ordinis parabola cubica, parabola Neiliana, Ciſſois veterum & aliæ. Cum autem recta inter curvas non ſit numeranda, curva primi generis eadem eſt cum lineâ ſecundi ordinis, & curva ſecundi generis eadem cum lineâ tertii ordinis, & linea ordinis infinitesimi ea eſt quam recta in punctis infinitis ſecare poteſt; qualis eſt ſpiralis, cyclois, quadratrix & linea omnis quæ per radii vel rotæ revolutiones infinitas generatur.

(d) 325. Etenim ob ſimilia triangula, adO, AOD, $ad : OA = Od : OD$, (& per conſtr.) $Od : OD = dg : DG$, & ob rectas AO, Bd parallelas $Od : OD = AB : AD$; undè $ad : OA = dg : DG = AB : AD$, atque adeò $AD = \frac{OA \times AB}{ad}$, & $DG = \frac{OA \times dg}{ad}$. Sit $OA = a$, $AB = b$, $AD = x$, $DG = y$, $ad = z$, $dg = u$, & erit $x = \frac{ba}{z}$, $y = \frac{au}{z}$.

$\frac{OA \times AB}{ad}$ pro AD, & $\frac{OA \times dg}{ad}$ pro DG, (e) producetur æquatio nova, in qua abſciſſa nova ad & ordinata nova dg ad unicam tantum dimenſionem aſcendent, atque ideo quæ deſignat lineam rectam. (f) Sin AD & DG, vel earum alterutra, aſcendebant ad duas dimenſiones in æquatione primâ, aſcendent itidem ad & dg ad duas in æquatione ſecundâ. Et (g) ſic de tribus vel pluribus dimenſionibus. Indeterminatæ ad, dg in æquatione ſecundâ, & AD, DG in primâ aſcendent ſemper ad eundem dimenſionum numerum, & propterea lineæ, quas puncta G, g tangunt, ſunt ejuſdem ordinis analytici.

Dico

(e) * Sit G I, recta poſitione data & ad illam æquatio quævis $cx + dy + ef = o$, in qua $+$, ſignificat vel $+$, vel $-$ loco x & y, ſubſtituantur eorum valores (325) $\frac{ba}{z}$, $\frac{au}{z}$ & producetur $\frac{cba}{z} + \frac{dau}{z} + ef = o$, hoc eſt, reductione ad communem denominatorem factâ cba, $+ dau + efz = o$ æquatio nova unius dimenſionis ad rectam lineam g i.

(f) * Sit G I, ſectio conica & ad illam æquatio generalis, $cxx + dyy + exy + g^2x + m^2y + n^3 = v$, loco x, y, ſubſtituantur $\frac{ba}{z}$, $\frac{au}{z}$, & prodibit æquatio nova ad conicam ſectionem $\frac{cb^2a^2}{z^2} + \frac{da^2u^2}{z^2} + \frac{eba^2u}{z^2} + \frac{bag^2}{z} + \frac{m^2au}{z} + n^3 = o$, hoc eſt, reductione factâ, $cb^2a^2 + da^2u^2 + eba^2u + bag^2z + m^2auz + n^3z^2 = o$.

(g) * *Et ſic de tribus vel pluribus dimenſionibus*, nam ſi in ſerie 1, x, x^2, x^3, x^4 *&c.* loco x, & dignitatum ejus ſubſtituantur $\frac{1}{z}$, & ipſius dignitates prodibit ſeries nova $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^2}$, $\frac{1}{z^3}$, $\frac{1}{z^4}$ &c. & reductione ad communem denominatorem factâ habebitur $\frac{z^4, z^3, z^2, z^1}{z^4}$. Similiter ſi in ſerie y, y^2, y^3, y^4 &c. loco y, ſubſtituatur $\frac{u}{z}$, prodibit ſeries nova $\frac{u}{z}$, $\frac{u^2}{z^2}$, $\frac{u^3}{z^3}$, $\frac{u^4}{z^4}$ &c. & per reductionem ad denominatorem communem $\frac{uz^3, u^2z^2, u^3z, u^4,}{z^4}$ iiſdem x & y valoribus ſubſtitutis in ſeriebus

(h) Dico præterea, quod si recta aliqua tangat lineam curvam in figurâ primâ: hæc recta eodem modo cum curvâ in figuram novam translata tanget lineam illam curvam in figurâ novâ; & contra. Nam si curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt in figurâ primâ, puncta eadem translata accedent ad invicem & coibunt in figurâ novâ; atque ideo rectæ, quibus hæc puncta junguntur, simul evadent curvarum tangentes in figurâ utrâque.

Componi possent harum assertionum demonstrationes more magis geometrico. Sed brevitati consulo.

Igitur

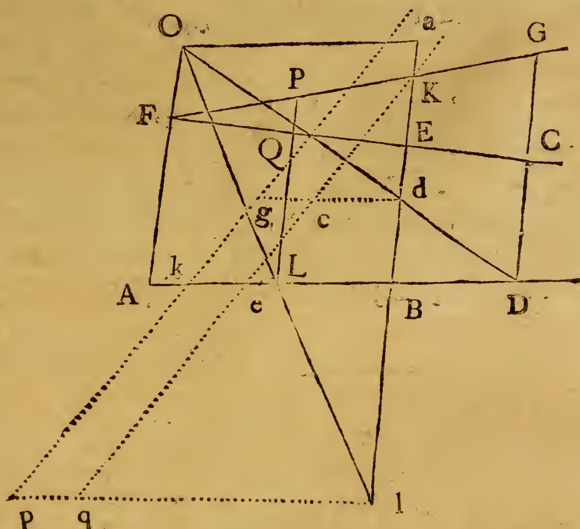
riebus factorum x, y, xy^2, xy^3 &c. & x^2y, x^3y &c. & reductione ad communem denominatorem z^4 factâ, habebuntur series $\frac{z^2u,\ zu^2,\ zu^3}{z^4}$, & $\frac{zu,\ u}{z^4}$. Porrò æquatio omnis ex hujusmodi dignitatibus & factis composita est, & abjici potest communis omnium terminorum denominator qui hic est z^4, ergò hujusmodi substitutionibus non mutatur gradus æquationis. Eadem quoque demonstrari possunt ex eo quod si linea recta curvam HGI, secet in quotlibet punctis, eadem recta translata curvam h g i in totidem punctis intersecare debeat, quoniam singulæ nec plures intersectiones in novam figuram transferuntur.

O a g c r i p d G C R A B D P I

(h) 326. Recta G C curvam G I tangat in G, transferatur punctum G, in g, & ductâ P C, parallelâ D G, quæ curvæ occurrat in R & tangenti in C; transferatur punctum C, in c, faciendo ut OP : PC = Op : pc parallelam d g, & recta g c, quæ puncta g, & c, jungit, novam curvam g i, tanget in g; nam accedat PC, ad DG, & accedat correspondens p c, ad d g, & punctis C, R, G, coeuntibus, coibunt in figurâ novâ puncta c, r, g, adeòque linea g c, positione coincidit cum chordâ evanescente g r, hoc est cum tangente in g. Idem aliâ ratione potest demonstrari; quoniam enim PC : pc = PO : po = PR : pr, & proindè PC : PR = pc : pr, ergo punctum c, non est in curvâ g i, nisi cum C reperitur in curvâ G I, hoc est, nisi C & G coeant.

De Motu Corporum.

Igitur si figura rectilinea in aliam transmutanda est, sufficit rectarum, à quibus conflatur, intersectiones transferre, & per easdem in figurâ novâ lineas rectas ducere. Sin curvilineam transmutare oportet, transferenda sunt puncta, tangentes, & lineæ rectæ, quarum ope curva linea definitur. Inservit autem hoc lemma solutioni difficiliorum problematum, transmutando figuras propositas in simpliciores. Nam (i) rectæ quævis convergentes



(i) 327. Radius ordinatus primus O A, per concursum F rectarum F G, F C transeat, ductâ G D radio O A parallelâ, transferantur puncta G, C, in g, c, & puncta K, E, in k, e, rectæ k g, e c, erunt parallelæ; nam ducta intelligatur O L radio O A infinitè proxima, & rectas A D, A B secans in L & l, & actâ L Q P radio O A, parallelâ, puncta P, Q in p, q, translata concipiantur, & erit O L : O l = P L : p l = Q L : q l. coeuntibus verò punctis P, Q, F erit O l infinita & Q L = F A = P L, adeóque p l = q l. Punctum igitur concursus F ad distantiam infinitam transfertur, & lineæ g p, c q, ad illud convergentes sunt parallelæ.

328. Coroll. 1. Puncta K & E, seu intersectiones linearum F G, F C cum a B, transferuntur capiendo in novâ ordinatâ B k = B K, B e = B E; est enim (per constr.) B K : B O = B k : B O. & B E : B O = B e : B O.

329. Coroll. 2. Si punctum F, cum puncto A, coincidat, erunt g k, c e, rectis O A, a B parallelæ; nam ob parallelas B K, D G, A O & (per constr.) A B : A D = O d : O D = d g : D G, & coeuntibus punctis F, A, A B : A D = B K (B k) : D G, adeóque d g : D G = B k : D G, ac proindè B k = d g, undè g k lineæ B d, est parallela.

330.

gentes tranſmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo lineam quamvis rectam, quæ per concurſum convergentium tranſit; idque quia concurſus ille hoc pacto abit in infinitum; lineæ autem parallelæ ſunt, quæ nuſquam concurrunt. Poſtquam autem problema ſolvitur in figurâ novâ; ſi per inverſas operationes tranſmutetur hæc figura in figuram primam, (k) habebitur ſolutio quæſita.

(l) Utile eſt etiam hoc lemma in ſolutione ſolidorum problematum. Nam quoties duæ ſectiones conicæ obvenerint, quarum interſectione problema ſolvi poteſt, tranſmutare licet earum alterutram, ſi hyperbola ſit vel parabola, in ellipſin: deinde ellipſis facile mutatur in circulum. Recta item & ſectio conica, in conſtructione planorum problematum, vertuntur in rectam & circulum.

330. Coroll. 3. Si recta linea F G, coincidat cum A D, transformabitur in rectam coincidentem cum a B, nam punctum D, transfertur in d, punctum L, in l.

(k) 331. (Vide fig. Newt. pag. 218.) Figura h g i data in figuram primam H G I transformatur, faciendo ut O d, ad d g, ita O D, ad D G, parallelam radio O A.

(l) 332. Sit curva C G I, parabola cujus diameter C D, diametri vertex C, ordinata G D radio ordinato primo A O parallela, latus rectum l, ſitque O A $=a$, A B $=b$, A C $=c$, A D $=x$, C D $=x-c$ G D $=y$, nova abſciſſa, a d $=z$, nova ordinata g d $=u$, erit ex naturâ parabolæ $lx-lc=yy$, & ſubſtitutis pro x, & y, eorum valoribus $\frac{ba}{z}$, $\frac{bu}{z}$ (325) producetur æquatio nova ad novam curvam g i, $\frac{lba}{z}-lc=\frac{b^2u^2}{z^2}$, hoc eſt, reductione factâ $b^2u^2-lbaz+lcz^2=0$, æquatio ad Ellipſim cujus diameter a F $=\frac{ba}{c}$, latus rectum $=\frac{la}{b}$, nam $\frac{baz}{c}-z^2 : u^2 = \frac{ba}{c} : \frac{la}{b}$.

Si nova ordinata g d, ponatur ad abſciſſam a d, perpendicularis, & prætereà fiat $lc=b^2$, ſive $l\times$ A C $=$ A B^2 ſuperior ad Ellipſim æquatio in hanc mutabitur $u^2-\frac{baz}{c}+zz=0$, quæ eſt ad circulum cujus diameter $\frac{ba}{c}$, ex tribus autem rectis a, b, c, binæ a & b, vel a & c, poſſunt ad arbitrium aſſumi, & tertia determi-

DE MOTU CORPORUM.

terminatur per æquationem $lc = bb$, in circulo.

Si vertex C cum puncto A coeat, hoc est, si A C $= c = o$ æquatio ad novam curvam erit $b^2u^2 - lbaz = o$, hoc est, curva g i, erit parabola; & eodem modo invenitur Ellipsim & Hyperbolam atque adeò Sectiones omnes conicas in parabolam transformari, dum diametri A D radio O a parallelæ vertex C coincidit cum puncto A radii ordinati primi O A ordinatis ad diametrum paralleli.

Si parabolæ vertex C cum puncto B coeat, erit $b = c$, adeóque Ellipsis vel circuli g i diameter $\frac{ba}{c}$, erit $a =$ OA $=$ a B.

Si curva C G I, fuerit hyperbola cujus sit diameter d, latus rectum l, manentibus cæteris denominationibus ut suprà, erit ex naturâ hyperbolæ $dy^2 = lx^2 - 2clx + dlx - ldc + lcc$, & substitutis loco x & y, eorum valoribus & reductione ad communem denominatorem factâ producetur.

$$db^2u^2 + 2clbaz + ldcz^2 - lb^2a^2 = o$$
$$- dlbaz - lc^2z^2$$

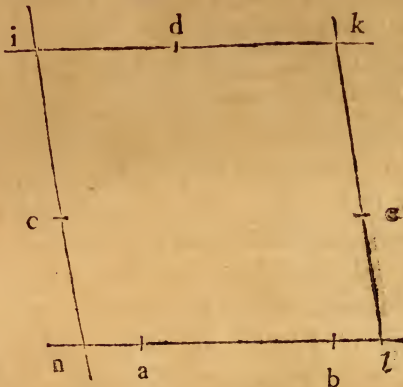
nova æquatio ad parabolam vel hyperbolam aut Ellipsim prout assumitur linea c, æqualis vel major vel minor diametro d, Ellipsis autem in circulum abit ponendo $ldc - lc^2 = db^2$, & angulum g d a, rectum, ut ex locorum geometricorum doctrinâ liquet. Eâdem ratione transformatur Ellipsis.

333. His præmissis facilè intelligitur hujus lemmatis usus in solidorum aut etiam planorum problematum solutione. Nam sit quærenda intersectio G conicæ sectionis B G I cum alterâ sectione conicâ aut rectâ lineâ C G F positione datâ. transformetur (332.) sectio conica B G I in circulum B G a, & linea C G F, in lineam c g f, tum ex puncto intersectionis g, circuli B g a, & lineæ c g f, demittatur ad a B nova ordinata sive perpendicularis g d, & per punctum d, agatur radius abscindens O d D secans rectam A B in D, denique per D agatur G D radio ordinato primo O A parallela quæ sit ad O D ut g d, ad O d, & erit G punctum intersectionis quæsitum. Cum enim in puncto intersectionis duarum linearum B G I, C G F, communis sit ordinata G D manifestum est intersectionem illam transformari in intersectionem linearum B g a, c g f, & vice versâ (331).

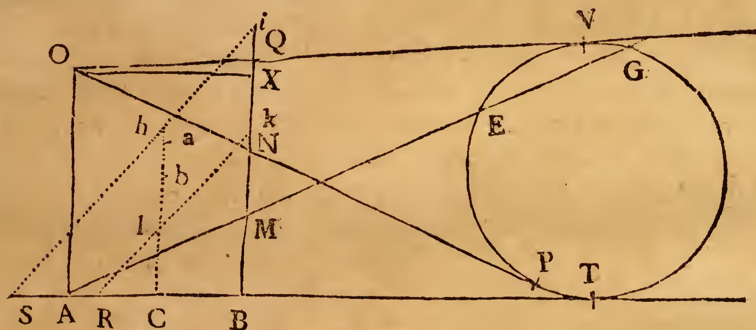
P R O-

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA XVII.

Trajectoriam describere, quæ per data duo puncta transibit, & rectas tres continget positione datas.



Per concursum tangentium quarumvis duarum cum se invicem, & concursum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data transit, age rectam infinitam; eaque adhibita pro radio ordinato primo, transmutetur figura, per lemma superius, in figuram novam. (m) In hâc figurâ tangentes illæ duæ evadent sibi invicem parallelæ, & tan-



(m) 334. Sit O, concursus tangentium duarum OV, OP, A concursus tangentis tertiæ AT, cum rectâ AG, quæ per puncta duo E, G, data transit, age rectam infinitam OA, eâque adhibitâ pro radio ordinato primo, & OX parallelâ AT, pro radio ordinato novo usurpatâ, transmutetur figura in figuram novam, quod facillimum est, si ordinatæ novæ parallelæ sumantur radio ordinato novo OX, nam recta AT transformatur in rectam BXi (330), recta AG in rectam Ch ipsi BX parallelam (329) & punctum illius C, reperitur, capiendo BC = BM (328); rectæ OV, OP transmutantur in rectas parallelas Rk, Si, (327); earumque puncta R, S, habentur capiendo BR = BN, BS = BQ, & alia puncta duo (per Lem. XXII.) facilè reperiuntur. Puncta E, & G, transferantur in b, & a, & productis lineis parallelis Bi & Ch, Rk, & Si, donec sibi mutuò occurrant, compleatur parallelogrammum lhik, & nova sectio conica transibit per puncta b, & a, & tangetur à rectis tribus hi, lk, ki (326).

* Inter-

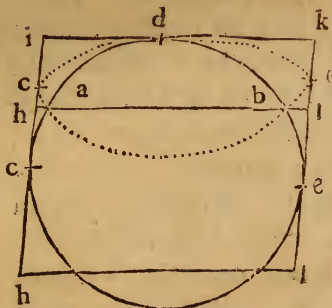
De Motu Corporum.

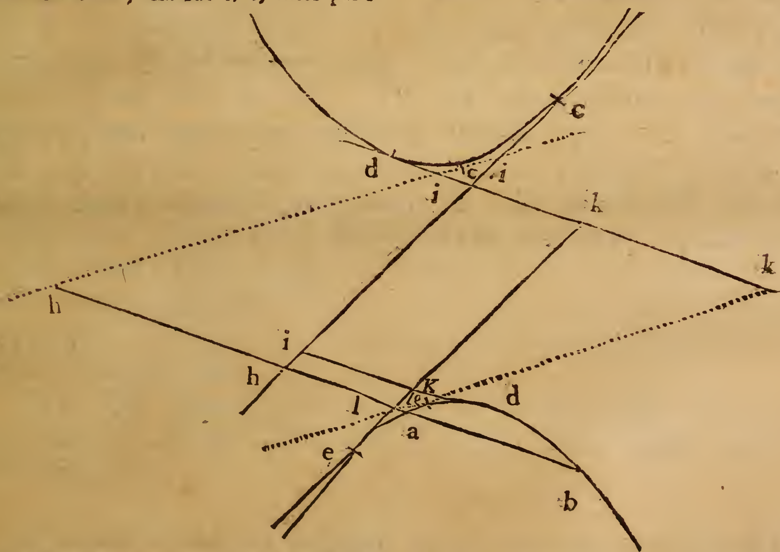
gens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo data transeunti. Sunto *h i*, *k l* tangentes illæ duæ parallelæ, *i k* tangens tertia, & *h l* recta huic parallela transiens per puncta illa *a*, *b*, per quæ conica sectio in hâc figurâ novâ transire debet, & parallelogrammum *h i k l* complens. (n) Secentur rectæ *h i*, *i k*, *k l* in *c*, *d*, *e*, ita ut sit *h c* ad latus quadratum rectanguli *a h b*, *i c* ad *i d*, & *k e* ad *k d* ut est summa rectarum *h i* & *k l* ad summam trium linearum, quarum prima est recta *i k*, alteræ duæ sunt latera quadrata rectangulorum *a h b* & *a l b*: & erunt *c*, *d*, *e* puncta contactuum. Etenim, ex conicis, sunt *h c* quadratum ad rectangulum *a h b*, & *i c* quadratum ad *i d* quadratum, & *k e* quadratum ad *k d* quadratum, & *e l* quadratum ad rectangulum *a l b* in eâdem ratione; & propterea *h c* ad latus quadratum ipsius *a h b*, *i c* ad *i d*, *k e* ad *k d* & *e l* ad latus quadratum ipsius *a l b* sunt in subduplicatâ illâ ratione, & compositè, in datâ ratione omnium antecedentium *h i* & *k l* ad omnes consequentes, quæ sunt latus quadratum rectanguli *a h b*, & recta *i k*, & latus quadratum rectanguli *a l b*. Habentur igitur

* (n) Inter a h, h b, quæratur media proportionalis quæ dicatur *M*, & inter a l, l b, media proportionalis *N*; & deinde ita secentur rectæ h i, i k, k l, in c, d, e, ut sit h c, ad *M*, i c, ad i d, & k e ad k d, ut est h i + k l, ad i k + *M* + *N*, & erunt c, d, e, puncta contactuum; Etenim si fuerint c, d, e, puncta contactuum, o b h l parallelam tangenti i k, quæ cum alterâ tangente h i, concurrit in i, erit (per prop. 16. & 18. lib. 3. conic. Apoll. sive per Corol. 2. Lem. III. de Conic. p. 118.) $hc^2 : ah \times hb = ic^2 : id^2$, & o b, h i, occurrentem sectioni in solo puncto c, & parallelam tangenti l k, quæ alteri tangenti i k occurrit in k, erit (per easdem prop. Apoll.) $ic \times ic\ (ic^2) : id^2 = ke^2 : kd^2$, & o b, h l, parallelam tangenti i k, quæ cum alterâ tangente l k, convenit in k, erit (per easdem prop. Apoll.) $ke^2 : kd^2 = el^2 : al \times lb$, adeóque $hc^2 : ah \times hb = ic^2 : id^2 = ke^2 : kd^2 = el^2 : al \times lb$, & propterea $hc : \sqrt{ah \times hb}\ (M) = ic : id = ke : kd = el : \sqrt{al \times lb}\ (N)$, & compositè summa omnium antecedentium est ad summam omnium consequentium ut quilibet antecedens ad suum consequentem, hoc est $hc : M = ic : id = ke : kd = el : N = hc + ic + ke + el\ (hi + kl) : M + id + kd + N\ (ik + M + N)$. Habentur igitur (per constr.) ex datâ illâ ratione puncta contactuum c, d, e, in figurâ novâ per inversas operationes (331).

ex datâ illâ ratione puncta contactuum *c*, *d*, *e*, in figura nova. Per inversas operationes lemmatis novissimi transferantur hæc puncta in figuram primam, & ibi (per prob. XIV.) describetur trajectoria. *Q. E. F.* (o) Cæterum perinde ut puncta *a*, *b* jacent vel inter puncta *h*, *l*, vel extra, debent puncta *c*, *d*, *e* vel inter puncta *h*, *i*, *k*, *l* capi, vel extra. Si punctorum *a*, *b* alterutrum cadit inter puncta *h*, *l*, & alterum extra, problema impossibile est. LIBER PRIMUS.

PRO-





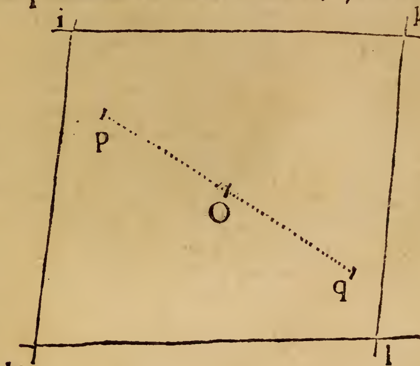
(o) 335. Quoniam duæ parallelæ h i, l k, neque parabolam, neque hyperbolam simplicem contingere possunt, tangent hyperbolas oppositas vel ellipsim, circulo inter ellipses annumerato. Porrò Ellipsis tota inter tangentes parallelas, & hyperbolæ oppositæ totæ extra easdem sunt; quare in Ellipsi puncta a, b, inter puncta h, l, sita sunt; in hyperbolis extra; atque adeò si punctorum a, b, alterum cadit inter puncta h, l & alterum extrà, problema impossibile est. In Ellipsi punctum contactûs d, inter puncta i, k, necessariò cadit; alia duo c, e, inter puncta h & i, l & k, vel aliquandò extrà esse possunt; in hyperbolis oppositis contactuum puncta duo ut c, d, extrà puncta h, i, k, l, necessariò posita sunt, tertium ut e, vel extrà vel intra esse potest, undè præscribit Newtonus ut puncta c, d, e, vel inter puncta h, i, k, l, vel extrà capiantur, perindè ut puncta a, b, jacent vel inter puncta h, l, vel extrà.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA XVIII.

Trajectoriam describere, quæ transibit per punctum datum, & rectas quatuor positione datas continget.

Ab intersectione communi duarum quarumlibet tangentium ad intersectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita, & eâdem pro radio ordinato primo adhibitâ, transmutetur figura (per lem. XXII.) in figuram novam, & tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum primum concurrebant, jam evadent parallelæ. Sunto illæ *hi* & *kl*, *ik* & *hl* continentes parallelogrammum *hikl*. Sitque *p* punctum in hâc novâ figurâ puncto in figurâ primâ dato respondens. (P) Per figuræ centrum *O* agatur *pq*, & existente *Oq* aquali *Op*, erit *q* punctum alterum per quod sectio conica in hâc figurâ novâ transire debet. Per lemmatis XXII. operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ trajectoria describenda est. Per eadem vero describi potest trajectoria illa per problema XVII. *Q. E. F.*



LEM-

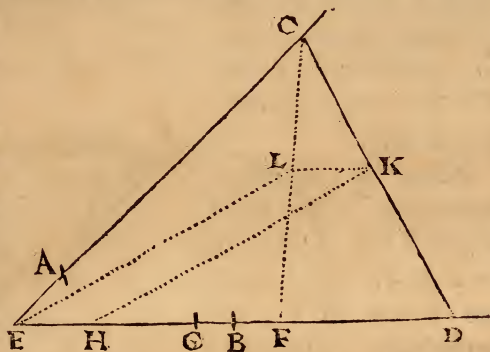
(P) 336. Parallelogrammi h, i, k, l, sectioni conicæ circumscripti diagonales in sectionis centro O, se mutuò intersecant. Nam rectæ quæ opposita contactuum puntajungunt, sunt sectionis diametri centro O bisectæ (per prop. 27. & 31. Lib. 2. conic. Apoll. utque sequitur ex Lem. IV. de Conic. p. 119.).

* Vid.

LEMMA XXIII.

Si rectæ duæ positione datæ A C, B D *ad data puncta* A, B, *terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, & recta* C D, *quâ puncta indeterminata* C, D *junguntur, secetur in ratione datâ in* K: *dico quod punctum* K *locabitur in rectâ positione datâ.*

(q) Concurrant enim rectæ AC, BD in E, & in BE capiatur BG ad AE ut est BD ad AC, sitque FD semper æqualis datæ EG; & erit ex constructione EC ad GD, hoc est, ad EF ut AC ad BD, ideoque in ratione datâ, & propterea dabitur specie triangulum EFC. Secetur CF in L ut sit CL ad CF in ratione CK ad CD; & ob datam illam rationem, dabitur etiam specie triangulum EFL; proindeque punctum L locabitur in rectâ EL positione datâ. Junge LK, & similia erunt triangula CLK, CFD; & ob datam FD & datam rationem LK ad FD dabitur LK. Huic æqualis capiatur EH, & erit semper $ELKH$ parallelogrammum. Locatur igitur punctum K in parallelogrammi illius latere positione dato HK. *Q. E. D.*



Corol. Ob datam specie figuram $EFLC$, rectæ tres EF, EL & EC, id est GD, HK & EC, datas habent rationes ad invicem.

LEM-

(q) * Vid. not. 67. pag. 39.

LEMMA XXIV.

Si rectæ tres tangant quamcunque coni sectionem, quarum duæ parallelæ sint ac dentur positione; dico quod sectionis semidiameter hisce duabus parallela, sit media proportionalis inter harum segmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interjecta.

Sunto *AF*, *GB* parallelæ duæ coni sectionem *ADB* tangentes in *A* & *B*; *EF* recta tertia coni sectionem tangens in *I*, & occurrens prioribus tangentibus in *F* & *G*; sitque *CD* semidiameter figuræ tangentibus parallela: dico quod *AF*, *CD*, *BG* sunt continuè proportionales.

Nam si diametri conjugatæ *AB*, *DM* tangenti *FG* occurrant in *E* & *H* seque mutuo secent in *C*, & compleatur parallelogrammum *IKCL*; (r) erit ex naturâ sectionum conicarum ut *EC* ad *CA* ita *CA* ad *CL*, & ita divisim *EC*−*CA* ad *CA*−*CL*, seu *EA* ad *AL*, & compositè *EA* ad *EA*+*AL* seu *EL* ut *EC* ad *EC*+*CA* seu *EB*; ideoque, ob similitudinem triangulorum *EAF*, *ELI*, *ECH*, *EBG*, *AF* ad *LI* ut *CH* ad *BG*. Est itidem, ex naturâ sectionum conicarum, *LI* seu *CK* ad *CD* ut *CD* ad *CH*; (s) atque ideo ex æquo perturbatè *AF* ad *CD* ut *CD* ad *BG*. *Q. E. D.*

Co-

(r) * *Erit ex naturâ sectionum conicarum &c.* (per prop. 37. 38. Lib. 1. conic. Apoll. vide cor. 2. Lem. V. de Conic. p. 121.).

(s) * Cum sit EA : EL = EC : EB, & ob similitudinem triangulorum EAF, EIL sit EA : EL = AF : LI, seu CK, & ob similitudinem triangulorum ECH, EBG,

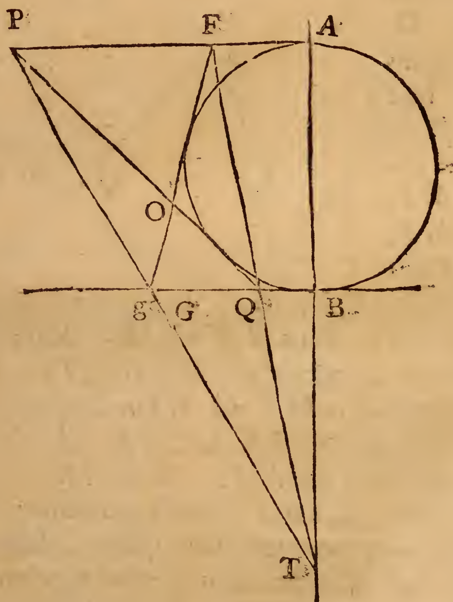
Corol. 1. Hinc si tangentes duæ FG, PQ tangentibus parallelis AF, BG occurrant in F & G, P & Q, seque mutuo secent in O; erit ex æquo perturbatè AF ad BQ ut AP ad BG, (t) & divisim ut FP ad GQ, atque ideo ut FO ad OG.

Corol. 2. (u) Unde etiam rectæ duæ PG, FQ, per puncta P & G, F & Q ductæ, concurrent ad rectam ACB per centrum figuræ & puncta contactuum A, B transeuntem.

L E M-

EBG fit $EC:EB=CH:BG$, erit $AF:CK=CH:BG$, & quia (ex conic. loco citato) $CK:CD=CD:CH$, erit $AF\times CK:CK\times CD=CH\times CD:BG\times CH$, hoc est, $AF:CD=CD:BG$.

(t) * Est enim $AF:CD=CD:BG$, & similiter $BQ:CD=CD:AP$, seu $CD:BQ=AP:CD$, adeóque $AF\times CD:CD\times BQ=CD\times AP:BG\times CD$, hoc est $AF:BQ=AP:BG=AP-AF:BG-BQ=FP:GQ=FO:OG$, ob similia triangula FOP, GOQ.



(u) * Agatur enim recta FQ, ipsi AB occurrens in T, & jungatur PT, rectam BG, secans in g, erit $AF:BQ=AT:BT=AP:Bg$, sed per coroll. 1. $AF:BQ=AP:BG$, est igitur $BG=Bg$ ac proindè punctum g, cum G coincidit.

 * Nam

LEMMA XXV.

Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangant ſectionem quamcunque conicam, & abſcindantur ad tangentem quamvis quintam; ſumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abſciſſæ terminatæ ad angulos oppoſitos parallelogrammi: dico quod abſciſſa alterutra ſit ad latus illud à quo eſt abſciſſa, ut pars lateris alterius contermini inter punctum contactus & latus tertium eſt ad abſciſſarum alteram.

Tangant parallelogrammi *MLIK* latera quatuor *ML*, *IK*, *KL*, *MI* ſectionem conicam in *A*, *B*, *C*, *D*, & ſecet tangens quinta *FQ* hæc latera in *F*, *Q*, *H* & *E*; ſumantur autem laterum *MI*, *KI* abſciſſæ *ME*, *KQ*, vel laterum *KL*, *ML*, abſciſſæ *KH*, *MF*: dico quod ſit *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*; & *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. Nam per corollarium primum lemmatis ſuperioris eſt *ME* ad *EI* ut *AM* ſeu *BK* ad *BQ*, & componendo *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*. *Q. E. D.* Item *KH* ad *HL* ut (x) *BK* ſeu *AM* ad *AF*, & dividendo *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. *Q. E. D.*

Corol 1. Hinc ſi datur parallelogrammum *IKLM*, circa datam ſectionem conicam deſcriptum, dabitur rectangulum $KQ \times ME$, ut & huic æquale rectangulum $KH \times MF$. Æquantur enim rectangula illa ob ſimilitudinem triangulorum *KQH*, *MFE*. Co-

(x) * Nam ſi puncta contactuum A, & B, rectâ jungantur, hæc tranſibit per centrum commune ſectionis conicæ & parallelogrammi, (336) adeóque erit AM = BK.

* Nam

Corol. 2. Et si sexta ducatur tangens *eq* tangentibus *KI*, *MI* occurrens in *q* & *e*; (y) rectangulum $KQ \times ME$ æquabitur rectangulo $Kq \times Me$; eritque *KQ* ad *Me* ut *Kq* ad *ME*, & divisim ut *Qq* ad *Ee*.

Corol. 3. Unde etiam si *Eq*, *eQ* jungantur & bisecentur, & recta per puncta bisectionum agatur, transibit hæc per centrum sectionis conicæ. Nam cum sit *Qq* ad *Ee* ut *KQ* ad *Me*, transibit eadem recta per medium omnium *Eq*, *eQ*, *MK* (z) (per lem. XXIII.) & medium rectæ *MK* est centrum sectionis. (a)

PRO-

(y) * Nam rectangula $KQ \times ME$, $Kq \times Me$, æquantur rectangulo $MI \times BK$.

M A L D e E F o y x C I N q Q B K

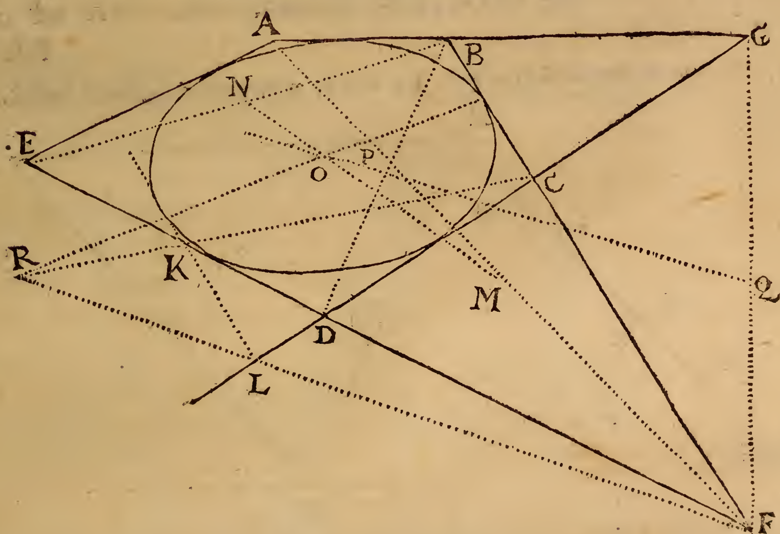
(z) * In rectis IM, IK, positione datis capiatur qN, ad EF, ut est qQ, ad Ee, & puncta N, F, tanquam data seu fixa considerentur, & erit $Nq : FE = qQ : Ee = QK : eM$, & composite, $Nq : FE = NQ : Fe = NK : FM$; quare si rectæ Eq, eQ, MK, quibus puncta indeterminata E, & q, E, Q, M & K junguntur, secentur in ratione datâ in x, y, o, puncta omnia x, y, o, locantur in unâ eâdemque rectâ xy, (per Lem. XXIII). Si itaque recta xy, lineas Eq, eQ, bisecat, rectam MK bisecabit, adeóque (336) per centrum sectionis conicæ transibit.

(a) Hinc si lineæ quatuor ut ED, eq, EQ, QB sectionem Conicam tangant & sibi mutuò occurrant in punctis e, E, q, Q junganturque puncta opposita e, Q & E, q, bifariamque dividantur lineæ eQ, Eq, linea eas bisecans erit locus centri figuræ: Idque semper verum erit quamcumque figuram faciant lineæ ED, eq, EQ, QB sive sese decussent sive Trapezium constituant, Concipiatur illas Diametros duci quarum vertex est in puncto contactûs harum linearum donec occurrant curvæ altero suo vertice, Tangentes in eo vertice ductæ erunt parallelæ prioribus: Dabuntur ergo Parallelæ duabus lineis ED, QB, quæ erunt Tangentes curvæ, ideoque fiet ut in Lemmatis Hypothesi Parallelogrammum MIKL constans quatuor Tangentibus quarum oppositæ erunt inter se Parallelæ, & Tangentes EQ & eq considerari poterunt ut quinta & sexta Tangens de quibus agitur in hoc Lemmate, ideoque per ejus corollarium 3. *si bisecentur lineæ Eq eQ & recta per bisectionum puncta agatur transibit hæc per centrum Sectionis Conicæ &c.*

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA XIX.

Trajectoriam describere, quæ rectas quinque positione datas continget.

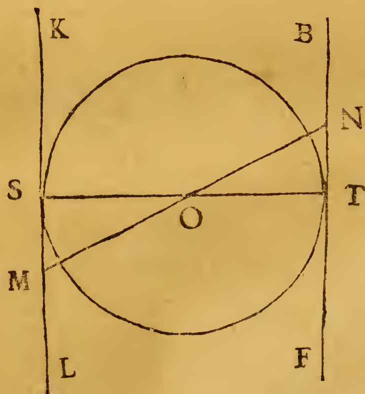


Dentur positione tangentes *ABG*, *BCF*, *GCD*, *FDE*, *EA*. Figuræ quadrilateræ sub quatuor quibusvis contentæ *ABFE* diagonales *AF*, *BE* biseca in *M* & *N*, & (per corol. 3. lem. xxv.) recta *MN* per puncta bisectionum acta transibit per centrum trajectoriæ. Rursus figuræ quadrilateræ *BGDF*, sub aliis quibusvis quatuor tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) *BD*, *GF* biseca in *P* & *Q*: & recta *PQ* per puncta bisectionum acta transibit per centrum trajectoriæ. Dabitur ergo

go centrum in concursu bisecantium. Sit illud *O*. (b) Tangenti cuivis *BC* parallelam age *KL*, ad eam distantiam ut centrum *O* in medio inter parallelas locetur, & acta *KL* tanget trajectoriam describendam. Secet hæc tangentes alias quasvis duas *GCD*, *FDE* in *L* & *K*. Per harum tangentium non parallelarum *CL*, *FK* cum parallelis *CF*, *KL* concursus *C* & *K*, *F* & *L* age *CK*, *FL* concurrentes in *R*, & recta *OR* ducta & producta secabit tangentes parallelas *CF*, *KL* in punctis contactuum. Patet hoc per corol. 2. lem. XXIV. Eâdem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per construct. prob. XIV. trajectoriam describere. *Q. E. F.*

Scholium.

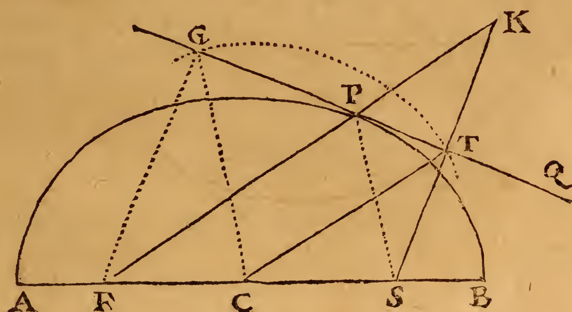
Problemata, ubi dantur trajectoriarum vel centra vel asymptoti, includuntur in præcedentibus. (c) Nam datis punctis & tangentibus unà cum centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes à centro ex alterâ parte æqualiter distantes. Asymp-

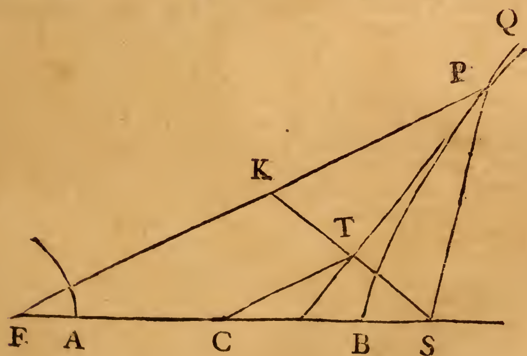


(b) 337. Datis sectionis conicæ centro O, & tangente quâvis B F, altera tangens L K datæ parallela facile invenitur; Nam per centrum O ducatur recta quævis infinita M O N tangenti datæ occurrens in N, & sumptâ O M = O N per M ducatur M K tangenti datæ F B parallela, erit M K tangens; si enim per punctum contactûs T & centrum O agatur sectionis diameter T O S, erit S O = O T & tangens in S tangenti in T parallela lineam N O M ita secabit in M, ut sit M O = O N, ob, S O : O T = M O : O N.

(c) 338. Hinc datis præter centrum tribus tangentibus non parallelis vel duabus tangentibus convergentibus & puncto, vel tangente & punctis duobus, vel punctis tribus, dantur sex tangentes, vel tangentes quatuor & puncta duo, vel tangens & puncta quatuor, vel puncta sex, quibus datis trajectoria describi potest per prop. (27. 26. 25. 24. 23. 22.). Ex datis centro, alterutro axe, & duabus tangentibus non parallelis, vel tangente & puncto trajectoriæ Ellipticæ & Hyperbolicæ ex lemmatis sequentibus facilè describuntur.

DE MOTU CORPORUM. Aſymptotos autem pro tangente habenda eſt, & ejus terminus infinitè diſtans (ſi ita loqui fas ſit) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujuſvis punctum contactus abire in infinitum, & tangens vertetur in Aſymptoton, atque conſtructiones problematum præcedentium vertentur in conſtructiones ubi Aſymptotos datur.





339. Lemma. Si ex ſectionis conicæ umbilico utrovis S demittantur ad tangentem PQ normales S T, F G, rectæ C T, C G centrum ſectionis C & puncta interſectionum T, G jungentes æquales erunt ſemiaxi principali CB, & parallelæ lineis FP, SP ex altero umbilico F & S ad punctum contactûs P ductæ. Producantur enim FP, ST, donec concurrant in K, & erit (per Lem. XV. Newt.) FK = 2 CB, KT = TS, cumque ſit etiam FC = CS, erit ST : SK = SC : SF, & ideo quia latera SK SF ſecantur proportionaliter in T & C erit CT parallela FK ſive FP, ideoque erit ST : SK = CT : FK & quia ST = $\frac{1}{2}$ SK erit CT æqualis $\frac{1}{2}$ FK, ſeu æqualis CB. Eodem modo probabitur, CG eſſe æqualem CB & parallelam lineæ PS.

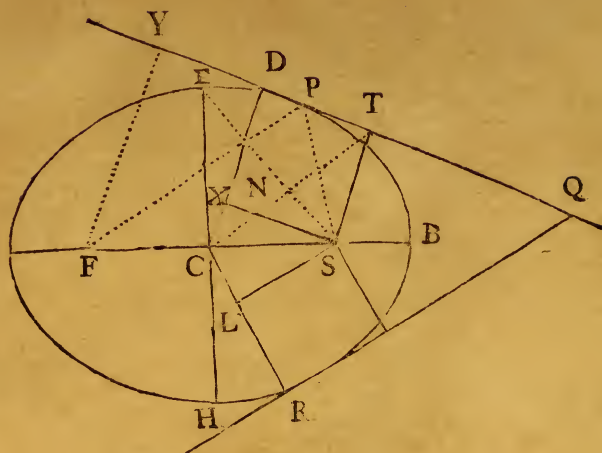
340.

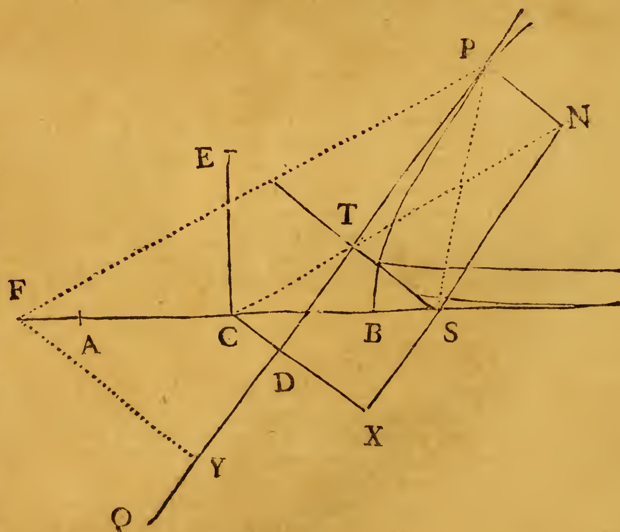
340. Datis centro C, duabus tangentibus P Q, E Q convergentibus & axe principali A B, describitur sectio conica. Nam si centro C & intervallo C B æqualis semiaxi principali describatur circulus tangentes secans in T & R, agantur tangentibus perpendiculares T S, R S, concurrentes in S, erit punctum S, alteruter umbilicus quo dato cum centro C, dantur positio axis principalis C B, & ipsius longitudo ac umbilici duo.

341. Datis centro C, tangente P Q, & puncto contactûs P, cum axe principali, trajectoria conica describitur. Centro enim C, & intervallo æquali semiaxi principali describatur circulus tangentem secans in T & G; in T excitetur perpendiculum T S, & junctâ C G, per punctum contactûs ducatur P S ipsi C G parallela perpendiculo T S occurrens in S, erit S umbilicus (339).

DE MOTU CORPORUM.

342. Si ex centro C sectionis conicæ ad tangentem PQ, demittatur perpendicularis CD, & ex altero umbilico S ad CD agatur normalis SX, sitque CE semiaxis minùs principalis, erit in ellipsi $CX^2 = CD^2 - CE^2$, & in hyperbolâ $CX^2 = CD^2 + CE^2$, & demissâ ex umbilico in tangentem perpendiculari ST, junctâque CT, rectam SX secante in N, erit in utrâque sectione XN æqualis DP distantiæ puncti contactûs P à perpendiculari CD; Nam in Ellipsi $CS^2 = CT^2\ (CB^2) - CE^2$, in Hyperbolâ $CS^2 = CT^2 + CE^2$, & in utrâque sectione $CS^2 = CX^2 + SX^2 = CX^2 + DT^2$; Ergò in Ellipsi $CX^2 + DT^2 = CT^2 - CE^2 = CD^2 + DT^2 - CE^2$, & hinc $CX^2 = CD^2 - CE^2$, & in hyperbolâ $CX^2 + DT^2 = CT^2 + CE^2 = CD^2 + DT^2 + CE^2$, adeòque $CX^2 = CD^2 + CE^2$. Q. e. 1.





Ex altero umbilico F, in tangentem demittatur perpendicularis FY, & junctis FP, SP, similia erunt triangula FPY, SPT, ob angulos æquales (Per natur. Tangentium & focorum) FPY, SPT, & STP, FYP rectos; & quoniam FP & CT, FY & CD sunt parallelæ, similia quoque erunt triangula CTD, FPY, ideòque duo triangula CTD, SPT sunt similia; quarè CD : DT = ST (DX) : PT, & divisim CD : DT = CD − DX : DT − PT, & compositè CD : DT = CD + DX : DT + PT. Undè quoniam in Ellipsi CD − DX = CX, & DT − PT = DP; in hyperbolâ verò CD + DX = CX, & DT + PT = DP, erit in utrâque sectione CD : DT = CX : DP. Verùm ob SX tangenti DT parallelam, CD : DT = CX : XN, ergò XN = DP. Q. e. 2.

343. Hinc datis centro C, semiaxe minùs principali CE, tangentibus duabus non

non parallelis, DQ, RQ, trajectoria Elliptica & Hyperbolica describitur. Nam ex centro C, ad tangentes demittantur perpendicula CD, CR, & capiantur CX, CL, ità ut $CX^2 = CD^2 - CE^2$, $CL^2 = CR^2 - CE^2$, si describenda sit ellipsis; vel ità ut $CX^2 = CD^2 + CE^2$, & $CL^2 = CR^2 + CE^2$, si describenda sit hyperbola; & per X & L puncta, erigantur ad CD, CR perpendicula XS, LS concurrentia in S, erit S focus ex quo si ad tangentem alterutram DQ, demittatur normalis ST, juncta CT, erit semiaxis principalis.

344. Datis centro C, semiaxe minùs principali CE, tangente PQ, & puncto contactûs P, sectio conica describitur. Nam ductâ XS, infinitâ ut suprà (343) capiatur XN = DP & jungatur CN, producaturque donec tangenti occurrat in T, recta TS, tangenti normalis secabit rectam XS in umbilico S, eritque CT semiaxis principalis.

345. Dato centro cum tangente & alterutro axe datur positio rectæ per umbilicum transeuntis; unde si præterea detur punctum extrà tangentem, facile erit umbilicum invenire. Eâdem ferè methodo quâ superiora Lemmata demonstravimus, Hermannus in Tom. IV. Academiæ Petropolitanæ solvit problema de Ellipsi Conicâ, cujus axis alteruter datus est, angulo positione & magnitudine dato ità inscribenda ut centrum ejus intrà datum angulum sit etiam positione datum.

346. Datis asymptotis, dantur hyperbolæ centrum seu asymptotorum concursus; 2°. datur positio axium qui asymptotorum angulos deinceps positos bifariam dividunt, 3°. datur eorum axium ratio, sunt enim sicut Sinus dimidiorum illorum angulorum CGA, ACG ideóque datis asymptotis cum puncto vel tangente, hyperbola describi potest (per prop. 4. & 9^m. lib. 2. conic. apoll.). Scilicet per punctum P ducatur PO perpendicularis in axem & PV Asymptoto Parallela & descripto circulo super Diametrum CO in eo secetur chorda OZ = OV, & sumatur CA = CZ & erit A Vertex Hyperbolæ. Nam sit a verus Hyperbolæ Vertex, sit Ca semi axis major & ag semi axis minor, erit $Ca^2 : ag^2 = CO^2 - Ca^2 : PO^2$ (per nat. Hyp. vid. Theor. 2. de Hyp. p. 122. & Cor. 1. Lem. 3. de Conicis p. 118.) sed (per const.) est $Ca : ag = OV : PO$, sive $Ca^2 : ag^2 = OV^2 : PO^2$ est ergo $OV^2 = CO^2 - Ca^2$, Rursus (per Constr.) est OV^2 sive $OZ^2 = CO^2 - CZ^2$ ergo $CO^2 - Ca^2 = CO^2 - CZ^2$ & $Ca = CZ = CA$, ergo erit A vertex Hyperbolæ.

Si detur Tangens, producatur illa usque ad utramque Asymptoton ubi utrinque terminetur, ejus medium erit punctum contactûs, sive punctum ad Hyperbolam pertinens, cujus ope axis major invenietur ut supra.

347. Datis asymptotis & umbilico vel alterutro axe, facile est hyperbolam describere. Sunto asymptoti CG, CD concurrentes in C, S umbilicus, CA, CE semiaxes; si ex umbilico S, in asymptotum quæ est tangens, demittatur perpendiculum ST, erit CT, æqualis semiaxi principali CA, (339), & ST æqualis semiaxi minùs principali CE seu GA, ob triangula CAG, CTS, similia & æqualia propter latus CA æquale lateri CT, Quare dato præter asymptotos semiaxe principali CT seu CA, datur umbilicus S, & contrà. Dato præter asymptotos semiaxe minùs principali CE, seu GA, invenitur alter semiaxis CA, seu EG, rectæ CE normalis in E, & asymptoto occurrens in G, & hinc reperitur umbilicus.

348. Asymptotus data, ut notum est, in problematum solutione æquivalet tangenti datæ cum puncto contactûs ad distantiam infinitam posito, atque adeò recta quævis ex puncto dato ad punctum contactûs asymptoti ducta ipsi asympmtoto parallela

DE MOTU CORPORUM.

lela eſt & poſitione data. Hinc facile erit problematum ſectionis IV. conſtructiones ad hyperbolam transferre ubi aſymptotus alterutra cum umbilico data eſt.

Datis umbilico S, axe principali, & aſymptoto CG, invenitur axis poſitio, demittendo ex umbilico S ad aſymptotum perpendicularem ST, & capiendo TC æqualem ſemiaxi dato, eſt enim C hyperbolæ centrum, CS axis principalis poſitio, TS ſemiaxis minùs principalis (348).

Datis umbilico & aſymptoto deſcribitur hyperbola ſpecie data, per conſtr. Caſ. 3. Prop. XIX. vel brevius, obſervando datam eſſe TS ſemiaxem minus principalem, undè ob datam axium rationem, dabitur centrum & axium poſitio cum alterâ aſymptoto, & hyperbola deſcribitur (348).

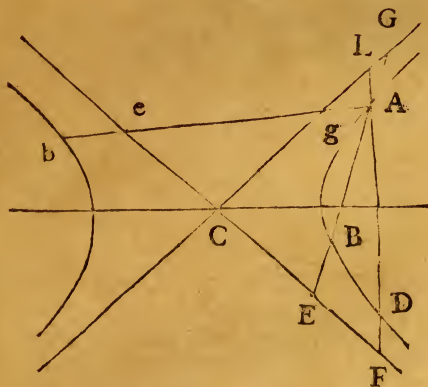
Datis aſymptoto, umbilico & tangente, invenitur umbilicus alter ac proindè axis tranſverſi poſitio & centrum. Sit enim aſymptotus data CG, umbilicus S, tangens BD, ex umbilico S, ad aſymptotum & tangentem, demittantur perpendicula ST, St, & producantur ad Y & V ut ſint TY = ST, tV = St; per punctum Y, agatur YH, aſymptoto parallela, & juncta YV, biſecetur in M, perpendiculo MH; perpendiculi hujus & rectæ YH communis interſectio H, eſt umbilicus alter, recta enim HY, aſymptoto parallela tranſit per punctum contactus aſymptoti, adeóque ob TY = TS, tranſit etiam per umbilicum H; Porrò rectæ YH, VH, per umbilicum H, ductæ ſunt æquales axi principali hyperbolæ per Lem. XV., & ideò æquales inter ſe; quarè perpendiculum HM, ex umbilico H in rectam YV demiſſum eam in M biſecat.

Datis aſymptoto CG, puncto P, & umbilico S, invenitur umbilicus alter H, demiſſo ad aſymptotum perpendiculo ST, & ſumptâ TY = ST, actâque YH aſymptoto parallelâ jungatur YP, & in eâ capiatur MN = SP, & ità locetur ut ſit YM = PN, hyperbola umbilicis Y, P, & axe principali MN, deſcripta, rectam YH ſecabit in altero umbilico H quæſito. Nam PS ſeu MN eſt rectarum HY, HP differentia, quæ ſemper æqualis eſt axi principali HY.

Aliter, Huc redit problema, datis in triangulo HYP latere PY, angulo Y, & laterum HY, HP differentia PS, invenire

venire latera. Ex puncto P, in HY, demittatur perpendicularis PA, capiatur laterum HP, HY, differentia PC = PS, & sumatur YH ad CY, ut est YS ad SC ∓ 2YA, scribendo − 2YA, si angulus HYP est obtusus, & + 2YA, si acutus, & delendo ∓ YA, si fuerit rectus, erit H punctum quæsitum, facilis est demonstratio ob angulum rectum A.

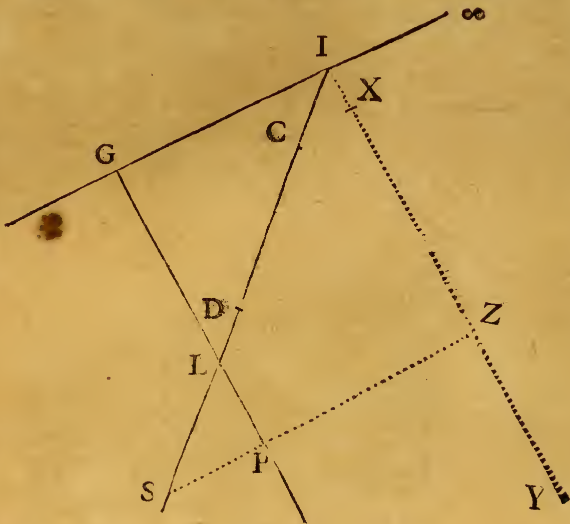
Sectionis V^æ. problemata, ubi asymptotus alterutra data est ad sequentia revocantur.



349. Datâ asymptoto CG, cum tribus punctis A, D, B, vel b, hyperbolam describere. Per punctum quodvis A, datum & alia duo D, B, vel b, agantur lineæ infinitæ AD, AB vel Ab, asymptoto datæ occurrentes in L & G, vel g; tum capiantur FD = AL, BE = GA, vel be = gA, juncta FE, aut Fe, erit asymptotus altera (per prop. 8^am. lib. 2. Conic. Apoll. per Lem. I. de Conic. p. 115.) qua (346) hyperbola describitur, cum facile inveniri possint quinque sectionis puncta, per angulos mobiles organice potest describi.

350. Datis asymptoto GI, tangente GL, punctisque duobus C, D, Hyperbolam describere, constructio & demonstratio eædem fere sunt ac problematis (XVI.).

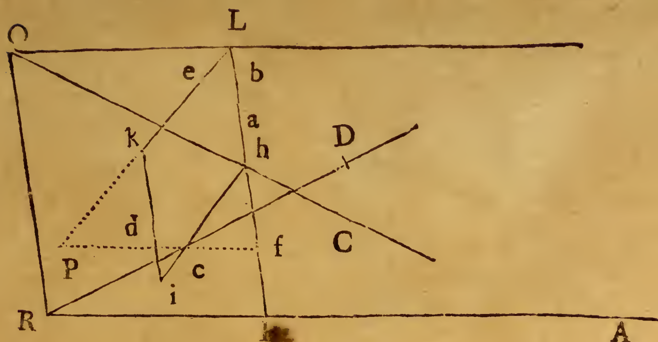
Per puncta duo data C, D, age rectam infinitam CD, asymptoto & tangenti occurrentem in punctis I, L, actam ita seca in S, ut sit IS ad LS, ut est media proportionalis inter CI & ID ad mediam proportionalem inter CL & LD; deinde age SP asymptoto GI parallelam, hæc secabit tangentem GL, in puncto contactûs P; nam si P supponatur esse punctum contactûs, & per punctum I agatur IY tangenti GL parallela quæ occurrat hy-



perbolæ in X & Y, & in eâ sumatur IZ, media proportionalis inter IX & IY erit (per prop. 3. & 10. lib. 2. conic. Apoll.) IX × IY sive IZ² = PG², sit enim ∞ punctum contactus Hyperbolæ & Asymptoti erit ∞ I² : ∞ G² = IX × IY : PG² (par Cor. 2. Lem. III. de Conic. p. 118.) sed cum ∞ I & ∞ G sint lineæ infinitæ quantitate finitâ GI differentes, pro æqualibus habentur, ergo etiam IX × IY sive IZ² = PG², atque adeò IZ = PG, & consequenter juncta PZ, parallela est asymptoto GI; recta ZP producta secet rectam IL, in puncto aliquo S, & ob similia triangula SIZ, SLP, erit IZ² : LP² = IS² : LS²; verùm (vid. Not. ad probl. XVI. aut Lem. III. de Conic. p. 117.) XI × IY (IZ²) : LP² = CI × ID : CL × LD; ergò IS² : LS² = CI × ID : CL × LD, quare si recta IL ita secetur in S, ut sit IS² : LS² = CI × ID : CL × LD, & agatur SP, asymptoto GI parallela, erit P punctum contactû. Datis autem tribus punctis C, P, D, Hyperbola describitur (349).

351.

De Motu Corporum.



351. Datis asymptoto O L, duabus tangentibus O C, R D, & puncto A, Hyperbolam describere; (solutio facilè deducitur ex problemate XVII).

Per concursum O asymptoti O L cum tangente O C, & concursum R tangentis alterius R D cum rectâ R A quæ per punctum datum A & punctum contactûs asymptoti transit, seu quæ est asymptoto parallela; age rectam infinitam O R, eâque adhibitâ pro radio ordinato primo, O L verò pro radio ordinato novo usurpatâ, sumptisque ordinatis novis asymptoto parallelis (ad majorem constructionis facilitatem), transmutetur figura per Lem. XXII. in figuram novam, nimirum linea B A in lineam B a, (330), punctum A in a, linea R D in i k ipsi B L parallelam (329) O C in i h, O L in k L ipsi i h parallelam (327) & punctum contactûs asymptoti infinitè distans transferetur in L; Nam punctum contactûs asymptoti est communis intersectio Linearum R A, O L infinitarum, & ideò transfertur in L communem intersectionem rectarum k L, B L parallelogrammi h i k L; Tria ergo latera h i, i k, k L tangunt novam sectionem conicam quæ transire debet per punctum a, dicantur c & d puncta contactuum linearum h i, i k, sic invenietur punctum c, sumatur Radix quadrata facti $hL \times ha$ & addatur lineæ i k, illa summa erit ad duplum lineæ h i ut ea ipsa Radix quadrata ad portionem h c. Hoc est $ik + \sqrt{hL \times ha} : 2hi = \sqrt{hL \times ha} : hc$. Nam (per Cor. 2. & 3. Lem. III. de Conic. p. 118.) est $dk^2 : kL^2 = di^2 : ic^2 = hL \times ha : hc^2$ inde est $dk : kL = di : ic = \sqrt{hL \times ha} : hc$, & sumendo summam Antec. & Conseq. est $dK + di + \sqrt{hL \times ha} : KL + ic + hc$ sive $ik + \sqrt{hL \times ha} : kL + hi\ (2hi) = \sqrt{hL \times ha} : hc$: Invento autem puncto c invenitur punctum d, si quidem est $di : ic = \sqrt{hL \times ha} : hc$: Construitur autem hæc solutio capiendo h f, æqualem mediæ proportionali inter L h & a h, & productâ L k ad P, ut sit $kP = kL$, agendo per f & P rectam f P, illa f P latera h i, i k secabit in punctis quæsitis c, d; nam ob parallelas c h, P L & i k, f L est $Lf\ (ik + \sqrt{ah \times hL}) : LP\ (2kL$ sive $2ih) = hf\ (\sqrt{ah \times hL}) : hc$, & $hc : hf = ic : id$; per inversas operationes Lem. XXII. (331), transferantur puncta c, d, in figuram primam, nimirum in C, D, & data erunt tria hyperbolæ puncta D, C, A, cum asymptoto O L, quarè describetur hyperbola (349).

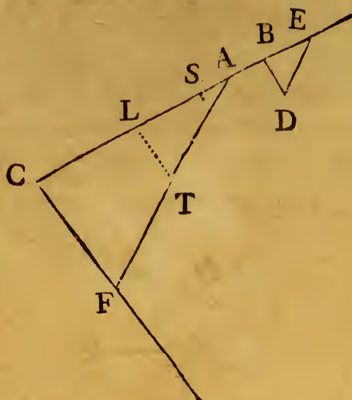
352. Datâ aſymptoto O a, & tribus tangentibus O C, A F, A H hyperbolam deſcribere, ſolvitur ut problema XVIII. Ab interſectione communi O aſymptoti O a, & tangentis O C, ad interſectionem communem A aliarum tangentium A F, A H agatur recta infinita O A, & eâdem pro radio ordinato primo adhibitâ, O a verò aſymptoti parte pro radio ordinato novo ſumptâ, tranſmutetur figura in figuram novam, nimirùm tangens O C & aſymptotus in parallelas i h, k l punctum contactûs aſymptoti in a, & duæ tangentes A F, A H in parallelas i k, h l, & parallelogrammi h l k i, latera ſingula novam ſectionem conicam tangunt, & quidem latus k l, in a, per a, & parallelogrammi centrum m, agatur a q, tangenti, i h, occurrens in q, & erit q, punctum alterum quo i h, novam ſectionem tangit. Per Lemmatis XXII. operationem inverſam transferatur hoc punctum in figuram primam, nempè in C, & erit C, punctum contactûs tangentis O C, quarè datis aſymptoto O a, duabus tangentibus A F, A H, & puncto C, deſcribetur hyperbola. (351).

353. Datis aſymptoto, axium ratione, duobus punctis vel puncto & tangente aut binis tangentibus, hyperbolam deſcribere. Sunto hyperbolæ aſymptoti C E, C G, centrum C, vertex principalis A, ſemiaxis tranſverſus C A, ſemiaxis conjugatus A E ad C A, normalis; in triangulo rectangulo C A E datâ ratione crurum C A, A E, datur angulus E C A, eſt enim C A, ad E A, ut ſinus totus ad tangentem anguli E C A, quarè datâ ſpecie hyperbolæ ſeu axium ratione datur aſymptotorum angulus E C B, & viceverſâ dato aſymptotorum angulo datur ſpecie hyperbola; his poſitis problema facile ſolvitur.

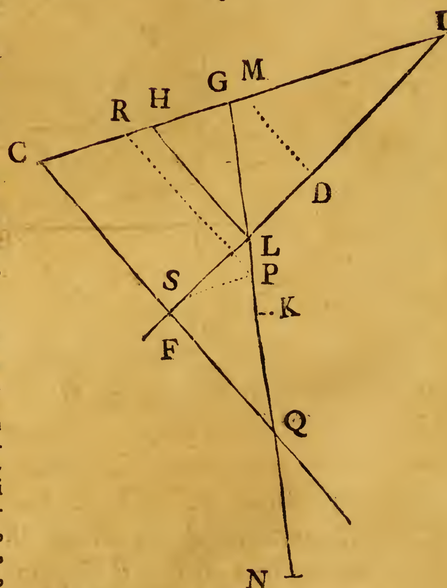
Caſ. 1. Data ſit aſymptotus C H, cum axium ratione ſeu aſymptotorum angulo & punctis duobus D, F, per puncta illa age rectam infinitam D F, aſymptoto datæ occurrentem in H, fac F G = H D, & per punctum G, age rectam infinitam G C, quæ cum aſymptoto C H, efficiat angulum H C G, æqualem angulo aſymptotorum dato, erit C G, aſymptotus altera (per prop. 8am. Lib. 2. conic. Apoll. ſive Lemma I. de Conic.) quare deſcribetur hyperbola (346).

DE MOTU CORPORUM.

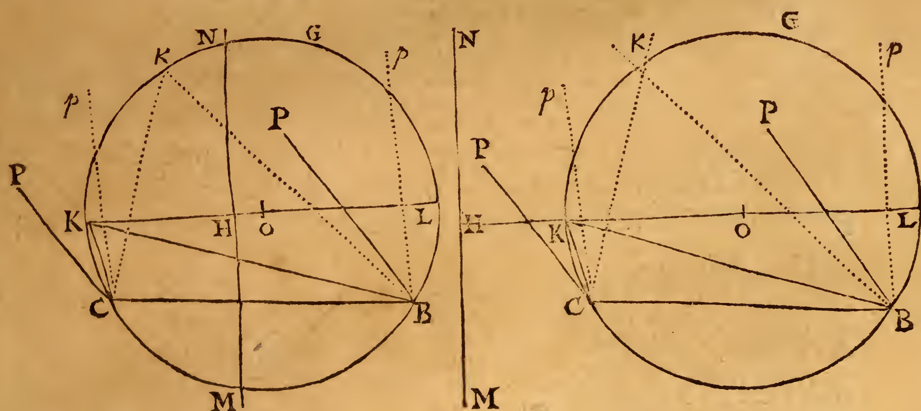
Caſ. 2. Data ſit aſymptotus CE, cum aſymptotorum angulo, puncto D, & tangente FA; per punctum D datum agantur recta BD, ad angulum DBE datum, ſeu æqualem aſymptotorum angulo, & DE tangenti FA parallela, capiantur BS æqualis mediæ proportionali inter BE & AE, & AC æqualis 2 SE, erit C hyperbolæ centrum, CF verò rectæ BD parallela aſymptotus altera. Nam ſit T punctum contactûs, CF aſymptotus altera, ductâ TL aſymptoto FC parallelâ, erit FT = TA (per prop. 3^{im}. Lib. 2. conic. apoll. ſup. Theor. I. de Hyp. p. 122.) ac proindè LA = CL: Eſt autem ex naturâ hyperbolæ inter aſymptotos $CL \times LT$, hoc eſt $AL \times LT = CB \times BD$, adeóque $BD : LT = AL : CB$. $(2AL + AB)$ & ob triangula ſimilia ALT, EBD, $BD : LT = BE : AL$; ergò $BE : AL = AL : 2AL + AB$, ſed (per conſtr.) $BE : BS = BS : BE + AB$, & compoſitè $BE : BS = SE : SE + AB$, & $BE : SE = SE : 2SE + AB$, eſt igitur $AL = SE$, & $2AL$ ſeu $AC = 2SE$.



Caſ. 3. Data ſit aſymptotus GI, cum aſymptotorum angulo & duabus tangentibus FI, GQ ſe mutuò interſecantibus in L & aſymptotum in G & I; ex puncto L agatur ad aſymptotum GI recta LH, in angulo aſymptotorum dato LHG, producatur GL ad N, ut ſit LN ad HI, ut eſt GL ad GH, capianturque GK æqualis mediæ proportionali inter GL, & LN, & LP æqualis $\frac{1}{2}$ LK, erit P punctum contactûs tangentis GQ. Nam ſi ſupponamus P, D eſſe puncta contactuum, & CQ aſymptotum alteram tangenti GQ occurrentem in Q & alteri aſymptoto in C, & ex punctis D, P ductæ intelligantur rectæ DM, PR & PS, aſymptotis CI & CQ parallelæ ac DM, PR aſymptoto CI occurrant in M, R, PS verò tangenti FI in S, erit $CR = RG$, & $CM = MI$; & ob ſimilia triangula GLI, PLS, $GL : LP = LI : LS$, adeóque componendo $GP : LP = IS : LS$, ſed (323.) $IS : LS = DI : LD$; quarè $GP : LP = DI : LD$, ac proindè $GP + LP : GP = LI : DI$. Porrò in triangulis ſimilibus ILH, IDM, $LI^2 : HI \times LH = DI^2 : DM \times MI$, & in triangulis ſimilibus GLH, GRP, $GH \times LH : GL^2 = GR \times RP : GP^2 = DM \times MI : GP^2$, ob $MI \times DM = CM \times DM = CR \times RP = GR \times RP$ ex naturâ hyperbolæ inter aſymptotos, quare per compoſitionem rationum $LI^2 \times GH \times LH : GL^2 \times HI \times LH = DI^2 : GP^2 = LI^2 \times GH : GL^2 \times HI$. Verùm (per conſtruct.) $GH : HI = GL^2 : GL \times LN$, & $GK^2 = GL \times LN$, ac proindè $GH : HI = GL^2 : GK^2$; undè $DI^2 : GP^2 = LI^2 \times GL^2 : GL^2 \times GK^2 = LI^2 : GK^2$, & $DI : GP = LI : GK$, atque adeò $LI : DI = GK : GP$; ſed ſuprà invenimus $GP + LP : GP = LI : DI$, ergò $GK : GP = GP + LP : GP$, atque ita



Poſtquam trajectoria deſcripta eſt, invenire licet axes & umbilicos ejus hác methodo. In conſtructione & figurâ lemmatis XXI. fac ut angulorum mobilium *PBN*, *PCN* crura *BP*, *CP*, quorum concurſu trajectoria deſcribebatur, ſint ſibi invicem parallela, eumque ſervantia ſitum revolvantur circa polos ſuos *B*, *C* in figurâ illâ. Interea vero deſcribant altera angulorum illorum crura *CN*, *BN*, concurſu ſuo *K* vel *k*, circulum *BGKC*.



Sit circuli hujus centrum *O*. Ab hoc centro ad regulam *MN*, ad quam altera illa crura *CN*, *BN* interea concurrebant, dum trajectoria deſcribebatur, demitte normalem *OH* circulo occurrentem in *K* & *L*. Et ubi crura illa altera *CK*, *BK* concurrunt ad punctum illud *K* quod regulæ propius eſt, crura prima *CP*, *BP* parallela erunt axi majori, & perpendicularia minori; & contrarium eveniet, ſi crura eadem concurrunt ad punctum remotius *L*. Unde ſi detur trajectoriæ centrum, dabuntur axes. ([d]) Hiſce autem datis, umbilici ſunt in promptu.

Axium

ità GK = GP + LP, ſeu GL + LK = GL + 2LP, ac proinde LK = 2LP, & LP = $\frac{1}{2}$ LK; invento autem puncto contactûs P, ſi capiatur PQ = PG, & per punctum Q, agatur QC, ipſi LH parallela, erit QC altera aſymptotus, & hyperbola deſcribetur (346).

(d) * Vid. Not. 314.

 * Vid.

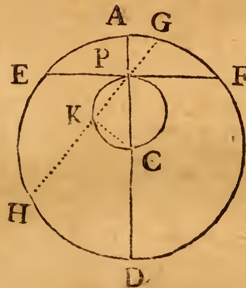
(e) Axium vero quadrata ſunt ad invicem ut *KH* ad *LH*, & inde facile eſt trajectoriam (f) ſpecie datam per data quatuor puncta deſcribere. Nam ſi duo ex punctis datis conſtituantur poli *C*,

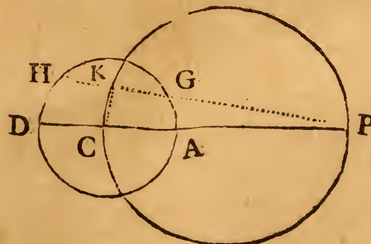
(e) * Vid. Not. 315.

(f) Sit deſcribenda trajectoria ſpecie data per puncta quatuor C, B, P, Q, duo puncta C, B conſtituantur poli & junctis CP, BP erunt PCB, PBC anguli mobiles, fac ut angulorum illorum crura BP, CP ſint ſibi invicem parallela, nempè in poſitione quâvis Bp, Cp, & crura alia BC, CB ſe mutuò interſecent in F; & centro O deſcribe circulum per tria puncta C, F, B tranſeuntem cujuſque proindè ſegmentum CFB capit angulum CFB, centro O radio OH deſcribatur circulus, (punctum verò H, ita determinetur in Diametro KL ut ſit KH ad LH ut ſunt ad invicem quadrata axium trajectoriæ). Tum crurum BP, CP concurſus adducatur ad punctum Q & intereà notetur punctum R ubi concurrunt alia crura CA, BD, & ex puncto R agatur recta RMN tangens circulum radio OH deſcriptum, *erit NM regula cujus ope trajectoria deſcribetur* (314).

B, tertium dabit angulos mobiles, *PCK*, *PBK*; his autem datis describi potest circulus *BGKC*. Tum ob datam specie trajectoriam, dabitur ratio *OH* ad *OK*, ideoque ipsa *OH*. Centro *O* & intervallo *OH* describe alium circulum, & recta, quæ tangit hunc circulum, & transit per concursum crurum *CK*, *BK*, ubi crura prima *CP*, *BP* concurrunt ad quartum datum punctum, erit regula illa *MN* cujus ope trajectoria describetur. (g) Unde etiam vicissim trapezium specie datum (si casus quidam impossibiles excipiantur) in datâ quâvis sectione conicâ inscribi potest.

Sunt & alia lemmata quorum ope trajectoriæ specie datæ, datis punctis & tangentibus, describi possunt. (h) Ejus generis est quod, si recta linea per punctum quodvis positione datum ducatur, quæ datam coni sectionem in punctis duobus intersecet, & intersectionum intervallum bisecetur, punctum bisectionis tanget aliam coni sectionem ejusdem speciei cum priore, atque





Si describenda foret parabola, ducenda esset ex puncto R recta RN, circulum CKB tangens; nam in parabolâ punctum H, coincidit cum puncto K (313).

Quoniam autem ex puncto R, duæ tangentes ut RN duci possunt, patet duas trajectorias specie datas per data quatuor puncta posse describi.

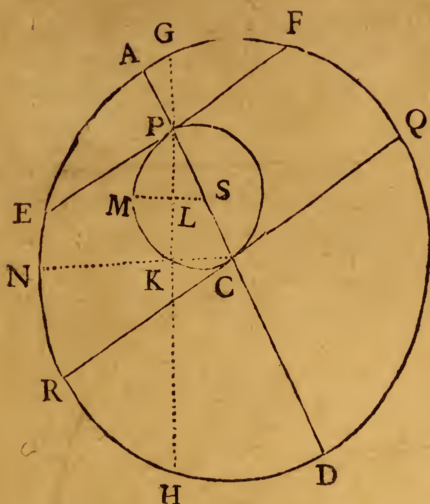
(g) * Nam si describatur trapezium quodvis specie datum, & huic circumscribatur sectio conica datæ similis Methodo in notâ præcedente expositâ, deindè in sectione conicâ datâ quatuor agantur lineæ in eâ similiter positæ ac quatuor trapezii latera in sectione trapezio circumscriptâ, habebitur trapezium specie datum in datâ sectione conicâ inscriptum.

(h) * Hoc Lemma facilè demonstratur in circulo. Intra vel extra circulum AFDE datum sit punctum P per quod & per centrum circuli C agatur PD; tum diametro PC describatur circulus PKCP, chorda quælibet GH per punctum P ducta, bifariam divisa est in puncto K ubi circulo PKC occurrit; Nam junctâ KC, erit angulus CKP rectus ac proindè chorda HG bisecta in K.

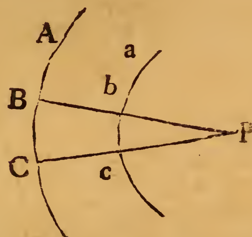
De Motu Corporum.

atque axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

LEM-



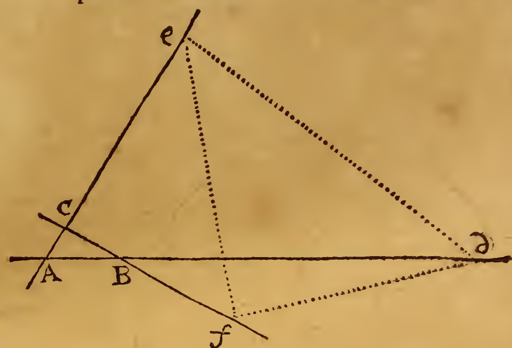
(h) * Idem Lemma pari facilitate in cæteris sectionibus conicis demonstratur. Datum sit punctum P, per hoc & per centrum C sectionis conicæ AFDE agatur diameter AD, tùm diametro PC, quæ similis sit diametro AD, describatur alia sectio conica PMKC, ejusdem speciei cum datâ, & diameter conjugata ipsius PC, similis erit & parallela diametro RQ, conjugatæ ipsius AD, & quia in duabus figuris similibus, si duo latera homologa parallela sint, cætera omnia latera similia sunt etiam parallela, ambarum sectionum conicarum similes diametri omnes, adeóque & axes paralleli erunt; agatur nunc per punctum datum P, chorda quævis GPH, sectioni PMC occurrens in K, dico esse KH = KG. Nam jungatur CK, & producatur donec trajectoriæ AHD occurrat in N, & per centrum S trajectoriæ PKC, agatur SM parallela CK, chordæ PK occurrens in L & sectioni in M, erunt SM, NC diametri similes, & earum ordinatæ parallelæ, sed quia in triangulis similibus PSL, PCK est PS = SC erit quoque PL = LK, ac proinde PLK erit ordinata ad diametrum SM, adeóque GKH erit ordinata ad diametrum NC; quare GK = KH *ergo punctum bisectionis K tanget curvam priori similem & axes habentem prioris axibus parallelos.* Eadem est demonstratio, si punctum P extrà sectionem sumatur.



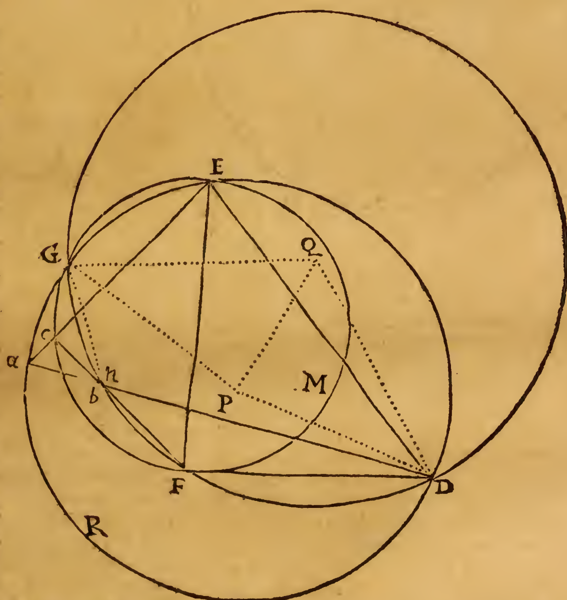
354. Adjungemus aliud Lemma maximè universale. Si ex puncto quovis P dato ducatur recta PB, curvæ cuilibet ABC occurrens in B, & recta illa PB ità dividatur in b, ut sit semper Pb ad PB in ratione datâ, punctum b, tanget curvam abc ejusdem speciei & ordinis cum curvâ ABC, atque lineas habentem similibus curvæ ABC lineis parallelas. Nam si fuerit ABC polygonum rectilineum cujus latus unum BC, cum sit (per hyp.) Pb : PB = Pc : PC, similia erunt triangula PBC, Pbc, & latera BC, bc, parallela & in datâ ratione PB, ad Pb, ac proindè totum polygonum ABC simile polygono abc, & eorum latera homologa parallela erunt. Laterum polygoni ABC numerus augeatur in infinitum & ipsorum longitudo in infinitum minuatur & duo polygona ABC, abc mutabuntur in curvas similes in quibus latera homologa sunt parallela.

LEMMA XXVI.

Trianguli specie & magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem positione datas, quæ non sunt omnes parallelæ, singulos ad singulas ponere.

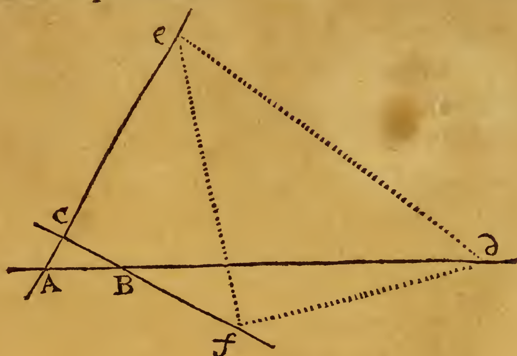


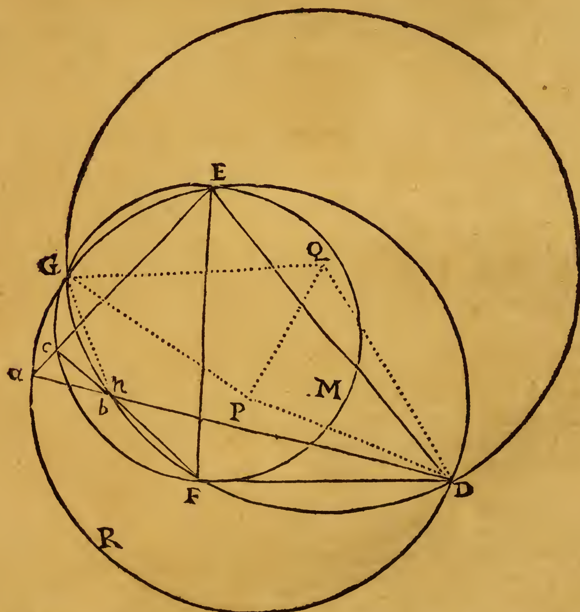
Dantur positione tres rectæ infinitæ *AB*, *AC*, *BC*, & oportet triangulum *DEF* ita locare, ut angulus ejus *D* lineam *AB*, angulus *E* lineam *AC*, & angulus *F* lineam *BC* tangat. Super *DE*, *DF* & *EF*, describe tria circulorum segmenta *DRE*, *DGF*, *EMF*; quæ capiant angulos angulis *BAC*, *ABC*, *ACB* æquales respectivè. Describantur autem hæc segmenta ad eas partes linearum *DE*, *DF*, *EF*, ut literæ *DRED* eodem ordine cum literis *BACB*, literæ *DGFD* eodem cum literis *ABCA*, & literæ *EMFE* eodem cum literis *ACBA* in orbem redeant; deinde compleantur hæc segmenta in circulos integros. Secent circuli duo priores se mutuo in *G*, sintque centra eorum *P* & *Q*. Junctis *GP*, *PQ*, cape *Ga* ad *AB* ut est *GP* ad *PQ*, & centro *G*, intervallo *Ga* describe circulum, qui secet circulum primum *DGE* in *a*. Jungatur tum *aD* secans circulum secundum *DFG* in *b*, tum *aE*



DE MOTU CORPORUM.

secans circulum tertium *EMF* in *c*. Et jam licet figuram *ABCdef* constituere similem & æqualem figuræ *abcDEF*. Quo facto perficitur problema.





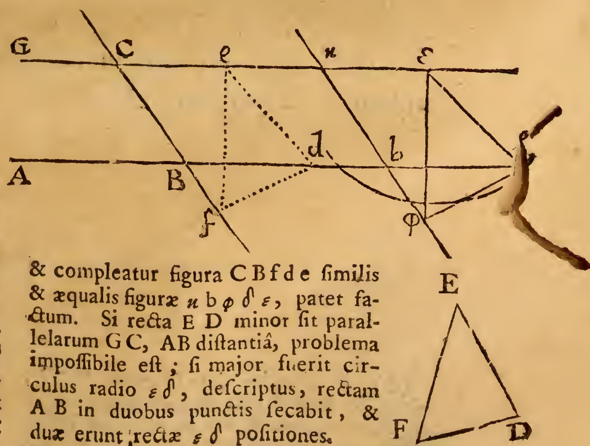
Agatur enim *Fc* ipsi *aD* occurrens in *n*, & jungantur *aG* *bG*, *QG*, *QD*, *PD*. Ex constructione est angulus *EaD* æqualis angulo *CAB*, & (i) angulus *acF* æqualis angulo *ACB*,

(i) * *Angulus acF æqualis angulo ACB*, nam angulus FcE est anguli acF atque etiam anguli in segmento EMF complementum ad duos rectos, quare angulus acF, est æqualis angulo quem capit segmentum EMF, hic autem angulus æqualis est angulo ACB (per constr.).

* An-

ideoque triangulum *anc* triangulo *ABC* æquiangulum. Ergo angulus *anc* ſeu *FnD* angulo *ABC*, ideoque angulo *FbD* æqualis eſt; & propterea punctum *n* incidit in punctum *b*. Porro angulus *GPQ*, (k) qui dimidius eſt anguli ad centrum *GPD*, æqualis eſt angulo ad circumferentiam *GaD*; & angulus *GQP*, qui dimidius eſt anguli ad centrum *GQD*, æqualis eſt complemento ad duos rectos anguli ad circumferentiam *GbD*, ideoque æqualis angulo *Gba*; ſuntque ideo triangula *GPQ*, *Gab* ſimilia; & *Ga* eſt ad *ab* ut *GP* ad *PQ*; id eſt (ex conſtructione) ut *Ga* ad *AB*. Æquantur itaque *ab* & *AB*; & propterea triangula *abc*, *ABC*, quæ modo ſimilia eſſe probavimus, ſunt etiam æqualia. Unde cum tangant inſuper trianguli *DEF* anguli *D*, *E*, *F* trianguli *abc* latera *ab*, *ac*, *bc* reſpectivè, compleri poteſt figura *ABCdef* figuræ *abcDEF* ſimilis & æqualis, atque eam complendo ſolvetur problema. *Q.E.F.*

Corol. Hinc recta duci poteſt cujus partes longitudine datæ rectis tribus poſitione datis interjacebunt. Concipe triangulum *DEF*, puncto *D* ad latus *EF* accedente, & lateribus *DE*, *DF* in directum poſitis, mutari in lineam rectam, cujus pars data *DE* rectis poſitione datis *AB*, *AC*, & pars data *DF* rectis poſitione datis *AB*, *AC*, interponi debet;



(k) * Angulus GPQ dimidius eſt anguli ad centrum GPD, recta enim PQ, quæ circulorum DRGD, DGFD centra jungit, perpendicularis eſt ad rectam GD, quæ puncta interſectionum circulorum jungeret adeóque angulum GPD biſecat.

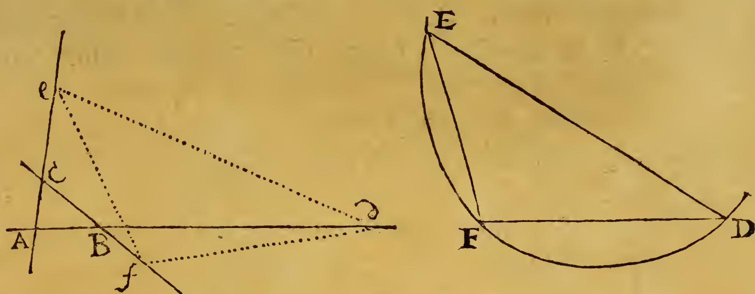
355. Si trium rectarum GC, AB, CB poſitione datarum duæ GC, AB ſint parallelæ & oporteat triangulum datum DEF itá locare ut angulus ejus D lineam AB, angulus E lineam GC, & angulus F lineam BC tangat, centro quovis ε in lineâ GC, ad arbitrium ſumpto & radio εδ, æquali ED, deſcribatur circulus rectæ AB, occurrens in δ; ſuper baſi εδ conſtruatur triangulum εδφ ſimile & æquale triangulo dato EDF, & ex angulo illius φ agatur φϰ rectæ BC parallela ſecans GC in ϰ, & AB in b, & compleatur figura CBfde ſimilis & æqualis figuræ ϰbφδε, patet factum. Si recta ED minor ſit parallelarum GC, AB diſtantiâ, problema impoſſibile eſt; ſi major fuerit circulus radio εδ, deſcriptus, rectam AB in duobus punctis ſecabit, & duæ erunt rectæ εδ poſitiones.

& applicando constructionem præcedentem ad hunc casum solvetur problema.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA XX.

Trajectoriam specie & magnitudine datam describere, cujus partes datæ rectis tribus positione datis interjacebunt.

Describenda sit trajectoria, quæ sit similis & æqualis lineæ curvæ *DEF*, quæque à rectis tribus *AB*, *AC*, *BC* positione



datis, in partes datis hujus partibus *DE* & *EF* similes & æquales secabitur.

Age rectas *DE*, *EF*, *DF*, & trianguli hujus *DEF* pone angulos *D*, *E*, *F* ad rectas illas positione datas (per lem. XXVI) (1) dein circa triangulum describe trajectoriam curvæ *DEF* similem & æqualem. *Q. E. F.*

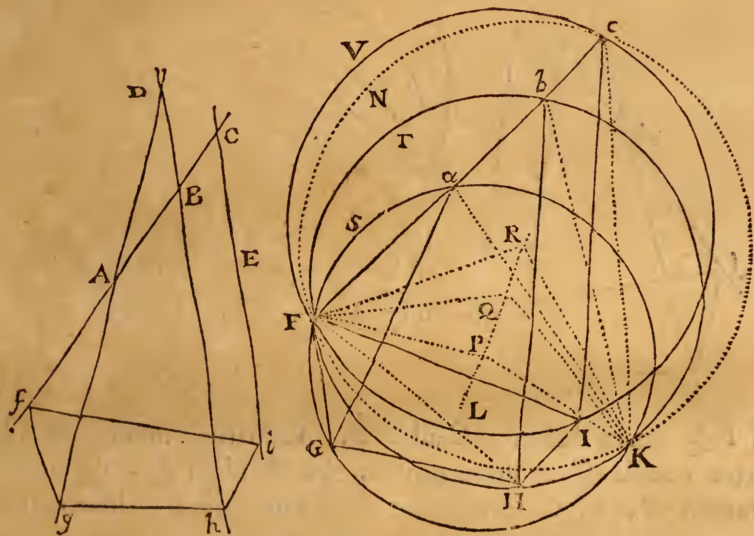
LEM-

(1) * Si enim data sit curva D E F, triangulo dato E F D circumscripta, dabitur diametrorum & axium ejusdem curvæ positio ad trianguli E F D latera, & hinc habebitur positio diametrorum & axium curvæ similis & æqualis circà triangulum e f d describendæ.

LEMMA XXVII.

Trapezium specie datum describere, cujus anguli ad rectas quatuor positione datas, quæ neque omnes parallelæ sunt, neque ad commune punctum convergunt, singuli ad singulas consistent.

Dentur positione rectæ quatuor *ABC*, *AD*, *BD*, *CE*; quarum prima secet secundam in *A*, tertiam in *B*, & quartam in *C*: & describendum sit trapezium *fghi*, quod sit trapezio *FGHI* simile; & cujus angulus *f*, angulo dato *F* æqualis, tan-



gat rectam *ABC*; cæterique anguli *g*, *h*, *i*, cæteris angulis datis *G*, *H*, *I* æquales, tangant cæteras lineas *AD*, *BD*, *CE* respectivè. Jungatur *FH* & super *FG*, *FH*, *FI* describantur totidem circulorum segmenta *FSG*, *FTH*, *FVI*; quorum primum *FSG* capiat angulum æqualem angulo *BAD*, secundum *FTH* capiat angulum æqualem angulo *CBD*, ac tertium

DE MOTU CORPORUM.

tium *FVI* capiat angulum æqualem angulo *ACE*. Deſcribi autem debent ſegmenta ad eas partes linearum *FG*, *FH*, *FI*, ut literarum *FSGF* idem ſit ordo circularis qui literarum *BADB*, utque literæ *FTHF* eodem ordine cum literis *CBDC*; & literæ *FVIF* eodem cum literis *ACEA* in orbem redeant. Compleantur ſegmenta in circulos integros; ſitque *P* centrum circuli primi *FSG*, & *Q* centrum ſecundi *FTH*. Jungatur & utrinque producatur *PQ*, & in eâ capiatur *QR* in eâ ratione ad *PQ* quam habet *BC* ad *AB*. Capiatur autem *QR* ad eas partes puncti *Q* ut literarum *P*, *Q*, *R* idem ſit ordo atque literarum *A*, *B*, *C*: centroque *R* & intervalo *RF* deſcribatur circulus quartus *FNc* ſecans circulum tertium *FVI* in *c*. Jungatur *Fc* ſecans circulum primum in *a*, & ſecundum in *b*. Agantur *aG*, *bH*, *cI*, & figuræ *abcFGHI* ſimilis conſtitui poteſt figura *ABCfghi*. Quo facto erit trapezium *fghi* illud ipſum, quod conſtituere oportebat.

Secent enim circuli duo primi *FSG*, *FTH* ſe mutuo in *K*. Jungantur *PK*, *QK*, *RK*, *aK*, *bK*, *cK*, & producatur *QP* ad *L*. Anguli ad circumferentias *FaK*, *FbK*, *FcK* ſunt ſe-

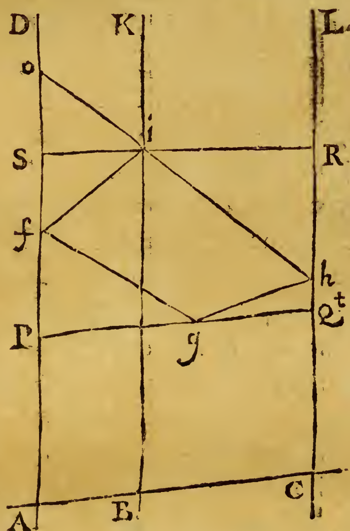
miſſes

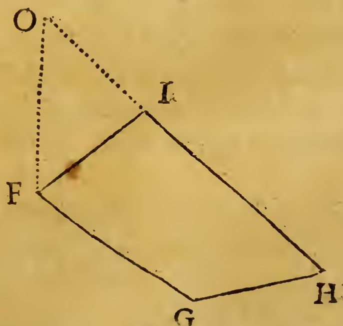
missis angulorum *FPK*, *FQK*, *FRK* ad centra, ideoque angulorum illorum dimidiis *LPK*, *LQK*, *LRK* æquales. (m) Est ergo figura *PQRK* figuræ *abcK* æquiangula & similis, & propterea *ab* est ad *bc* ut *PQ* ad *QR*, id est, ut *AB* ad *BC*. Angulis insuper *FaG*, *FbH*, *FcI* æquantur *fAg*, *fBh*, *fCi* per constructionem. Ergo figuræ *abcFGHI* figura similis *ABCfghi* compleri potest. Quo facto trapezium *fghi* constituetur simile trapezio *FGHI*, & angulis suis *f*, *g*, *h*, *i* tanget rectas *ABC*, *AD*, *BD*, *CE*. *Q. E. F.* Co-

(m) * Est enim angulus Kab = KPR, angulus Kba = KQP, ac proinde triangulum aKb, simile triangulo PQK, & similiter patet triangulum bKc, esse simile triangulo QKR, adeóque totam figuram abcK, similem esse figuræ PQRK.

* Si ex quatuor rectis positione datis duæ vel tres fuerint parallelæ manet eadem constructio. Potest tamen hæc alia adhiberi quæ etiam valet, ubi quatuor sunt parallelæ. Datæ sint tres parallelæ AD, BK, CL quas quarta AC in A, B, C secat & oporteat describere trapezium simile trapezio FIHG & cujus anguli angulis F, I, H, G æquales, rectas AD, BK, CL, AC, tangant. per punctum quodvis i, rectæ BK, agatur SiR, parallelis AD, BK CL normalis, iisque occurrens in S, & R, producatur HI, ad O, ut sit HI ad IO ut est Ri ad iS junganturqe FO; tum ex puncto i, agatur if, parallelam AD secans in f, ità ut sit angulus fiB seu ifD, æqualis angulo IFO, & super latere fi, simili FI construatur trapezium fihg simile trapezio FIHG, ac per angulum g agatur recta PQ ipsi AC parallela, & tandem super rectâ AC, construatur figura similis figuræ PQhifg. Dico factum.

Demonstrandum est angulum h esse in parallelâ CL; si punctum h, non est in lineâ CL producatur ih donec rectæ CL occurrant in t, & producatur ti, donec occurrat rectæ AD in o & erit HI:IO = hi:io = Ri:iS, ob figuras oifh, OIFH, (per constr.) similes; sed ob similia triangula tiR, oiS, ti:io = Ri:iS, ergò hi:io = ti:io, atquè adeò hi = ti; quarè punctum t, cum h, coincidit.





Fi. 3.

* Nam

Corol. Hinc recta duci poteſt cujus partes, rectis quatuor poſitione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli *FGH*, *GHI* uſque eo, ut rectæ, *FG*, *GH*, *HI* in directum jaceant, & in hoc caſu conſtruendo problema ducetur recta *fghi*, cujus partes *fg*, *gh*, *hi*, rectis quatuor poſitione datis *AB* & *AD*, *AD* & *BD*, *BD* & *CE* interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ *FG*, *GH*, *HI*, eundemque ſervabunt ordinem inter ſe. Idem verò ſic fit expeditius.

Producantur *AB* ad *K*, & *BD* ad *L*, ut ſit *BK* ad *AB* ut *HI* ad *GH*; & *DL* ad *BD* ut *GI* ad *FG*; & jungatur *KL* occurrens rectæ *CE* in *i*. Producatur *iL* ad *M*, ut ſit *LM* ad *iL* ut *GH* ad *HI*, & agatur tum *MQ* ipſi *LB* parallela, rectæque *AD* occurrens in *g*, tum *gi* ſecans *AB*, *BD* in *f*, *h*. Dico factum.

Secet enim *Mg* rectam *AB* in *Q*, & *AD* rectam *KL* in *S*, & agatur *AP* quæ ſit ipſi *BD* parallela & occurrat *iL* in *P*, & erunt *gM* ad *Lh* (*gi* ad *hi*, (n) *Mi* ad *Li*, *GI* ad *HI*, *AK* ad *BK*) & *AP* ad *BL* in eâdem ratione. Secetur *DL* in *R* ut ſit *DL* ad *RL* in eâdem illâ ratione, & ob proportionales *gS* ad *gM*, *AS* ad *AP*, & *DS* ad *DL*; erit, (o) ex æquo, ut *gS* ad *Lh* ita *AS* ad *BL* & *DS* ad *RL*; & mixtim, *BL*−*RL* ad *Lh*−*BL* ut *AS*−*DS* ad *gS*−*AS*. Id eſt *BR* ad *Bh* ut *AD* ad *Ag*, ideoque ut *BD* ad *gQ*. Et viciſſim *BR* ad *BD* ut *Bh* ad *gQ*, ſeu *fh* ad *fg*. Sed ex conſtructione linea *BL* eâdem ratione ſecta fuit in *D* & *R* atque linea *FI* in *G* & *H*: ideoque eſt *BR* ad *BD* ut *FH* ad *FG*. Ergo *fh* eſt ad *fg* ut *FH* ad *FG*. Cum igitur ſit etiam *gi* ad *hi* ut *Mi* ad *Li*, id eſt, ut *GI* ad *HI*, patet lineas *FI*, *fi* in *g* & *h*, *G* & *H* ſimiliter ſectas eſſe. *Q. E. F.*

In

(n) * Nam (per conſtr.) LM : iL = GH : HI = AB : BK, ac proindè componendo conſequentes cum antecedentibus Mi : Li = GI : HI = AK : BK = AP : BL ob parallelas.

(o) * Quoniam enim
gM : Lh = AP : BL = DL : RL
& gS : gM = AS : AP = DS : DL
patet eſſe gS : Lh = AS : BL = DS : RL, & conſequenter gS − AS : Lh − BL = AS − DS : BL − RL = gS : Lh; undè invertendo permutando & alternando BL − RL : Lh − BL = AS − DS : gS − AS id eſt BR : Bh = AD : Ag = BD : gQ, ob ſimilia triangula ADB, AgQ.

* Si

In constructione corollarii hujus postquam ducitur LK secans CE in i, producere licet iE ad V, ut sit EV ad Ei ut FH ad HI, & (p) agere Vf parallelam ipsi BD. (q) Eodem recidit si centro i, intervallo IH, describatur circulus secans BD in X, & producatur iX ad Y, ut sit iY æqualis IF, & agatur Yf ipsi BD parallela.

Problematis hujus solutiones alias *Wrennus* & *Wallisius* olim excogitarunt.

PRO-

(p) * Si enim ex puncto f, per superiorem constructionem invento agatur fV parallela BD & lineæ iE productæ occurrens in V, erit ob similia triangula iEh, iVf, $EV:Ei=fh:hi$, sed ex suprà demonstratis $fh:hi=FH:HI$, ergò $EV:Ei=FH:HI$.

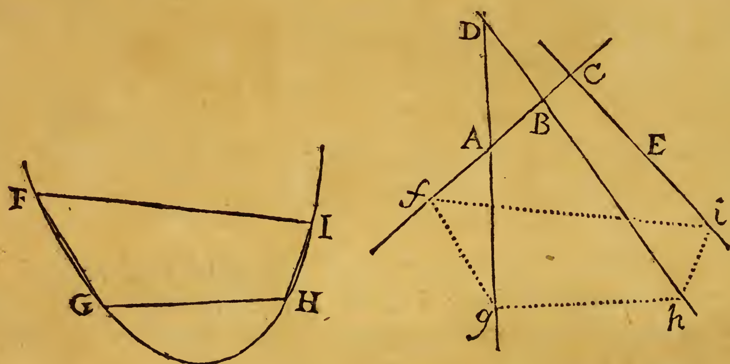
(q) * Nam si ex puncto f, ut suprà invento agatur fY, ipsi BD, parallela & rectæ iX, productæ occurrens in Y, erit ob similia triangula iXh, iYf, $ih:hf=iX:XY=IH:HF$. Undè cum sit $iX=IH$ (ex hyp.) erit $XY=HF$.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA XXI.

Trajectoriam specie datam describere, quæ à rectis quatuor positione datis in partes secabitur, ordine, specie & proportione datas.

Describenda sit trajectoria, quæ similis sit lineæ curvæ *FGHI*, & cujus partes, illius partibus *FG*, *GH*, *HI* similes & proportionales, rectis *AB* & *AD*, *AD* & *BD*, *BD* & *CE* positione datis, prima primis, secunda secundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis *FG*, *GH*, *HI*, *FI* describatur (per



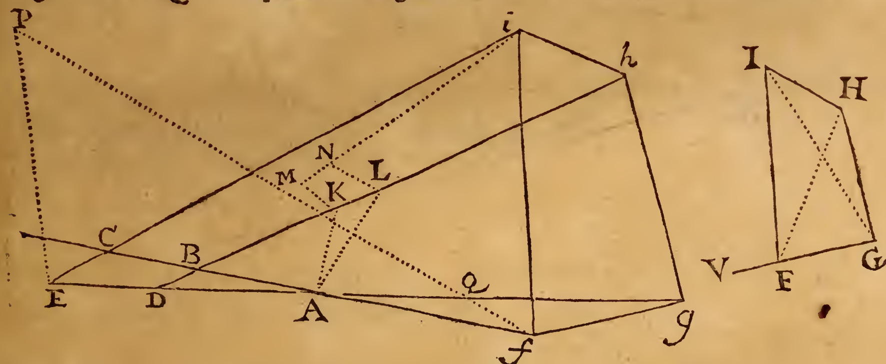
lem. XXVII.) Trapezium *fghi*, quod sit trapezio *FGHI* simile, & cujus anguli *f*, *g*, *h*, *i* tangant rectas illas positione datas *AB*, *AD*, *BD*, *CE*, singuli singulas dicto ordine. Dein circa hoc trapezium describatur trajectoria curvæ lineæ *FGHI* consimilis.

Scholium.

Construi etiam potest hoc problema ut sequitur. Junctis *FG*, *GH*, *HI*, *FI* produc *GF* ad *V*, jungeque *FH*, *IG*, & angulis *FGH*, *VFH* fac angulos *CAK*, *DAL* æquales. Concurrant *AK*, *AL* cum recta *BD* in *K* & *L*, & inde agantur *KM*, *LN*, quarum *KM* constituat angulum *AKM* æqualem angulo *GHI*, sitque ad *AK* ut est *HI* ad *GH*; & *LN* constituat angulum *ALN* æqualem angulo *FHI*, sitque ad

AL

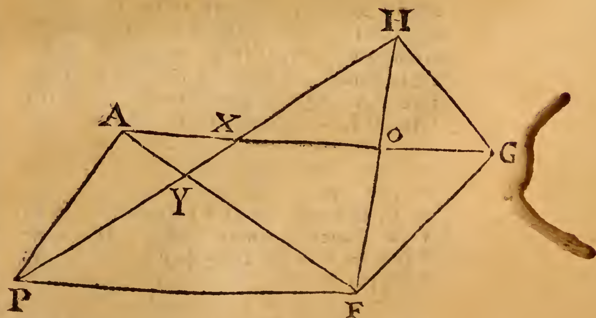
AL ut *HI* ad *FH*. Ducantur autem *AK*, *KM*, *AL*, *LN* ad eas partes linearum *AD*, *AK*, *AL*, ut literæ *CAKMC*, *ALKA*, *DALND*, eodem ordine cum literis *FGHIF* in orbem redeant; & acta *MN* occurrat rectæ *CE* in *i*. Fac angulum *iEP* æqualem angulo *IGF*, sitque *PE* ad *Ei* ut *FG* ad *GI*; & per *P* agatur *PQf*, quæ cum rectâ *ADE* contineat angulum *PQE* æqualem angulo *FIG*, rectæque *AB* occurrat



in *f*, & jungatur *fi*. Agantur autem *PE* & *PQ* ad eas partes linearum *CE*, *PE*, ut literarum *PEiP* & *PEQP* idem sit ordo circularis qui literarum *FGHIF*, & si super lineâ *fi* eodem quoque literarum ordine constituatur trapezium *fghi* trapezio *FGHI* simile, & circumscribatur trajectoria specie data, solvetur problema. (r)

(r) Hæc nova constructio hoc præmisso Lemmate Demonstratur.

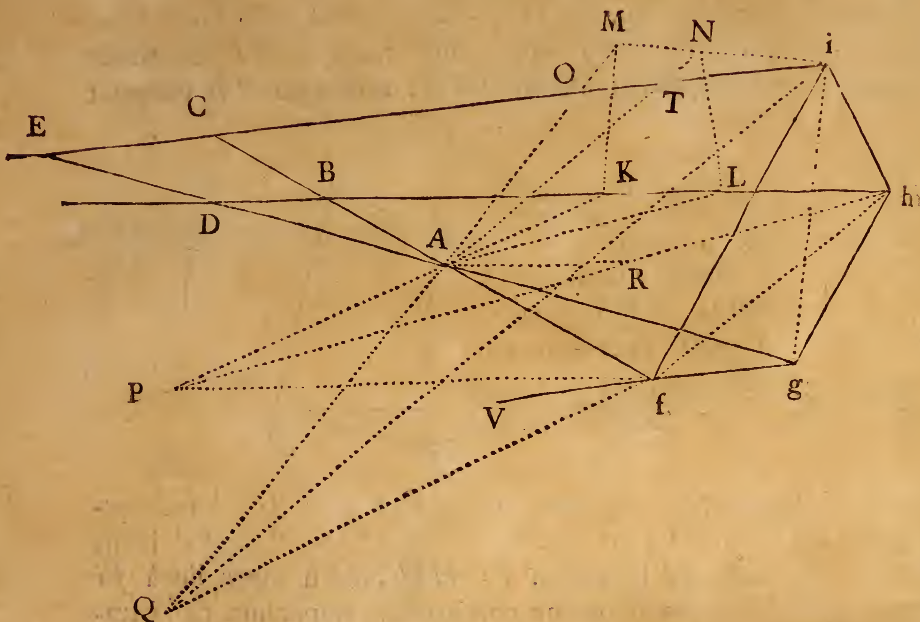
Lemma. Si ex puncto A extrà triangulum F G H dato, agatur ad angulum F recta AF, & ad angulum G recta A G, secans latus oppositum H F in O, & super rectam A F, construatur triangulum F A P, simile triangulo F G H, jungaturque P H secans A G in X, & A F in Y, similia erunt triangula P H F, A G F, & anguli H X G, H F G æquales; quoniam enim anguli A F P, HFG sunt æquales (per hyp.) æquales quoque erunt anguli P F H, A F G; & quoniam duo triangula P F A, H F G, similia sunt (per hyp.) erit P F : A F = H F : F G, adeóque triangula A F G, P F H, quorum latera proportionalia æqualem angulum continent sunt similia, & hinc anguli HPF, G A F æquantur; cumque anguli oppositi



P Y F, A Y X, sint etiam æquales, liquet angulum A X Y sive H X G, æqualem esse angulo A F P = H F G. Q. e. D.

Hactenus de orbibus inveniendis. Supereſt ut motus corporum in orbibus inventis determinemus.

S E C-



357. Hoc itaque, poſito, demonſtratur Newtoniana conſtructio. Trapezii f g h i, anguli quatuor tangant rectas C i, B h, A g, A f. Super rectâ A f, conſtruantur triangula f A P, f A Q, triangulis f g h, f g i, ſimilia; jungantur P h, Q i, & latera P A, Q A, producantur, ut rectis B h, C i, occurrant in K, & O; erunt anguli B A K, B A O, æquales angulis datis f g h, f g i; agantur A L, A T, rectis P h, Q i parallelæ, & producto latere g f, ad V, erit angulus D A L, æqualis angulo V f h; angulus enim D A L = D A B + B A K + K A L = f A g + P A f + h P A; ſed (per conſtr.) P A f = f g h, & f P A = f h g; cumque ſit triangulum f P h, ſimile triangulo f A g, (356), angulus f P h = f A g, adeóque h P A + f A g = h P A + f P h = f P A = f h g; quare D A L = f g h + f h g = V f h (per 32. 1. Elem.). Et ſimiliter oſtenditur angulum D A T, eſſe æqualem angulo V f i, ob triangula f A Q f Q i, triangulis f g i, f A g, ſimilia. Agantur rectæ K M, L N, quæ cum rectis A K, A L conſtituant angulos A K M, A L N angulis g h i, f h i æquales, rectiſque A O, A T productis occurrant in M & N, & triangula A K M, A L N ſimilia erunt triangulis g h i, f h i, (unde juxtà conſtructionem Newtoni erit K M : A K = h i : h g, & L N : A L = h i : h f). Etenim angulus M A K = P A Q = P A f − Q A f = f g h − f g i = i g h, (per conſtr.) quare cum ſit quoque (per conſtr.) angulus A K M = g h i, triangula A K M, g h i ſunt ſimilia, angulus verò N A L = D A L − D A T = V f h − V f i (per Dem.) ſed V f h − V f i = i f h, ergò triangula i f h, N A L ſimilia ſunt. Jungatur M N, demonſtrandum eſt hanc lineam productam tranſire per angulum i, quo trapezium tangit lineam E C i, ex puncto A, ad rectam P h, agatur A R

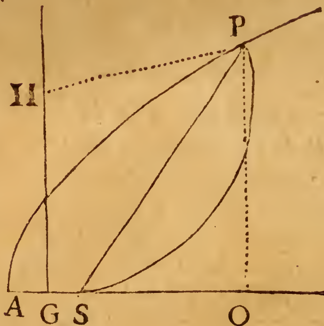
rectæ

SECTIO VI.

De inventione motuum in orbibus datis.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XXII.

Corporis in datâ trajectoriâ parabolicâ moti invenire locum ad tempus assignatum. (f)



(t) Sit *S* umbilicus & *A* vertex principalis parabolæ, sitque 4 *A S* × *M* æquale areæ parabolicæ abcindendæ *A P S*, quæ radio *S P*, vel post excessum corporis de vertice descripta fuit, vel ante appulsum ejus ad verticem des-

rectæ B h, parallela, ob similia triangula f g h, f A P erit ..... f g : h g = A f : P A
ob sim. tri. f g i, f A Q .... g i : f g = Q A : A f
ob sim. tri. g h i, A K M .... h g : g i = A K : A M
ob sim. tri. A K L, P A R .... A K : A L = P A : P R
ob sim. tri. f Q i, f P h, ... f h : f i = P h : Q i;
sed ob sim. tri. f h i, A L N,
f h : f i = A L : A N.
ergo A L : A N = P h : Q i
& A L : A N = P h − A L : Q i − A N
& quia A L = R h est A L : A N = P R : Q i − A N
undè per compositionem rationum & ex æquo, A K : A N = Q A × A K : A M × (Q i − A N)
quarè A K × A M : A N × A M = Q A × A K : A M × Q i − A N, ac proindè A M : A N = Q A : Q i − A N, adeóque A M : A N = Q M seu Q A + A M : Q i seu Q i − A N + A N. Quoniam igitur rectæ A N, Q i, sunt parallelæ (per constr.) patet puncta M, N, i, esse in unâ rectâ, atquè hæc est prima pars constructionis Newtonianæ quæ erat demonstranda.

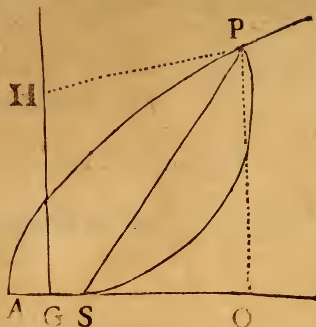
2°. illius pars facilè ostenditur. Nam (vid. fig. Newt.) junctâ P i, erit (per constr.) triangulum P i E, super rectâ E i constructum simile triangulo f i g, ad cujus angulos i & g, ductæ sunt ex puncto E, rectæ E i, E g; quarè (356), si per punctum P agatur recta P Q, quæ cum rectâ E g, contineat angulum P Q E æqualem angulo f i g, recta illa P Q, producta tanget angulum f, trianguli f i g, seu trapezii f g h i. Q. e. D.

(f) 338. Newtonus in hâc totâ sectione supponit corpus in trajectoriâ conicâ datâ ità moveri, ut radiis ad trajectoriæ umbilicum ductis areas seu sectores describat temporibus proportionales; eâ enim lege planetas omnes in orbitis conicis revolvi ex phenomenis lib. 3°. ostendit. Prætereà supponit notum esse tempus quo corpus ex puncto trajectoriæ dato v. g. ex vertice illius principali ad aliud ejusdem trajectoriæ punctum datum pervenit, datamque esse aream seu trajectoriæ sectorem huic tempori correspondentem, atque ex his datis quærit locum mobilis in trajectoriâ ad aliud quodvis tempus datum, aut contrà quærit tempus quo mobile datum quodvis trajectoriæ punctum attingit; nam cum sint areæ temporibus proportionales, dato tempore quovis, datur area hoc tempore descripta, & vicissim datâ areâ descriptâ datur tempus quo describitur.

(t) * Sit S umbilicus, & A, vertex principalis parabolæ, datumque sit tempus quo

 cor-

DE MOTU CORPORUM.



cribenda est. Innotescit quantitas areæ illius abscindendæ ex tempore ipsi proportionali. Biseca AS in G, erigeque perpendiculum GH æquale $3M$, & circulus centro H, intervallo HS descriptus secabit parabolam in loco quæsito P. Nam, demissâ ad axem perpendiculari PO & ductâ PH, (u) est $AGq+GHq$ $(=$(x)$HPq=\overline{AO-AG}:quad.+\overline{PO-GH}:quad.)=AOq+POq-2GAO-2GH\times PO+AGq+GHq$. (y) Unde $2GH\times PO\ (=AOq+POq-2GAO)=AOq+\frac{3}{4}POq$. Pro AOq scribe $AO\times\frac{POq}{4AS}$; & applicatis terminis omnibus ad $3PO$ ductisque in $2AS$, fiet $\frac{4}{3}GH\times AS\ (=\frac{1}{6}AO\times PO+\frac{1}{2}AS\times PO=\frac{AO+3AS}{6}\times PO=\frac{4AO-3SO}{6}\times PO=$ areæ $\overline{APO-SPO})$ $=$areæ APS. Sed GH erat $3M$, & inde $\frac{4}{3}GH\times AS$ est $4AS\times M$. Ergo area abcissa APS æqualis est abscindendæ $4AS\times M$. *Q. E. D.*

Co-

corpus in parabolâ motum, ut modò exposuimus (358.) ex vertice A ad punctum P, aut ex puncto P ad verticem A pervenit, seu datum sit tempus quo sector quilibet APS describitur.

(u) * Est $AG^2+GH^2=HP^2$; nam $AG=GS$, $HP=HS=HA$, & angulus G rectus (per constr.) quare $HA^2=HP^2=AG^2+GH^2$.

(x) * $HP^2=\overline{AO-AG}^2+\overline{PO-GH}^2$. Nam ex puncto H, ad rectam PO demissa intelligatur perpendicularis, hæc erit æqualis ipsi $GO=AO-AG$, & pars rectæ PO inter perpendicularem & punctum P intercepta æqualis erit $PO-GH$.

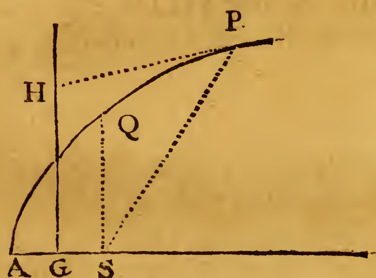
(y) * Undè sublatis utrinque quadratis AG^2+GH^2, & addito utrinque rectangulo $2GH\times PO$, est $2GH\times PO=AO^2+PO^2-2GAO$; quoniam autem in parabolâ latus rectum $=4AS=8AG$, est $8AG\times AO$ sive $8GAO=PO^2$, & $2GAO=\frac{1}{4}PO^2$, & $PO^2-2GAO=\frac{3}{4}PO^2$. Cum verò sit $4AS\times AO=PO^2$, adeóque $4AS\times AO^2=AO\times PO^2$, & $AO^2=\frac{AO\times PO^2}{4AS}$, erit igitur $2GH\times PO=\frac{AO\times PO^2}{4AS}+\frac{3}{4}PO^2$, & dividendo utrinque per $3PO$, fiet $\frac{2}{3}GH=\frac{AO\times PO}{12AS}+\frac{1}{4}PO$, ductisque omnibus terminis in $2AS$, fiet $\frac{4}{3}GH\times AS=\frac{1}{6}AO\times PO+\frac{1}{2}AS\times PO=\frac{AO+3AS}{6}\times PO=\frac{\overline{4AO-3SO}}{6}\times PO$

ob-

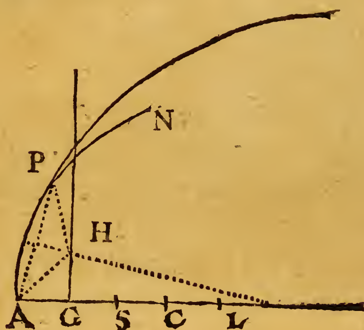
Corol. 1. Hinc *GH* est ad *AS*, ut tempus quo corpus descripsit arcum *AP* ad tempus quo corpus descripsit arcum inter verticem *A* & (a) perpendiculum ad axem ab umbilico *S* erectum.

Corol. 2. (b) Et circulo *ASP* per corpus motum *P* perpetuo transeunte, velocitas puncti *H* est ad velocitatem quam corpus

ob A S = A O − S O unde est 3 A S = 3 A O − 3 S O. Verùm $\frac{4AO \times PO}{6}$ seu $\frac{2}{3}$ AO × PO, est area parabolica APOA, (Archimed. prop. 17. quadr. Parab. sup. Theor. IV. de Parab. pag. 133.) & $\frac{3SO \times PO}{6}$ seu $\frac{1}{2}$ SO × PO, est area trianguli PSO, ergò area sectoris Parabolici APS, æqualis est $\frac{4AO - 3SO}{6}$ × PO, quarè $\frac{4}{3}$ GH × AS = areæ APS; *sed GH* = 3 *M*, (*per constr.*) &c.



(a) * Sit perpendiculum illud SQ, erit area ASP, ad aream ASQ, ut $\frac{4}{3}$ GH × AS, ad $\frac{2}{3}$ AS × SQ (Theor. IV. de Par. p. 133.); sed ex naturâ Parabolæ (Vid. Cor. 2. Theor. I. de Par. p. 131.) SQ æqualis dimidio lateri recto = 2 AS, ergò area ASP est ad aream ASQ, seu tempus per AP ad tempus per AQ, ut $\frac{4}{3}$ GH × AS ad $\frac{4}{3}$ AS², hoc est, ut GH ad AS. Dato igitur tempore quo describitur arcus AQ, & tempore quo describitur AP, per simplicem proportionem invenitur HG, & indè punctum P habetur.



(b) * Jungatur AP, & ad medium ejus punctum q, erigatur perpendiculum qL, axem secans in L, & quoniam (ex Dem.) est semper HP = HA, ideoque est AP chorda circuli cujus centrum est H. Itaque (per 1. 3ⁱ. Elem.) perpendiculum illud qL, rectæ GH, occurrit in H; & ob similitudinem triangulorum LGH, LqA, est GH : qA seu $\frac{1}{2}$ AP = LG : Lq. Sumatur AC = 2 AS dimidio nempè lateris recti parabolæ & centro C, & intervallo CA, describatur circulus AN, hic parabolam osculatur in A (241); coeuntibus verò punctis P & A, H & G, coeunt etiam L & C, fitque Lq = LA = CA = 2 AS = 4 GS, & LG = CG = 3 GS, atque arcus AP æqualis chordæ AP, (Lem. VII.); undè cum in proportione superiori sit GH : $\frac{1}{2}$ AP = LG : Lq erit in hoc casu GH : $\frac{1}{2}$AP = 3GS : 4GS

 hoc

pus habuit in vertice *A* ut 3 ad 8; ideoque in eâ etiam ratione est linea *GH* ad lineam rectam quam corpus tempore motus sui ab *A* ad *P*, eâ cum velocitate quam habuit in vertice *A*, describere posset.

Corol. 3. Hinc etiam vice versâ inveniri potest tempus quo corpus descripsit arcum quemvis assignatum *AP*. Junge *AP* & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ *GH* occurrens in *H*.

LEMMA XXVIII.

Nulla extat figura ovalis cujus area, rectis pro lubitu abscissa, possit per æquationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri.

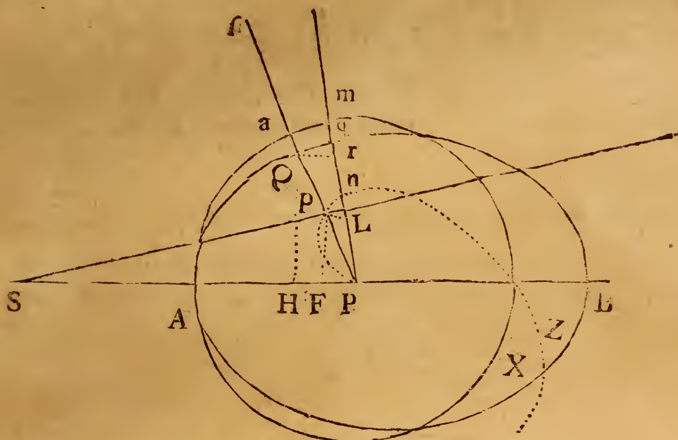
(c) Intra ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, uniformi cum motu, & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergat-

hoc est, GH : AP = 3 : 8. Verùm ob motum æquabilem & æquidiuturnum per nascentes AP, GH, velocitas puncti H in G, est ad velocitatem corporis P in A ut GH ad AP, & quoniam (ex Dem.) est semper $\frac{4}{3}$ AS×GH æqualis areæ APS, & $\frac{4}{3}$ AS, est quantitas constans, erit semper GH, ut area APS, hoc est, ut tempus quo punctum H, percurrit GH, estque proindè motus illius æquabilis & velocitas ubique eadem. Quarè velocitas puncti H, est ubique ad velocitatem quam habet corpus P in A, ut nascens GH, ad nascentem AP, hoc est, ut 3. ad 8. Q. e. D.

(c) 359. Intrà ovalem ACBA detur punctum quodvis P, circà quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta infinita PS, uniformi cum motu, ità ut punctum datum A illius lineæ circuli AamX arcus æquales æqualibus temporibus describat, & intereà in rectâ illâ PS, exeat punctum mobile p de polo P, pergatque semper in eâdem rectâ Pf cum velocitate quæ sit ut rectæ illius intrà ovalem quadratum, hoc est, cum linea PS pervenit ad situm Pf, & punctum mobile p ad p, velocitas puncti p sit ut quadratum rectæ PQ inter polum P & ovalem AQCB contentæ, hoc motu punctum illud p, describet spiralem PpnZ, gyris infinitis.

360.

gatque ſemper eâ cum velocitate, quæ ſit ut rectæ illius intra ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud deſcribet ſpiralem gyris infinitis. Jam ſi areæ ovalis à rectâ illâ abſciſſæ portio per finitam æquationem inveniri poteſt, invenietur etiam per eandem æquationem diſtantia puncti à polo, (d) quæ huic areæ proportionalis eſt, ideoque omnia ſpiralis puncta per æquationem fini-

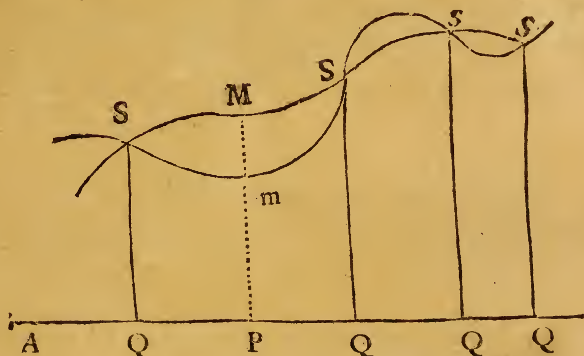


(d) 360. His ſuppoſitis erit ſemper recta P p ut area P A Q P; nam circulus A a m X diviſus intelligatur in arcus innumeros æquales ut a m, & ductis radiis P Q, P q ſpirali, circulo & ovali occurrentibus in p & n, a & m, Q & q, demiſſa capiantur ex punctis Q & p, ad P q, perpendicula Q r, p L, & eodem tempore quo punctum a, percurret arcum a m, punctum p percurret rectam L n; quâpropter naſcente arcu a m, erit L n ut velocitas puncti p in rectâ P f, hoc eſt, (per Hyp.) ut quadratum rectæ P Q; porro ob triangula ſimilia P a m, P Q r eſt $Pa : PQ = am : Qr = \frac{PQ \times am}{Pa}$, ac proindè ſectoris naſcentis P Q q area $\frac{1}{2}$ $Qr \times PQ = \frac{PQ^2 \times am}{2\,Pa}$. Cum igitur a m & 2 P a, ſint quantitates conſtantes (ex hyp.) erit ſector P Q q, naſcens ſeu fluxio areæ P A Q ut PQ^2, atque ideò ut naſcens L n, ſeu ut fluxio rectæ P p, & hinc tota area fluens P A Q, erit ut tota recta fluens P p, (coroll. Lem. IV.) Q. e. D.

361. Puncta p & Q referantur ad rectam A B, poſitione datam demiſſis ad A B perpendicularibus Q H, p F ſitque area P A Q, æqualis quantitati finitæ *E* ex lineis variabilibus P H, Q H & aliis conſtantibus quomodolibet compoſitæ, & quoniam linea P p areæ P A Q ſeu quantitati finitæ *E* proportionalis eſt (360) linea illa exprimi poterit per factum ex quantitate *E* in quantitatem conſtantem *B*, eritque $Pp\,E = \times B$ æquatio finita. Verùm ob ſimilia triangula P F p, P H Q & angulum ad H rectum, $Pp : pF = PQ$, ſeu $\sqrt{PH^2 + QH^2} : QH$, & $Pp : PF = PQ$ ſeu $\sqrt{PH^2 + QH^2} : PH$, & præte-reà

finitam inveniri possunt: & propterea rectæ cujusvis positione datæ intersectio cum spirali inveniri etiam potest per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinite producta spiralem secat in punctis, numero infinitis, & (e) æquatio, quâ intersectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum intersectiones omnes radicibus totidem, ideoque ascendit ad tot dimensiones

reà ex naturâ ovalis AQCB, datur alia æquatio inter PH & QH, inveniuntur ergò quatuor æquationes finitæ quæ simul quinque tantum variabiles, nimirum Pp, PF, pF, PH, QH continent, quæque proindè ad unicam æquationem finitam poterunt reduci in quâ duæ tantum variabiles PF, pF reperientur, adeóque per hanc æquationem finitam omnia spiralis puncta inveniri poterunt, & propterea rectæ cujusvis Sp positione datæ intersectio p cum spirali inveniri etiam poterit per æquationem finitam; cum enim duæ rectæ Sp, SB positione datæ sint, linea SP magnitudine & triangulum SPF specie dantur, & hinc datur ratio lineæ SF seu SP ∓ PF ad Fp, & nova invenitur æquatio inter PF & Fp; per hanc igitur æquationem & per alteram quæ ad spiralem est, determinabuntur PF, & Fp, punctumque intersectionis p invenietur per æquationem finitam.



(e) 362. Lineæ duæ SMS, Sms se mutuò intersecantes in punctis S, s ad eandem rectam AQ positione datam referantur, sintque AQ, AP abscissæ communes, & QS, PM, Pm ad eas ordinatæ; quoniam in communibus linearum SMs, Sms, intersectionibus S, S, ordinatæ PM, Pm sunt æquales, si in duabus ad lineas SMs, Sms æquationibus, manente abscissâ communi, loco ordinatarum PM, Pm, eadem scribatur littera, v. gr. y, & deindè ex illis æquationibus eliminetur littera quæ abcissam communem exprimit, obtinebitur æquatio ex solâ y, & constantibus composita. Porrò hæc ultima æquatio non magis primam ordinatam communem SQ, seu primam intersectionem S, quam secundam aut tertiam &c. determinabit, cum sit eadem omnium lex & conditio idemque calculus; hæc igitur æquatio debet omnes communes ordinatas QS, omnesque intersectiones S, simul complecti & indifferenter exhibere, & itâ tot radices seu ipsius y valores reddere quot sunt communes ordinatæ seu intersectiones, æquatio autem tot dimensiones habet quot radices; Si itaque linearum SMs, Sms, intersectiones S, s, sunt numero finitæ, æquatio quoque quæ illas determinat finita est; at si fuerint intersectiones numero infinitæ, erit æquatio numero dimensionum & radicum infinita. * Exem-

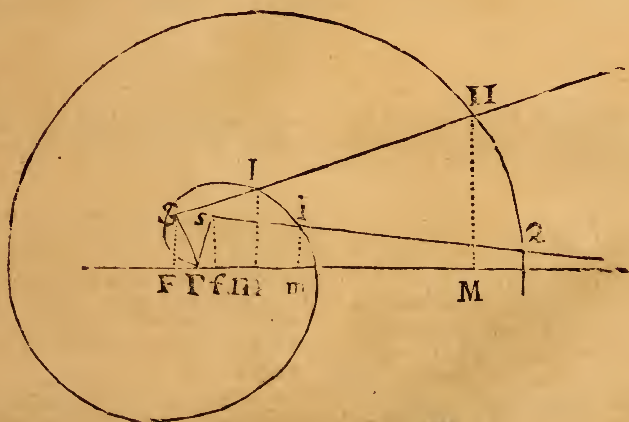
ſiones quot ſunt interſectiones. Quoniam circuli duo ſe mutuo ſecant in punctis duobus, interſectio una non invenietur niſi per æquationem duarum dimenſionum, quâ interſectio altera etiam inveniatur. (f) Quoniam duarum ſectionum conicarum quatuor eſſe poſſunt interſectiones, non poteſt aliqua earum generaliter inveniri niſi per æquationem quatuor dimenſionum, quâ omnes ſimul inveniantur. Nam ſi interſectiones illæ ſeorſim quærantur, quoniam eadem eſt omnium lex & conditio, idem erit calculus in caſu unoquoque, & propterea eadem ſemper concluſio, quæ igitur debet omnes interſectiones ſimul complecti & indifferenter exhibere. Unde etiam interſectiones ſectionum conicarum & curvarum tertiæ poteſtatis, eo quod ſex eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes ſex dimenſionum, & interſectiones duarum curvarum tertiæ poteſtatis; quia novem eſſe poſſunt, ſimul prodeunt per æquationes dimenſionum novem. (g) Id niſi neceſſario fieret, reducere liceret, problemata omnia ſolida ad plana, & pluſquam ſolida, ad ſolida. (h) Loquor hic de

(f) * Exempli causâ. Sint $ap + px = yy$, & $bx - xx = yy$, æquationes ad parabolam & circulum, & invenietur $x = \frac{yy - ap}{p}$, & $\frac{byy - bap}{p} - \frac{y^4 + 2apyy - aapp}{p^2} = yy$, æquatio quatuor dimenſionum, quoniam quatuor eſſe poſſunt parabolæ & circuli interſectiones. Sint $ap^2 + p^2x = y^3$, & $bx - xx = y^2$ æquationes ad parabolam 3æ. poteſtatis & ad circulum, erit $x = \frac{y^3 - ap^2}{p^2}$ & $\frac{by^3 - bap^2}{p^2} - \frac{y^6 + 2ap^2y^3 - a^2p^4}{p^2} = yy$ æquatio ſex dimenſionum quod eſſe poſſint interſectiones ſex; & ità de cæteris. Generatim verò tot eſſe poſſunt curvarum duarum interſectiones quot ſunt unitates in facto ex poteſtatis curvæ unius indice ſeu exponente in alterius exponentem; index autem poteſtatis curvæ idem eſt cum numero dimenſionum æquationis ad illam curvam.

(g) * Nam in ſolidorum problematum conſtructione duæ adhibentur ſectiones conicæ quarum interſectiones, ſeu ordinatæ duabus coni ſectionibus communes, problematis ſolutionem ſeu ultimæ æquationis radices ſuppeditant. Quarè ſi hujuſmodi interſectiones vel ordinatæ communes generaliter poſſent per æquationem quadraticam inveniri, problemata ſolida per æquationes duarum dimenſionum ſolvi ac conſtrui poſſent, atque ità ad plana reducerentur, eâdemque ratione plus quam ſolida ad ſolida, indeque ad plana revocarentur.

(h) Nonnunquam propoſita ad curvam æquatio ad inferiorem poteſtatem aut in duas æquationes inferioris poteſtatis reſolvi poteſt. Sic æquatio $ax^3 - a^2x^2 - bx^2y + axy^2 + abxy - by^3 = o$ reſolvi poteſt in duas $xx - ax + yy = o$, & $ax = by = o$ quarum prior eſt ad circulum, poſterior ad parabolam. Parabolæ autem & circuli cum lineâ quâvis interſectiones per calculos diverſos ſeorſim inveniri poſſunt.

de curvis poteſtate irreducibilibus. Nam ſi æquatio, per quam curva definitur, ad inferiorem poteſtatem reduci poſſit: curva non erit unica, ſed ex duabus vel pluribus compoſita, quarum interſectiones per calculos diverſos ſeorſim inveniri poſſunt. Ad eundem modum interſectiones binæ rectarum & ſectionum conicarum prodeunt ſemper per æquationes duarum dimenſionum, ternæ rectarum & curvarum irreducibilium tertiæ poteſtatis per æquationes trium, quaternæ rectarum & curvarum irreducibilium quartæ poteſtatis per æquationes dimenſionum quatuor, & ſic in infinitum. Ergo rectæ & ſpiralis interſectiones numero infinitæ, cum curvâ hæc ſit ſimplex & in curvas plures irreducibilis, requirunt æquationes numero dimenſionum & radicum infinitas, quibus interſectiones omnes poſſunt ſimul exhiberi. Eſt enim eadem omnium lex & idem calculus. (i) Nam ſi à polo in rectam illam ſecantem demittatur perpendiculum, & perpendi-



(i) * Sit polus P, ſecans SI, II, ad eam ex polo normalis Ps, interſectio prima in i, ſecunda in II, &c. circà polum P, revolvatur perpendiculum Ps, unà cum ſecante SI, II ad illud ſemper normali, ubi perpendiculum pervenit ad ſitum Ps, & ſecans SI, II ad ſitum si2, interſectio prima I, percurſo arcu Ii, pervenit ad i, & poſt integram revolutionem cum si2, redit ad ſitum SI, II, prima interſectio I, ſeu i, pervenit ad II, & fit ſecunda, & poſt duas revolutiones fit tertia & ſic deinceps. Ex punctis S, s, ad rectam PM infinitam & poſitione datam demittantur perpendicula SF, sf, manente ſecantis SI, II, poſitione,

diculum illud unà cum ſecante revolvatur circa polum, interſectiones ſpiralis tranſibunt in ſe mutuo, quæque prima erat ſeu proxima, poſt unam revolutionem ſecunda erit, poſt duas tertia, & ſic deinceps: nec interea mutabitur æquatio niſi pro mutatâ magnitudine quantitatum per quas poſitio ſecantis determinatur. Unde cum quantitates illæ poſt ſingulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, ideoque una eademque exhibebit interſectiones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi poſſunt. Nequit ergo interſectio rectæ & ſpiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat ovalis cujus area, rectis imperatis abciſſa, poſſit per talem æquationem generaliter exhiberi.

(k) Eodem argumento, ſi intervallum poli & puncti, quo ſpiralis deſcribitur, capiatur Ovalis perimetro abſciſſæ proportionale, probari poteſt quod longitudo perimetri nequit per finitam æqua-

tione, conſtantes ſunt rectæ S F, F P, S P, quibus illa poſitio determinatur, & demiſſâ ex I ad P M perpendiculari I m datur æquatio aliqua inter P m vel I m & datas S P, F P, S F, quâ interſectio I exhibetur; ubi verò ſecans S I I I, pervenit ad ſitum s i 2, manente ſecantis s i 2 poſitione, datur æquatio inter i m vel P m & datas s P, ſeu S P, P f, s f, & æquatio hæc à priori diverſa non eſt, niſi ratione quantitatum F P F S, quæ mutatæ ſunt in f P, f s, per quas ſecantis s i 2, poſitio determinatur, cum utraque æquatio in ſitu S I I I, & ſitu s i 2, ab æquatione ad ſpiralem quæ eadem ſemper manet & ab æquatione ſecantis poſitionem determinante diducantur. Quoniam igitur lineæ f s, f P poſt primam revolutionem ac proindè poſt ſingulas redeunt ad magnitudines primas F S, F P interſectione primâ in ſecundam tranſeunte, ſecundâ in tertiam, & ſic deinceps, æquatio inter I I M, vel P M, & datas P F, P S, S F, redibit ad formam primam quam habebat æquatio inter I m, vel P m, & eaſdem datas quantitates P F, P S, S F, adeóque una eademque æquatio exhibebit interſectiones omnes I, I I, &c., ſeu valores I m, I I M, &c., propterea radices exhibebit numero infinitas quibus omnes exhiberi poſſunt.

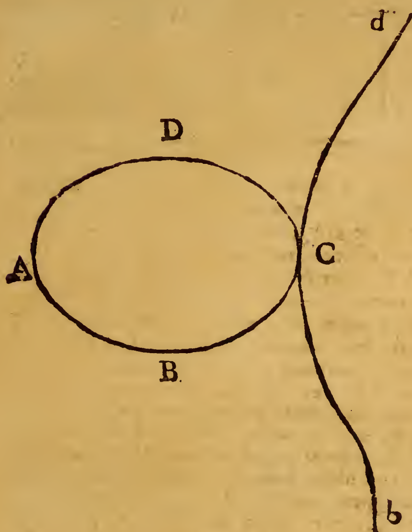
(k) * Eâ enim ratione ſpiralis deſcribetur gyris infinitis ad quam proindè æquatio erit numero dimenſionum infinita, quæ quidem finita deberet eſſe, ſi longitudo perimetri ovalis pro lubitu abſciſſa ſeu intervallum puncti ſpiralem deſcribentis & poli, per finitam æquationem generaliter exhiberi poſſet.

 * Ova-

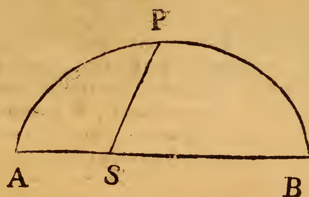
æquationem generaliter exhiberi. (l) De ovalibus autem hic loquor quæ non tanguntur à figuris conjugatis in infinitum pergentibus.

Corollarium.

(m) Hinc area ellipſeos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto deſcribitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; & propterea per deſcriptionem curvarum geometricè rationalium determinari nequit. Curvas geometricè rationales appello quarum puncta omnia per longitudines æquatio-



(l) * Ovalem ABCD tangat in C curva conjugata bCd, cujus rami Cb, Cd in infinitum pergant, pro hujuſmodi ovalibus non valet Newtoni demonſtratio. Supponit enim circà punctum datum intra ovali perpetuò revolvi lineam rectam uniformi cum motu quæ ſit ad peripheriam ovalis terminata, & abſcindat areas ſibi proportionales; ſi autem ovalis tangatur à figurâ conjugatâ bCd, cujus rami in infinitum pergunt, evidens eſt lineâ rectâ intrà ovalem revolvente non percurri totam novæ hujus figuræ aream, nec gyris perpetuis ac infinitis ſimplicem ſpiralem deſcribi.



(m) 363. Sit Ellipſeos APB, axis AB, umbilicus S, radius vector SP, dataque ſint totius Ellipſis area & tempus periodicum, ſitque tempus periodicum ad tempus per arcum AP, ità area *totius* ellipſeos ad aream ſectoris APS, *obtinebitur* æquatio inter aream APS, & tempus quo illa deſcribitur. Undè ſi poſteà inveniri poſſet æquatio finita inter aream indefinitam APS & radium vectorem SP ac datas quantitates, inveniretur quoque æquatio finita inter tempus per arcum quemvis AP, & radium vectorem SP, qui ità ex dato tempore per æquationem finitam prodiret; Et viceverſâ, ſi ex tempore quo arcus AP deſcribitur, radii vectoris SP longitudo per æquationem finitam poſſet determinari, ope hujus æquationis & ſuperioris proportionis inter tempora & areas obtineretur æquatio finita inter aream quamlibet ASP & radium vectorem SP ac datas quantitates, quod impoſſibile eſſe demonſtratum eſt; & propterea longitu-

tionibus definitas, id eſt, per longitudinum rationes complicatas, determinari poſſunt; cæteraſque (ut ſpirales, quadratrices, trochoides) geometricè irrationales. Nam longitudines quæ ſunt vel non ſunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo elementorum) ſunt arithmeticè rationales vel irrationales. Aream igitur ellipſeos tempori proportionalem abſcindo per curvam geometricè irrationalem ut ſequitur.

PRO-

tudo (ac proindè poſitio quæ ex longitudine data eſt) radii vectoris SP, per deſcriptionem curvarum geometricè rationalium determinari nequit. Sunt autem curvæ geometricè rationales in quibus ordinatarum & abſciſſarum rectarum relatio æquatione finitâ exprimi poteſt; quarumque proindè puncta omnia per harum rectarum linearum rationes complicatas determinari poſſunt. Si in æquatione ad curvam $ax^m + by^n + \&c. = 0$ numerus terminorum finitus ſit & exponentes m, n, rationales fuerint, curva erit geometricè rationalis: contrà ſi numerus terminorum infinitus fuerit, & ſummari nequeant, aut ſi exponens aliquis irrationalis fuerit, curva eſt geometricè irrationalis.

364. Circuli (adeóque & Ellipſis) quadraturam ſeu rectificationem indefinitam finitâ æquatione exhiberi non poſſe demonſtravit Saurinus in Commentariis Pariſienſibus an. 1720. illius demonſtrationem ut potè facilem & brevem referemus. Sit quadrans circuli CAB, & ex puncto quovis N arcûs AB demittatur ad radium AC perpendicularis NP, demonſtrandum eſt arcus AN, & rectarum AP, PN relationem nullâ æquatione finitâ poſſe exprimi. Deſcripta intelligatur curva AOMD cujus hæc ſit natura ut recta MP ex puncto quovis M ad radium AC perpendiculariter demiſſa, ſit æqualis arcui abſciſſo AN; ope curvæ AMD arcus AN in ratione quâvis datâ rectæ PG ad PM dividi poteſt in R; nam ſi per punctum G agatur recta Go, ipſi PM normalis & curvæ AMD occurrens in o, atque ex puncto o, ducatur ad AC perpendicularis oQ arcum AN ſecans in R, erit AR = Qo, adeóque AR : AN = PG : PM. Verùm demonſtravit Clariſſ. Hoſpitalius art. 443. lib. 10. Sectionum Conicarum,

quod ſi arcus AN ſit in partes æquales dividendus quarum una ſit AR, æquatio quâ determinatur partis unius Chorda AR, tot dimenſiones obtinet quot ſunt in arcu AN, partes æquales, atque adeò ſi dividendus ſit arcus AN in ratione indefinitâ rectæ PG ad PM, æquatio illa finita eſſe nequit. Ergò curva AMD, quâ arcus quilibet AN in ratione quâvis PG ad PM per eandem ſemper conſtructionem dividitur geometricè, rationalis non eſt; ſed ſi arcus AN & rectarum AP, PN relatio poſſet æquatione finitâ exprimi, eadem æquatio exhiberet quoque relationem abſciſſæ AP ad ordinatam PM, ac proindè curva AMD eſſet geometricè rationalis. Ergò rectificatio arcûs AN, æquatione finitâ generaliter exhiberi non poteſt. Q. E. D.

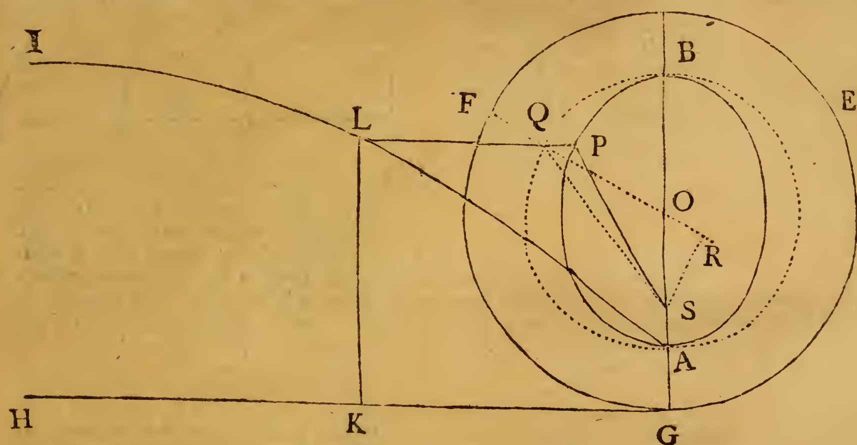
365. Hinc patet curvas omnes quarum deſcriptio pendet à quadraturâ vel rectificatione circuli & ovalium indefinitâ quales ſunt ſpirales, quadratrices, trochoïdes eſſe geometricè irrationales. Ex demonſtratis autem minimè ſequitur circuli & ovalium quadraturam vel rectificationem determinatam ſeu quadraturam vel rectificationem totius ovalis aut portionis illius determinatæ impoſſibilem eſſe.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XXIII.

Corporis in datâ trajectoriâ ellipticâ moti invenire locum ad tempus assignatum.

Ellipseos *APB* sit *A* vertex principalis, *S* umbilicus, & *O* centrum, sitque *P* corporis locus inveniendus. Produc *OA* ad *G*, ut sit *OG* ad *OA* ut *OA* ad *OS*. Erige perpendiculum *GH*, centroque *O* & intervallo *OG* describe circulum *GEF*, & super regula *GH*, ceu fundo, progrediatur rota *GEF* revolvendo circa axem suum, & interea puncto suo *A*



describendo trochoidem *ALI*. Quo facto, cape *GK* in ratione ad rotæ perimetrum *GEFG*, ut est tempus, quo corpus progrediendo ab *A* descripsit arcum *AP*, ad tempus revolutionis unius in ellipsi. Erigatur perpendiculum *KL* occurrens trochoidi in *L*, & acta *LP* ipsi *KG* parallela occurret ellipsi in corporis loco quæsito *P*.

Nam centro *O*, intervallo *OA* describatur semicirculus *AQB*, & arcui *AQ* occurrat *LP* si opus est producta in *Q*, junganturque *SQ*, *OQ*. Arcui *EFG* occurrat *OQ* in *F*, & in ean-

eandem *OQ* demittatur perpendiculum *SR*. (n) Area *APS*, eſt ut area *AQS*, id eſt, ut differentia inter ſectorem *OQA* & triangulum *OQS*, ſive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2}$ *OQ* $\times$ *AQ* & $\frac{1}{2}$ *OQ* $\times$ *SR*, hoc eſt, ob datam $\frac{1}{2}$ *OQ*, ut differentia inter arcum *AQ* & rectam *SR*, ideoque (cum (p) eædem ſint datæ rationes *SR* ad ſinum arcus *AQ*, *OS* ad *OA*, *OA* ad *OG*, *AQ* ad *GF*, & diviſim (q) *AQ* $-$ *SR* ad *GF* $-$ ſinu arcus *AQ*) ut *GK* differentia inter arcum *GF* & ſinum arcus *AQ*. *Q. E. D.*

(n) 366. *Area APS eſt ut area AQS* (251) ſed area AQS æqualis eſt *differentiæ inter ſectorem OQA & triangulum OQS*, ſector verò OQA $= \frac{1}{2}$ OQ $\times$ AQ, & triangulum OQS $= \frac{1}{2}$ OQ $\times$ SR. Ergò ob datam $\frac{1}{2}$ OQ, area AQS adeóque & area APS eſt ut differentia inter arcum AQ & rectam SR ex foco S in radium QO perpendiculariter demiſſam.

(p) 367. Si ex puncto Q ad diametrum AB, demittatur perpendiculum ſeu ſinus arcûs AQ, triangulum OSR, ſimile erit triangulo contento ſub radio OQ ſinu & coſinu arcûs AQ; unde erit SR ad ſinum arcûs AQ, in datâ ratione OS ad OQ ſeu OA; ſed (per conſtr.) OS : OA $=$ OA : OG, & OA ad OG ut arcus AQ ad arcum GF, & diviſim AQ $-$ SR eſt ad GF $-$ ſinu arcûs AQ ut SR ad ſinum arcûs AQ, ſive in datâ ratione OS ad OA. Eſt igitur differentia inter arcum AQ, & rectam SR, adeóque & area APS, ut differentia inter GF, & ſinum arcûs AQ.

(q) Quod autem ſit GK æqualis differentiæ inter arcum GF & ſinum arcûs AQ facile eſt demonſtrare. Sit enim ALI dimidia trochois ſemirevolutione rotæ GFE deſcripta, erit GH, æqualis ſemiperipheriæ GFE, & HI æqualis & parallela rectæ GB; Per puncta A, O, L agantur rectæ AD, OC, XT parallelæ & æquales rectæ GH, & trochois deſcripta intelligatur duplici motu circuli AVBQ, al-

De Motu Corporum.

altero quidem quo centrum O cum plano circuli uniformiter feratur per rectam O C, altero quo eodem tempore punctum A in circuli periferiâ uniformiter percurrat semiperiferiam AVB, & centrum O, circuli mobilis A V B sit in P quando punctum A pervenit in L & jam percurrit arcum ML; Quoniam in motu æquabili spatia eodem tempore percursa sunt in datâ ratione, erit recta O C (hoc est semicircumferentia rotæ G F E) quam centrum O percurrit, ad semiperiferiam A V B, quam eodem tempore percurrit punctum A, ut O P ad arcum M L, sed semiperiferia G F E est quoque ad semiperiferiam AVB, ut arcus G F ad arcum A Q seu æqualem M L; est igitur G F = O P = Y X, ac proindè Y X − Q X = Y X − Y L = L X = G K = G F − Q X est vero Q X sinus arcus A Q, ergo est G K æqualis differentiæ inter G F & sinum arcus A Q. Q. e. D.

Itaque area A P S, est ut G K, adeóque area A P S, est ad aream semiellipsis A P B (vid fig. Newt.) ut G K ad G H, & area A P S, est ad aream totius ellipseos ut G K ad 2 G H, seu tempus per arcum A P, est ad tempus unius revolutionis in Ellipsi ut G K ad perimetrum rotæ. Si ergò capiatur G K ad rotæ perimetrum ut est tempus per A P, ad tempus periodicum & cætera fiant ut in Newtonianâ constructione, erit P locus corporis in Ellipsi. Ex demonstratis quædam deducuntur corollaria.

368. Cor. 1. Planeta revolvatur in Ellipsi A P B vi tendente ad umbilicum S quem sol occupat, sitque linea apsidum, seu axis major A B, centrum O, ac proindè excentricitas seu distantia centri O à sole S, S O; B aphelion seu punctum in orbitâ à sole remotissimum, A perihelion sive punctum soli proximum, locus planetæ in P; centro O radio O B describatur circulus B Q A qui dicitur circulus excentricus, & per P agatur recta Q R axi A B normalis & circulo occurrens in Q, junganturque S P (quæ dicitur intervallum) & S Q. Ex demonstratis (251) manifestum est aream S Q B esse ad aream totius circuli ut est area S P B ad aream totius ellipseos. Quarè si area circuli BQA rectâ S Q ex foco S ductâ in datâ ratio-

ne diviſa fuerit, demiſſo ex puncto Q, perpendiculo Q R ellipſi occurrente in P, & junctâ S P, erit etiam area ellipſeos in eâdem datâ ratione diviſa. Ut itaque rectâ ex umbilico S ductâ abſcindatur ellipſeos area data, ſeu quæ ſit ad aream totius Ellipſeos in ratione datâ, ſufficit rectam S Q, in circulo ducere quæ aream circuli in illâ datâ ratione ſecet.

369. Cor. 2. In radium Q O ſi opus fuerit productum, ex umbilico S demittatur perpendiculum S F, & erit, (ex Dem.) area S Q B ut arcus B Q + recta S F ſi motus fiat ab aphelio B ad perihelium A per arcum B Q A, ſed ſi planeta à perihelio A ad aphelion B feratur per A p B, erit area A S q, ut arcus A q − recta S f; hinc ſi capiatur arcus B N, vel A n, proportionalis tempori quo planeta percurrit arcum B P, vel A p, erit B Q + S F = B N, vel A q − S f = A n, adeóque S F = Q N, vel S f = q n. Et ſi datus fuerit arcus B Q vel A q, & priori addatur arcus N Q vel poſteriori dematur arcus n q æqualis rectæ S F vel S f, erit arcus B N proportionalis tempori quo planeta fertur per arcum B P, arcus A n proportionalis tempori per arcum A p, & arcus B A n proportionalis tempori per arcum B P A p.

370. Arcus B Q dicitur anomalia excentri, angulus B S P ſub quo diſtantia planetæ ab aphelio B P ex ſole videtur anomalia vera vel coæquata ſeu angulus ad Solem dicitur; tempus verò quo planeta ab aphelio B ad orbitæ ſuæ punctum quodlibet P digreditur, anomalia media ſive ſimplex appellatur. Unde ſi tempus periodicum totâ circuli peripheriâ ſeu 360. gradibus exprimatur, erit arcus B N anomaliæ mediæ æqualis, ſeu anomaliam mediam exhibebit; cum ſit B N ad totam periferiam ut tempus per B P ad tempus periodicum (369). Differentia inter anomaliam mediam & veram ſeu differentia inter angulum N O B & angulum P S B æquatio centri ſeu proſtaphæreſis vocatur.

371. Ex datâ anomaliâ verâ ſeu angulo B S P, facilè invenitur ei congrua anomalia media, ſeu arcus B N, quoniam enim ſumpta recta S R pro ſinu toto, eſt P R tangens anguli P S R, & Q R tangens anguli Q S R, atque P R ad Q R ut minor axis ellipſeos ad majorem; ſi fiat ut axis minor ad majorem, ità tangens anguli dati P S B ad 4um., invenietur tangens anguli Q S B ſive Q S O, ac proindè angulus Q S O; hinc datis in triangulo S Q O, duobus lateribus S O, O Q cum angulo Q S O, invenietur angulus S O Q, & illius ad duos rectos complementum Q O B ſeu anomalia excentri B Q dabitur. Fiat ut Q O, ad S O, ità 57°. 29578 (qui arcus eſt radio æqualis) ad quartum & dabitur arcus æqualis S O in gradibus gradûſque partibus decimalibus, dicatur hic arcus *B*, & quoniam eſt S O ad S F, ut O Q ad Q R, ſeu ut radius ad ſinum anguli Q O B ſive arcus B Q, fiat ut radius ad ſinum arcûs B Q, ità S O ſive arcus *B*, ad 4um., & dabitur in gradibus arcus in peripheriâ B Q A ſumendus æqualis rectæ S F; cumque ſit recta S F æqualis arcui Q N, (369.) dabitur arcus Q N, & proindè B N anomalia media, atque hinc facile eſt anomaliarum & æquationum centri tabulas conſtruere.

372. In orbitis planetarum non admodùm excentricis, datâ anomaliâ mediâ facile per approximationem duabus methodis ſequentibus invenitur anomalia coæquata.

Methodus Wardi. Ad ſecundum focum s, fiat angulus B s P, æqualis anomaliæ mediæ, jungatur S P, erit angulus PSB, anomalia vera, qaod quidem ipſe Wardus aſſumebat ut verum ex Hypotheſi merâ, ſed quod etiam ex ſuppoſitione areas eſſe temporibus proportionales deducitur, ſaltem quam proximè: eſt enim angulus N O B ſive anomalia media, æqualis angulis Q O B & NOQ, & QOB ſive anomalia excentri, eſt æqualis angulis Q S B (ſive P S B neglecto QSP) & SQO, ergo angulus NOB eſt æqualis

DE MOTU CORPORUM.

lis angulis PSB, SQO, NOQ quibus etiam quam proximè æqualis est angulus PsB, nam coeuntibus focis S & s cum centro O, puncta Q & P etiam coeunt & angulus SPO angulo SQO est quam proximè æqualis; pariter ut QO proxime coincidit cum PO fingatur SF esse perpendicularem in ipsam PO, & produci donec cum Ps producto in φ concurrat, erunt quam proximè OF, sφ parallelæ, ideoque ob æquales SO, Os, æquales erunt SF & Fφ, SP & Pφ, ut & anguli SPF & FPφ sive OPs, sed ob SF æqualem QN & SQ sive SP prope æqualem OQ est angulus SPF sive OPs propè æqualis angulo NOQ: ergo totus angulus SPs est æqualis angulis SQO & NOQ simul sumptis, & cum angulus PsB sit æqualis angulis PSB & SPs, æqualis prope erit angulis PSB, SQO, NOQ sicut angulus NOB, ergo angulus PsB est quam proximè anomalia media cujus anomalia coæquata est PSB.

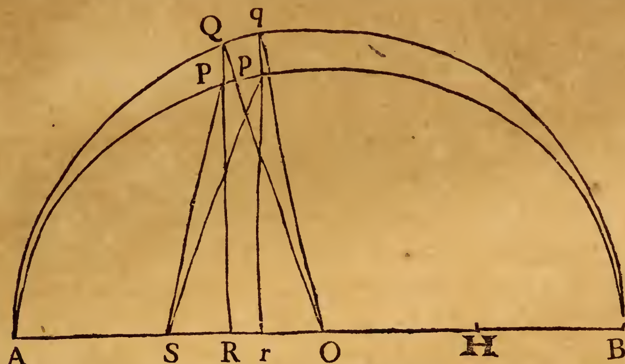
Dato autem angulo BsP, angulum PSB, ità quærit Wardus. Producatur sP, ad G, ut sit $PG = PS$, & jungatur SG, erit $sG = SP + Ps = AB$ (ex nat. Ellipſ.) adeóque in triangulo GsS, datis lateribus Gs, Ss, angulo SsG dantur anguli SGs ($= GSP$, ob $SP = PG$) & GSs, undè cognoſcetur angulus PSs sive PSB æqualis nempe differentiæ angulorum GSs, GSP, quare in triangulo SPs, datis angulis duobus PsS, PSs, angulo SPs, qui est summa angulorum GSP, SGP, & latere Ss, invenietur latus SP seu intervallum.

Ubi excentricitas paulo major est. Wardi methodum ità corrigit Bulliadus. Per punctum P Wardi methodo determinatum agatur QR axi AB normalis, & excentrico occurrens in Q, jungaturque sQ, orbitam secans in p, erit p, locus planetæ accuratior.

Methodus Caſſini. Omnibus positis (ut suprà num. 369.) jungantur SN, ON & agantur NH rectæ QF parallela & lineæ SF occurrens in H, & NE parallela SF rectæ QF occurrens in E, erit $NE = HF$ sinus arcûs NQ; cumque sit $SF = NQ$ (369) erit SH differentia inter arcum NQ & ipsius sinum NE; si excentricitas SO exigua fuerit erit fere $NQ = NE = HF = SF$ & proinde SN parallela FQ, adeóque angulus SNO, æqualis angulo NOQ; Porrò in triangulo SNO, datis duobus lateribus NO, SO, & angulo intercepto SON (complemento nempe anomaliæ mediæ datæ ad duos rectos) invenietur angulus SNO seu NOQ, & ipsius mensura nempè arcus NQ; & inde innoteſcet anomalia excentri BQ; Hinc in triangulo SQO, datis lateribus SO, OQ & angulo SOQ, invenietur an-

Scholium.

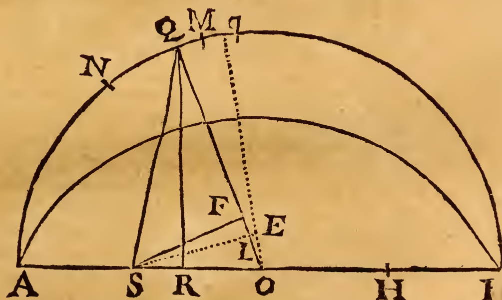
(r) Cæterum, cum difficilis sit hujus curvæ descriptio, præstat solutionem vero proximam adhibere. Inveniatur tum angulus quidam B, qui sit ad angulum graduum 57. 29578, quem



arcus radio æqualis subtendit, ut est umbilicorum distantia *SH* ad ellipseos diametrum *AB*; tum etiam longitudo quædam L, quæ sit ad radium in eâdem ratione inversè. Quibus semel inven-

angulus Q S O, & sumptâ S R pro sinu toto, erit QR ad P R seu axis major ad minorem, ut tangens anguli dati Q S B ad tangentem anguli ad solem P S B, qui ità obtinebitur.

Hæc satis sunt in orbitis planetarum non valde excentricis, sed in orbitis Mercurii & Martis quarum major est excentricitas ità invenitur arcus N Q. Ex datis in triangulo S N O, lateribus S O, N O, & angulo S O N, inveniuntur latus S N, & angulus S N O; deindè quæritur in partibus decimalibus radii O N differentia inter arcum qui metitur angulum S N O, & ejus sinum quæ citrà errorem sensibilem supponi potest æqualis rectæ S H, seu differentiæ inter arcum N Q anguli N O Q mensuram & ejus sinum N E. Sitque ille decimalium numerus *A*. Invenietur numerus decimalium radii S N quem eadem linea S H continet dicendo ut S N ad N O sic *A* ad numerum quæsitum *B*, & quoniam in triangulo rectangulo S H N est S N ad sinum totum ut S H sive *B* ad sinum anguli S N H, invenietur ergò angulus S N H, ex angulo invento S N O subducendus, ut relinquatur angulus HNO, seu æqualis N O Q, sive arcus N Q.

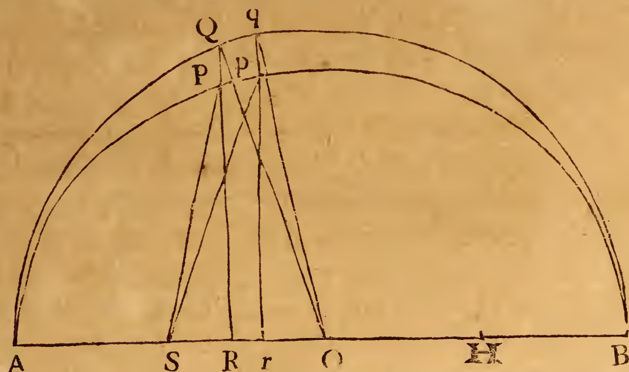


(r) 373. Sit axis major ellipseos A B, centrum O, umbilici S & H, & feratur planeta à perihelio A ad aphelium B, radio A O describatur circulus excentricus A Q B; quoniam radius circuli æqualis est arcui graduum 57. 29578, si fiat A B ad S H seu Q O ad S O, ut arcus vel angulus 57. 29578, ad arcum *B*, erit *B* arcus æqualis rectæ S O. Cognoscitur arcus A N tempori proportionalis, & dicatur *N*; deindè per methodum Wardi aut Cassini vel aliâ ratione inveniatur arcus

AQ,

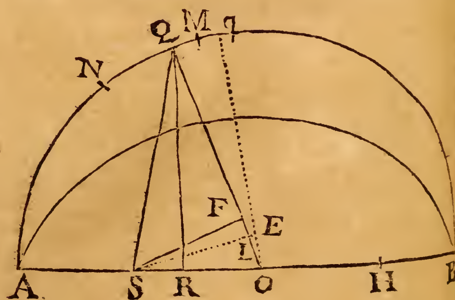
De Motu Corporum.

ventis, problema deinceps confit per ſequentem analyſin. Per conſtructionem quamvis, vel utcunque conjecturam faciendo, cognoſcatur corporis locus *P* proximus vero ejus loco *p*. Demiſſâque ad axem ellipſeos ordinatim applicatâ *PR*, ex proportione diametrorum ellipſeos, dabitur circuli circumſcripti *AQB* ordinatim applicata *RQ*, quæ ſinus eſt anguli *AOQ* exiſtente *AO* radio, quæque ellipſin ſecat in *P*. Sufficit angulum illum



rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoſcatur etiam angulus tempori proportionalis, id eſt, qui ſit ad quatuor rectos, ut eſt tempus, quo corpus deſcripſit arcum *Ap*, ad tempus

AQ, proximè æqualis anomaliæ excentri à perihelio A ſumptæ, erit arcus NQ æqualis rectæ SF ex umbilico S in radium QO perpendiculariter demiſſæ (369). Fiat ut SH ad AB ſive ut SO ad QO, ità radius *R* ad longitudinem quandam *L*, & erit $QO = \frac{SO \times L}{R}$. & quoniam triangulum SOF, ſimile eſt triangulo QOR erit QO : QR = SO : SF, hoc eſt, radius ad ſinum anguli QOA, ut arcus *B* ad alium arcum *D* qui erit æquales rectæ SF: Si itaque arcus AQ rectè aſſumptus fuiſſet foret arcus *D* æqualis arcui NQ (369): Si verò arcus AQ accuratus non eſt, capiatur NM = D, punctum M cadet ſuprà vel infra punctum Q. Sit anomalia excentri accurata (quæ eſt incognita) Aq, & in radium qO cadat perpendiculum SE erit æquale Nq



(369) undè SE−SF, hoc eſt ferè IE = Nq−NM = Mq = Qq−QM. Quoniam verò angulus QOq, parvus eſt, erit OE : Oq ſive OQ = LE : Qq = Qq−QM : Qq. Undè OQ−OE : OQ = QM : Qq. Sed

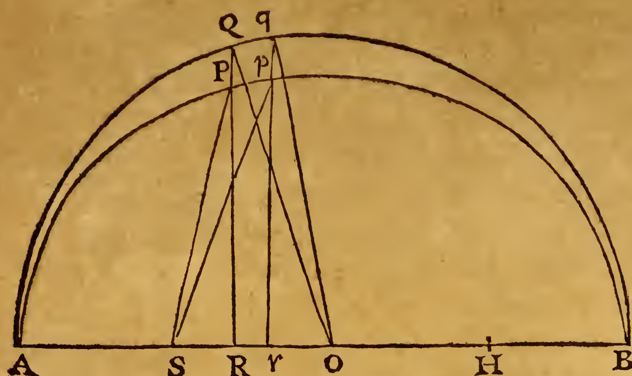
pus revolutionis unius in ellipſi. Sit angulus iſte N. Tum capiatur & angulus D ad angulum B, ut eſt ſinus iſte anguli AOQ ad radium, & angulus E ad angulum $N - AOQ + D$, ut eſt longitudo L ad longitudinem eandem L coſinu anguli AOQ diminutam, ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Poſtea capiatur tum angulus F ad angulum B, ut eſt ſinus anguli $AOQ + E$ ad radium, tum angulus G ad angulum $N - AOQ - E + F$ ut eſt longitudo L ad longitudinem eandem coſinu anguli $AOQ + E$ diminutam ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Tertiâ vice capiatur angulus H ad angulum B, ut eſt ſinus anguli $AOQ + E + G$ ad radium; & angulus I ad angulum $N - AOQ - E - G + H$, ut eſt longitudo L ad eandem longitudinem coſinu anguli $AOQ + E + G$ diminutam, ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam ubi major. Et ſic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus AOq æqualis angulo $AOQ + E + G + I +$ &c. Et (f) ex coſinu

Sed OE, eſt ferè æqualis OF, ergò $OQ - OF : OQ = QM : Qq$. Porrò OQ, eſt ad RO, ſeu radius ad coſinum anguli AOQ, ut SO, ad OF, adeóque $OF = \frac{SO \times \text{coſ. } AQ}{R}$. Creſcentibus AN, AQ, QR, decreſcit RO, & evaneſcit ubi AQ eſt circuli quadrans, ac tandem fit negativa ubi AQ quadrante major eſt. Quarè cum ſit $+OQ : +SO = RO : OF$, OF idem ſignum + vel − habere debet cum RO, adeóque ſi angulus AOQ, ſeu arcus AQ eſt quadrante minor, OF eſt quantitas affirmativa; Si AQ quadrans eſt, OF evaneſcit; Si AQ eſt quadrante major, OF fit negativa. Eſt igitur $OQ - \frac{SO \times \text{coſ. } AQ}{R} : OQ = QM : Qq$, ſeu ob $QO = \frac{SO \times L}{R}$, eſt $\frac{SO \times L - SO \times \text{coſ. } AQ}{R} : \frac{SO \times L}{R}$, ſive $L - \text{coſ. } AQ : L = QM : Qq$, ſi fuerit AQ minor quadrante, & $L + \text{coſ. } AQ : L = QM : Qq$, ſi fuerit AQ major quadrante. Eſt autem arcus $QM = AN - AQ + NM = N - AQ + D$; quarè ſi arcus Qq, dicatur E, erit $E : N - AQ + D = L : L \mp \text{coſ. } AQ$ & $AQ + E$, erit æqualis Aq; invento itaque E per ultimam proportionem, ſi loco AQ capiatur arcus accuratior Aq, ſeu angulus $AOQ + E$, & inſtituatur proceſſus priori ſimilis, capiendo arcum F, ad arcum B, ut eſt ſinus arcûs $AQ + E$ ſeu Aq ad radium, & arcum G ad arcum $N - Aq + F$, ſeu, $N - AQ - E + F$, ut eſt longitudo L, ad longitudinem eandem coſinu anguli AOq ſeu $AOQ + E$ diminutam ubi angulus AOq recto minor eſt, auctam ubi major, erit $AQ + E + G$, ſeu $Aq + G$, arcus magis verus, & ſimiliter ſi loco arcûs Aq, uſurpetur arcus $Aq + G$ & idem repetatur proceſſus, invenietur novus arcus $AQ + E + G + I$, ſeu $Aq + G + I$, accuratior arcu $Aq + G$, & ſic pergere licet in infinitum & quantumvis proxime ad veritatem accedere.

(f) * *Ex coſinu O r.* Eſt enim radius ad coſinum anguli inventi AOq, ut qO ad Or, invenientur ergò punctum r, & ordinata qr. Deindè ſi fiat ut axis major ad minorem, ità qr ad pr, habebitur locus corporis p.

* Si

De Motu Corporum.



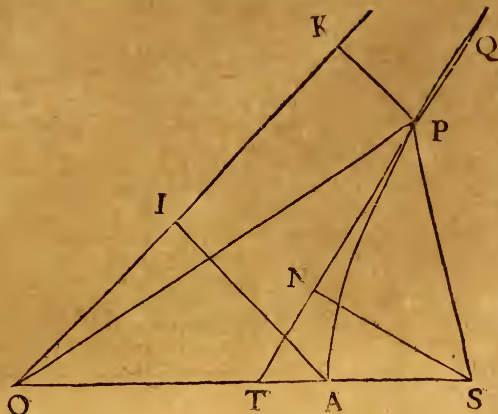
ſinu ejus *Or* & ordinata *pr*, quæ eſt ad ſinum ejus *qr* ut ellipſeos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus *p*. ([t]) Si quando angulus N − *AOQ* + D negativus eſt, debet ſignum + ipſius E ubique mutari in −, & ſignum − in +. Idem intelligendum eſt de ſignis ipſorum G & I, ubi anguli N − *AOQ* − E + F, & N − *AOQ* − E − G + H negativi prodeunt. Convergit autem ſeries infinita *AOQ* + E + G + I + &c. quam celerrimè, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum ſecundum E. Et fundatur calculus in hoc theoremate, quod area *APS* ſit ut differentia inter arcum *AQ* & rectam ab umbilico *S* in radium *OQ* perpendiculariter demiſſam.

Non

* (t) Si quandò angulus *N* − AQ + *D*, ſeu arcus QM, (vid fig. Not.) negativus eſt, ſeu ſi punctum M, cadit infrà punctum Q, debet ſignum ipſius + *E*, ubique mutari in −, & ſignum − in +. Quoniam enim ſuprà invenimus *E* : *N* − AQ + *D* = *L* : *L* ∓ coſ. AQ, ſi fuerit arcus *N* − AQ + *D*, negativus, debet quoque arcus *E* eſſe negativus, & arcus Aq erit AQ − *E*. Idem intelligendum eſt de ſignis ipſorum G & I &c. ob eandem rationem.

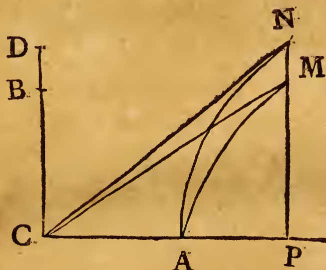
Dixi-

Non dissimili calculo conficitur problema in hyperbolâ. Sit ejus centrum *O*, vertex *A*, umbilicus *S* & asymptotos *O K*. Cognoscatur quantitas areæ abscindendæ tempori proportionalis. Sit ea A, & fiat conjectura de positione rectæ *SP*, quæ aream *APS* abscindat veræ proximam. Jungatur *O P*, & ab *A* & *P* ad asymptoton agantur *AI*, *PK* asymptoto alteri parallelæ, & (a) per tabulam logarithmorum dabitur area.



(a) Diximus superius (Theor. IV. de Hyp. p. 124.) aream inter asimptotum, Hyperbolam, ordinatam in vertice erectam & aliam ordinatam comprehensam, esse Logarithmum abscissæ, idem verò, more veterum demonstrare & ad hanc Propositionem propius accommodare hic non pigebit.

Lemma. Sint duæ hyperbolæ A M, A N quarum centrum C, semidiameter communis A C, semidiametri conjugatæ C B, C D, per punctum quodvis P agatur P M N ordinatim ad diametrum C P applicata, hyperbolis occurrens in punctis M & N, junganturque C M, C N spatia hyperbolica A M P, A N P & sectores A M C, A N C sunt ad invicem in ratione semidiametrorum conjugatarum C B, C D, vel etiam ordinatarum P M, P N. Nam ex naturâ hyperbolæ (Theor. II. de Hyp.) $PM^2 : CB^2 = CP^2 - CA^2 : CA^2$, & $PN^2 : CD^2 = CP^2 - CA^2 : CA^2$, undè $PM^2 : CB^2 = PN^2 : CD^2$, & $PM^2 : PN^2 = CB^2 : CD^2$, ac $PM : PN = CB : CD$, cùmque idem semper eveniat quâcumque in parte cadat ordinata P M N, liquet spatia hyperbolica A M P, A N P esse inter se ut C B ad C D, vel P M ad P N, sed triangula C P M, CPN sunt ad invicem ut PM ad PN vel CB ad CD; ergò $CPM - AMP : CNP - ANP = AMC : ANC = PM : PN = CB : CD$. Q. e. D.

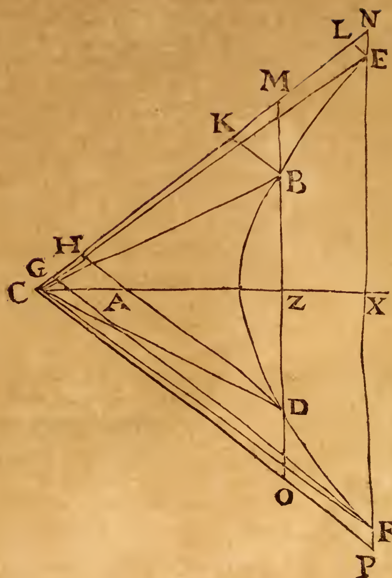


375. Coroll. Si duæ semidiametri conjugatæ C A, C D fuerint æquales, hyperbola A N erit æquilatera; quarè inventâ quadraturâ spatiorum hyperbolicorum ANP vel A N C in hyperbolis æquilateris, habebitur etiam quadratura spatiorum hyperbolicorum A M P vel A M C in aliis quibusvis hyperbolis.

376.

De Motu Corporum.

376. Lemma. Si super hyperbolæ EBDF asymptoto CN sumantur quatuor partes CG, CH, CK, CL, ut sit CG : CH = CK : CL; ducantur autem rectæ GF, HD, KB, LE alteri asymptoto CP parallelæ, & hyperbolæ occurrentes in punctis F, D, B, E, jiuganturque semidiametri CF, CD, CB, CE, sectores hyperbolici CBE, CDF erunt æquales. Agantur enim rectæ BD, EF asymptotis occurrentes in punctis M, O, N, P, & ob parallelas KB, HD, CO erit MB : MK = DO : CH, & ob parallelas LE, GF, CP erit etiam NE : NL = FP : CG; sed, ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos (Lem. I. de Conic. pag. 115.) MB = DO, & NE = FP, undè MK = CH & NL = CG; Porrò CG : CH = CK : CL (per hyp.) hoc est, NL : MK = CK : CL = LE : KB, ex naturâ hyperbolæ intrà asymptotos (Theor. IV. de Hyp. p. 124.) rectæ igitur NE, MB, hoc est, EF, BD erunt parallelæ, ac proindè, linea per earum medium X, Z ducta erit Diameter, transibitque per centrum C; (Lem. IV. de Conic. p. 119.) unde facile deducitur trapezia MXZN, OXZP fore æqualia ut & areæ mixtilineæ BXZE, DXZF, unde singulis ex correspondenti trapezio substractis relinquentur areæ MBEN & ODFP æquales, quibus addantur Triangula MBC, ODC, æqualia ob bases æquales MB, OD in eâdem linea positas, & ob vertices ad idem punctum C concurrentes, erunt æquales areæ CMNEBC, COPFDC, ex quibus denique substractis Triangulis NEC, PFC quæ æqualia sunt ob bases æquales NE, PF in eâdem lineâ positas, & ob vertices ad idem punctum C concurrentes, supererunt sectores hyperbolici CBE, CDF inter se æquales. Q. e. D.

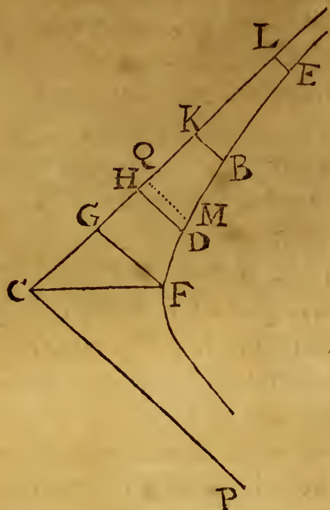


377. Lemma. Si per puncta quævis asymptoti CL, agantur duæ rectæ GF, HD alteri asymptoto CP parallelæ, & hyperbolæ occurrentes in F & D, junganturque semidiametri CF, CD, trapezium hyperbolicum GFDH æquatur sectori CFD. Nam, ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos, triangula CHD, CGF, æquantur ob æquales angulos G & H & latera reciproca (per Theor. IV. de Hyp. p. 124.) adeóque sublato communi triangulo CGA, residua spatia GADH, CAF erunt æqualia, quibus si addatur idem spatium hyperbolicum DAF, summæ GFDH, CFD erunt æquales. Q. e. D.

378. Coroll. 1. Hinc iisdem positis quæ (num. 376.) trapezia hyperbolica GFDH, KBEL sunt æqualia.

379. Coroll. 2. Si asymptoti partes CG, CH, CK fuerint continuè proportionales, duo sectores CFD, CDB & duo trapezia hyperbolica GFDH, HDBK, æquantur. Eâdem enim ratione quâ num. 376. ostendetur rectam BF tangenti per punctum D ductæ esse parallelam. Undè si super asymptoto CL sumantur partes quotcumque CG, CH, CK, CL &c. in continuâ progressione geometricâ, & ex punctis G, H, K, L &c. agantur rectæ GF, HD, KB, LE &c. alteri asymptoto parallelæ, trapezia hyperbolica GFDH, HDBK, KBEL erunt æqualia; & vicissim si trapezia illa æquantur, erunt rectæ CG, CH, CK, CL &c. in continuâ progressione geometricâ.

380. Coroll. 3. Sit hyperbola FDBE æquilatera, cujus centrum C, asymptotus CL, semiaxis transversus CF, capiantur in asymptoto partes CG, CH, CK, CL, &c. in continuâ progressione geometricâ, aganturque GF, HD, KB, LE &c., alteri asymptoto CP parallelæ, trapezia hyperbolica GFDH, HDBK, KBEL &c. erunt æqualia; quarè eorum summæ, scilicet o, GFDH, GFBK, GFEL, &c. erunt in continuâ progressione arithmeticâ. Si itaque CG sit unitas, CH, CK, CL, &c. numeri, erunt o, GFDH, GFBK, GFEL, illorum numerorum logarithmi.



381. Coroll. 4. Itaque per logarithmorum hyperbolicorum tabulas, inveniri possunt trapeziorum quorumvis GFDH, BGFK, &c. areæ; Sumptâ enim CG pro unitate, quærantur in numeris valores rectarum CH, CK, &c. & horum numerorum logarithmi exhibebunt trapezia hyperbolica GFDH, GFBK, &c.

382. Coroll. 5. Sit $CG = 1$, $GH = x$, $CH = 1 + x$, $HD = y$, & erit, ex naturâ hyperbolæ inter asyptotos $\overline{1+x} \times y = 1$, adeóque $y = \frac{1}{1+x}$, & trapezii GFDH elementum DHQM seu $y\,dx = \frac{dx}{1+x}$; Si igitur $L.\ \overline{1+x}$, denotet logarithmum numeri $1+x$, erit $L.\ \overline{1+x} = GFDH$, & elementum logarithmi seu $d.\ L.\ \overline{1+x} = y\,dx = \frac{dx}{1+x}$. Et similiter elementum logarithmi numeri cujusvis z seu $d.\ L.\ z = \frac{dz}{z}$.

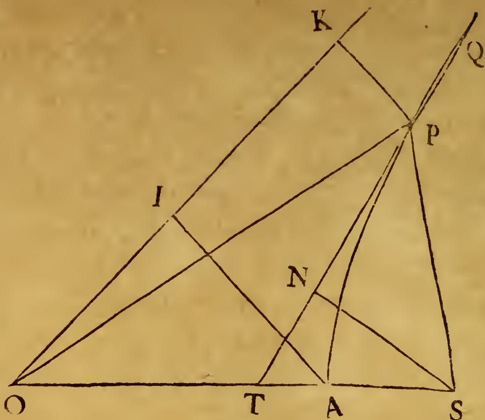
383. Coroll. 6. Cum sit $y = \frac{1.}{1+x}$, si peragatur divisio, erit $y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$ &c. in infinitum, ac proinde $y\,dx = dx - x\,dx + x^2\,dx - x^3\,dx$ &c. in infinitum, & sumptis utrinque fluentibus $S.\ y\,dx = GFHD = L.\ \overline{1+x} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ &c. in infinitum. Si autem numerus propositus sit unitate minor, seu $1-x$, eodem modo invenietur ipsius logarithmus $S.\ -y\,dx = L.\ \overline{1-x} = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5$ &c.

384. Scholium. Observandum est logarithmos hyperbolicos Neperi à logarithmis Briggii quibus vulgò utimur differre; verùm cum hyperbolici sint semper ad Briggianos seu vulgares in eâdem constanti ratione, nimirum logarithmus hyperbolicus numeri denarii 2. 302585 est ad logarithmum Briggianum numeri denarii 1. 000000, ut quilibet logarithmus hyperbolicus ad ejusdem numeri logarithmum Briggianum, facile est hyperbolicos ad Briggianos & contrà Briggianos ad hyperbolicos reducere, adeóque hyperbolarum quadraturam per logarithmos etiam vulgares invenire. Si dividatur 1. 000000, per 2. 302585 &c., quotiens 0. 4342948 &c. per logarithmum quemvis Hyperbolicum multiplicatus, dabit logarithmum vulgarem, & viceversâ, si logarithmus quilibet vulgaris per 0. 43429481 & dividatur, quotiens erit logarithmus hyperbolicus.

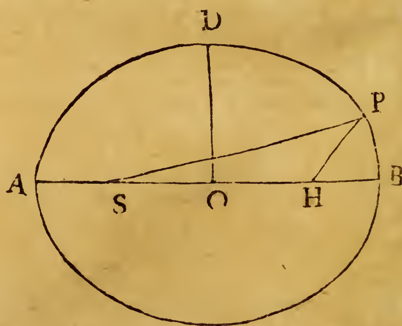
* *Et per tabulam.* (381. 384.)

De Motu Corporum.

$AIKP$, (b) eique æqualis area OPA, quæ subducta de triangulo OPS relinquet aream abscissam APS. Applicando areæ abscindendæ A & abscissæ APS differentiam duplam 2 APS − 2 A vel 2 A − 2 APS ad lineam SN, quæ ab umbilico S in tangentem TP perpendicularis est, (c) orietur longitudo chordæ PQ. Inscribatur autem chorda illa PQ inter A & P, si area abscissa APS major sit areâ abscindendâ A, secus ad puncti P contrarias partes; & punctum Q erit locus corporis accuratior. Et computatione repetitâ invenietur idem accuratior in perpetuum.



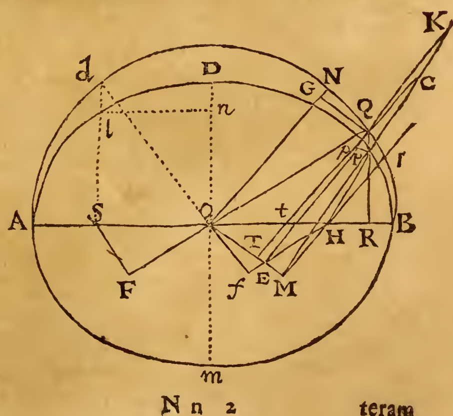
Atque his calculis problema generaliter confit analyticè. Verùm usibus astronomicis accommodatior est calculus particularis qui sequitur. Existentibus AO, OB, OD semiaxibus ellipseos, & L ipsius latere recto, ac D differentia inter semiaxem minorem OD & lateris recti semissem $\frac{1}{2}$ L; quære tum angulum Y, cujus sinus sit ad radium ut est rectangulum sub differentia illa D, & semisumma axium $AO+OD$ ad quadratum axis majoris AB; tum angulum Z, cujus sinus sit ad radium ut est



* (b) *Eique æqualis area OPA* (377).

* (c) *Orietur longitudo.* Nam cum arcus PQ exiguus sit, accipi potest pro chordâ PQ seu parte PQ tangentis TP productæ; undè triangulum rectilineum SQP, quam proximè æquatur differentiæ spatiorum hyperbolicorum APS, ASQ seu A; sed triangulum rectilineum SQP $= \frac{PQ \times SN}{2}$, ergò $\frac{PQ \times SN}{2} = A - APS$, vel $= APS - A$, ac proindè $PQ = \frac{2A - 2APS}{SN}$ vel $= \frac{2APS - 2A}{SN}$, proùt area A major vel minor est areâ APS.

duplum rectangulum ſub umbilicorum diſtantiâ *SH* & differentiâ illâ D ad triplum quadratum ſemiaxis majoris *AO*. His angulis ſemel inventis, locus corporis ſic deinceps determinabitur. Sume angulum T proportionalem tempori quo arcus *BP* deſcriptus eſt, ſeu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum V, primam medii motus æquationem, ad angulum Y, æquationem maximam primam, ut eſt ſinus dupli anguli T ad radium; atque angulum X, æquationem ſecundam, ad angulum Z, æquationem maximam ſecundam, ut eſt cubus ſinus anguli T ad cubum radii. Angulorum T, V, X vel ſummæ T+X+V, ſi angulus T recto minor eſt, vel differentiæ T+X−V, ſi is recto major eſt rectiſque duobus minor, æqualem cape angulum *BHP*, motum medium æquatum; & ſi *HP* occurrat ellipſi in *P*, actâ *SP* abſcindet aream *BSP* tempori proportionalem quam proximè. Hæc praxis ſatis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum V & X, in minutis ſecundis, ſi placet, poſitorum, figuras duas treſve primas invenire ſufficit. Sed & ſatis accurata eſt ad theoriam planetarum. Nam in orbe vel Martis ipſius, cujus æquatio centri maxima eſt graduum decem, error vix ſuperabit minutum unum ſecundum. Invento autem angulo motus medii æquati *BHP*, angulus veri motus *BSP* & diſtantia *SP* in promptu ſunt per methodum notiſſimam. (d) Hacte-



(d) 385. Ellipſeos quam Planeta deſcribit ſit Centrum O, umbilici S, H, & ſemiaxes OB, OD; Sole in S poſito umbilicus alter H erit ferè centrum medii motûs Planetæ, (372) id eſt, ſi ex umbilico H agatur linea HI, quæ cum lineâ apſidum OB, conſtituat angulum IHB anomaliæ mediæ æqualem, recta illa HI, ferè tranſibit per locum Planetæ in orbitâ ellipticâ parum excentricâ revolventis, tranſeat autem HP, per locum verum Planetæ P & erit angulus PHI, anomaliæ mediæ IHB, addendus (vel detrahendus) ut motus medius æquatus BHP habeatur, & angulus PHI aut ipſi æquipollens dicetur æquatio tota medii motus, quam in duas partes dividit Newtonus, quarum unam primam æquationem & al-

 teram

De Motu Corporum.

Hactenus de motu corporum in lineis curvis. Fieri autem poteſt ut mobile rectâ deſcendat vel rectâ aſcendat, & quæ ad iſtiuſmodi motus ſpectant, pergo jam exponere.

SEC.

teram ſecundam æquationem vocat; determinat ſingulas in iis punctis ubi maximæ ſunt, & rationem maximæ æquationis ad aliam in dato quovis puncto adhibendam indicat.

Præcedentes Methodos illuſtrarunt demonſtrationibus & exemplis Keillius & Gregorius, hanc non minus ingenioſam intactam reliquerunt, veſtigiis Newtoni inſiſtere conabimur, & aperire quibus fundamentis nitatur hæc approximatio.

386. Producatur I H in M donec occurrat perpendiculo OM, à centro O in ipſam IH demiſſo jungaturque MP, erit angulus PHI æqualis angulis PMH & MPH, quorum ſinus erunt inter ſe ſicut P H ad M H; ſed cum M H ſit ſemper minor O H diſtantia centri à foco, ſitque P H diſtantia foci H ad punctum P Ellipſeos, exigua erit M H reſpectu H P, ideoque minimus eſt angulus M P H reſpectu anguli P M H, illum itaque negligit, & hunc ſolum PMH ut æquationem totam conſiderat Newtonus.

Ducto verò ut ſuperius expoſitum eſt, circulo B Q N A ſuper magnum axem Ellipſeos A B, & ex P loco Planetæ ductâ P R perpendiculari in eum magnum axem eâque P R productâ donec ſecet circulum B Q N A in Q; ducatur T Q perpendicularis in O M (ideoque parallela lineæ I M) & producatur ita ut ſecet in C lineam M P etiam productam, erit (per 29. 1. El.) angulus T C M æqualis Angulo C M H ſive P M H, eritque T C M æquatio totalis motus medii: Ducatur pariter Q O quæ producatur in F donec ſecetur à perpendiculo S F à foco S in quo ſol verſatur ducto, ſumaturque arcus Q N æqualis S F & ducatur N O, erit N O B anomalia media (369) & erit N O parallela lineis I M, T Q; ſit Q G perpendicularis ducta ex Q in O N, erit Q G ſinus arcus Q N, & erit O T illi ſinui æqualis.

Ducatur denique in O, O f, perpendicularis in lineam O Q, ideoque parallela lineæ S F, & ex H in illam ducatur perpendiculum H f, Triangulum O f H æquale erit Triangulo S O F, ob lineas æquales S O, O H, angulos rectos in F & f, & angulos æquales in S & O ob parallelas S F, O f; erit ergo $Of = SF = QN$; Concurrant lineæ f H, O M in E, & ex E ducatur per Q linea E Q ſecans M C (productam ſi neceſſe ſit) in K, angulus T C M erit æqualis angulis E K M & K Q C ſive T Q E (per 32 1 Elem.) ſic ergo Newtonus dividit æquationem totam TCM in angulos E K M, T Q E, quos ſeparatim determinat.

Prima ergo æquatio determinatur, ductâ H M ex foco quæ faciat cum axi angulum anomaliæ mediæ æqualem, & ductâ ex centro lineâ O M in illam perpendiculari, tum etiam ductâ ex foco lineâ H f quæ faciat cum axi angulum anomaliæ excentri æqualem, ſecetque lineam O M (productam ſi neceſſe ſit) in E; ex M ducatur linea per locum planetæ P & ex E ducatur linea per Q punctum correſpondens in circulo, & concurrant illæ lineæ in K, & angulus E K M eſt prima æquatio; & ſi ſit K M radius, M E eſt ſinus illius æquationis.

Ut ergo determinetur M E, obſervandum angulum M H E eſſe æqualem an-

angulo N O Q, cum sit N O parallela M H & Q O parallela F H per constructionem, sumpto verò M H pro radio erit M E tangens ejus anguli M H E quæ in exiguo angulo pro Arcu ipso sumi potest, ideoque Radius O N sive O B erit ad arcum N Q ut M H ad lineam M E; Dicatur autem angulus anomaliæ mediæ *T* erit (per construct.) H O M ejus complementum ad duos Rectos, fiatque ut Radius (qui in toto hoc calculo sumitur æqualis O B) ad Cos. *T* sic O H ad M H $= \frac{OH \times Cos.\,T}{OB}$; Præterea arcus $NQ = SF$, & est OQ (sive OB) ad QR ut est OS (sive OH) ad SF ideoque SF sive $NQ = \frac{OH \times QR}{OB}$ unde proportio superius inventa $OB : NQ = MH : ME$ in hanc vertitur $OB : \frac{OH \times QR}{OB} = \frac{OH \times Cos.\,T}{OB} : ME = \frac{OH^2 \times QR \times Cos.\,T}{OB^3}$ sive quia (per nat. Ellips.) $OH^2 = OB^2 - OD^2 = OB + OD \times OB - OD$ (per 6. 2. Elem.) est $ME = \frac{OB + OD \times OB - OD \times QR \times Cos.\,T}{OB^3}$.

Radius verò K M hac ratione determinatur: Ducatur ex P linea P p, perpendicularis in T Q ac proinde parallela lineæ M E, ejus portio terminata in linea E K est quidem ita proximè æqualis ipsi P p, ut P p pro illa sumi possit, est verò ob parallelas $ME : Pp = KM : KP$.

Facile autem determinatur ratio M E ad P p, nam angulus T Q R est complementum anomaliæ mediæ Q t R, unde est, Radius O B, ad Cos. *T* sicut Q P ad P p $= \frac{Cos.\,T}{OB} \times QP$, est autem QP differentia inter Q R & P R, est verò Q R ad P R ut semiaxis major O B ad minorem O D, est ergo $PR = \frac{OD \times QR}{OB}$ & $QP = QR - \frac{OD \times QR}{OB} = \frac{QR}{OB} \times OB - OD$, itaque $Pp = \frac{Cos.\,T \times QR}{OB^2} \times OB - OD$, ideoque M E ad P p sicut $\frac{OB + OD \times OB - OD \times QR \times Cos.\,T}{OB^3}$ ad $\frac{OB - OD \times QR \times Cos.\,T}{OB^2}$ utroque autem termino multiplicato per $\frac{OB^3}{OB - OD \times QR \times Cos.\,T}$ superest ratio $OB + OD$ ad OB, æqualis rationi M E ad P p sive K M ad K P, unde convertendo est $OD : OB + OD = KM - KP\,(MP) : KM$; sive quia $OB + OD$ est ferè $2\,OB$, est $OD : 2\,OB = MP : KM$.

Erit autem M P proximè æqualis lineæ T p, hæc verò lineæ Q t, cum enim parva sit excentricitas, Q p compensat fere partem neglectam T t, est verò Q t parallela N O, ideoque est Q t R æqualis anomaliæ mediæ; ergo est sinus anomaliæ mediæ ad radium ut Q R ad Q t, sive $fin.\,T : OB = QR : Qt = \frac{OB \times QR}{fin.\,T} = MP$ unde cum sit O D ad 2 O B sicut M P sive $\frac{OB \times QR}{fin\,T}$ ad K M erit $KM = \frac{2\,OB^2 \times QR}{OD \times fin\,T}$, sed inventa erat $ME = \frac{OB + OD \times OB - OD \times QR \times Cos.\,T}{OB^3}$ multiplica ergo valores K M & M E per $\frac{2\,fin\,T \times OD}{QR}$ eritque K M ad M E sive radius ad sinum anguli K ut $4OB^2$ (sive AB^2) ad $\frac{2OD \times OB + OD \times OB - OD \times fin\,T \times Cos.\,T}{OB^3}$

& cum sit semi latus rectum $\frac{1}{2}L = \frac{OD^2}{OB}$, erit $OD - \frac{1}{2}L = OD - \frac{OD^2}{OB} = \frac{OD}{OB} \times OB - OD$, vocetur *D* ea differentia semiaxis minoris & semilateris recti, & substituto *D* loco $\frac{OD}{OB} \times OB - OD$ erit Radius ad sinum anguli K ut AB^2 ad $D \times OB + OD \times \frac{2Cos.\,T \times fin.\,T}{OB^2}$.

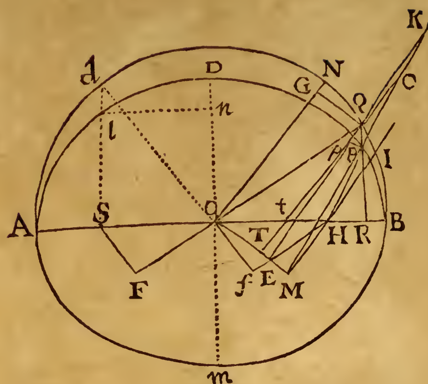
387. Ergo in quovis gradu anomaliæ mediæ erit, est semper Radius ad AB^2 ut sinus Anguli K, ad $D \times \frac{OB + OD}{OB} \times \frac{2\,Cos.\,T \times fin.\,T}{OB}$ cum verò ratio Radii ad AB^2 sit constans, hæc altera etiam erit constans, ideoque in omni casu sinus Anguli K ubi anomalia media est *T*, erit ad ejus sinum ubi anomalia media erit *t*, ut $D \times OB + OD$

 × 2 Cos.

De Motu Corporum.

$\frac{-2\,\text{Cof.}\,T\,\text{fin.}\,T}{OB^2}$ ad $D \times OB + OD \times \frac{2\,\text{Cof.}\,t \times \text{fin.}\,t}{OB^2}$ five multiplicando utrumque terminum per conftantes $\frac{OB}{D \times OB + OD}$ ut $\frac{2\,\text{Cof.}\,T \times \text{fin.}\,T}{OB}$ ad $\frac{2\,\text{Cof.}\,t\,\text{fin.}\,t}{OB}$ fed conftat ex Trigonometricis, quod duplum facti finus anguli dati cujufvis per ejus Cofinum, divifum per radium, eft æquale finui Anguli qui eft duplus ejus anguli dati, ergo finus angulorum K in diverfis anomaliæ mediæ gradibus funt inter fe ut finus dupli anguli anomaliæ. Unde fequitur, quod cum duplum anomaliæ mediæ 45. graduum fit 90. ejufque finus fit æqualis Radio feu finui totali, angulus K erit maximus in 45° gradu, five eft illic anomaliæ mediæ æquatio prima maxima, & fi ea data fit, invenientur in aliis gradibus æquationes adhibendæ, dicendo ut Radius ad finum dupli anomaliæ mediæ ita finus æquationis maximæ primæ ad finum æquationis quæfitæ, five (quia hic de minimis angulis agitur qui funt inter fe ut fui finus) ita ipfa æquatio maxima ad æquationem quæfitam: Invenietur autem facile maxima illa æquatio, cum enim fit Radius ad AB^2 ut finus K ad $D \times \frac{OB+OD}{OB} \times \text{fin}\,2T$ fi T fit 45°, fin. $2T$ eft ipfe Radius OB; Eft ergo Radius ad AB^2 ut finus K ad $D \times \frac{OB+OD}{OB} \times OB$ five, ut ftatuit Newtonus, eft Radius ad finum æquationis primæ maximæ ut AB^2 ad $D \times OB + OD$. Quod erat 1°. Dem.

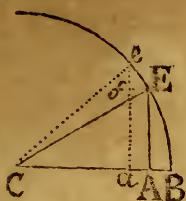
388. Secunda æquatio TQE continetur lineis ductis à puncto Q circuli BQNA ad puncta T & E lineæ OM quæ perpendiculariter in ON lineam motus medii ducitur, eft vero OT æqualis finui arcus $QN = SF = Of$, & fi ex f ducatur ad focum linea fH, interfectio ejus lineæ fH (productæ fi neceffe fit) cum linea OM dat alterum punctum E. In hâc ergo æquationis parte eft QE radius, TE finus, eorumque ratio eft inveftiganda, eft verò QE paulo major quam QT & QT eft æqualis OG, quâ paulò major eft ON five OB unde QE pro OB commodè affumi poteft, quamvis eâ fit paulo minor; Ut autem valor lineæ TE affignetur, notandum eft quod cum fit OM in ON perpendicularis, & Of in OQ, eft angulus fOM æqualis angulo NOQ.



Cognofcetur ergo arcus menfurans angulum fOM five fOE, affumpto Of pro radio, dicendo radius ON five OB ad arcum NQ ut Of (five NQ) ad arcum menfurantem angulum fOE qui ideo erit $\frac{NQ^2}{OB}$, fecans illius arcus eft OE, cum verò TO fit finus arcus NQ (æqualis Of) feratur longitudo Of fecundum lineam OM, cadet tantùm ultra T quantum arcus NQ fuum finum excedit, & tantùm citra E quantùm radius ille Of à fecante anguli cujus arcus eft $\frac{NQ^2}{OB}$ deficit: Dato ergo arcu NQ, inveniatur ejus exceffus fuper ejus finum, & dato arcu $\frac{NQ^2}{OB}$ inveniatur exceffus ejus fecantis fuper radium NQ five Of & inventis his duobus habebitur linea TE quæfita.

Lemma I. *Dato Arcu invenire ejus finum.* Sit radius CB, r, finus quæfitus EA, x, ejus Cofinus CA, $\sqrt{rr-xx}$, Arcus datus BE, v, ejus fluxio Ee fit dv.

Ducto radio CB, & radio proximo Ce & finu arcus Be, ductoque ex E in F perpendiculo, erit ef fluxio finus quæfiti five dx. Triangula verò ECA, efE, pro fimilibus funt habenda, nam angulus fEA eft rectus



rectus ut & angulus C E e quia circulus est perpendicularis in radium, & dempto communi C E f remanent C E A & f E e æquales, & ob rectos in f & A, angulus tertius f e E æqualis erit tertio E C A unde habetur hæc proportio, C A ad C E ut e F ad e E, sive $\sqrt{rr-xx}:r=dx:dv$ unde est $dv=\frac{rdx}{\sqrt{rr-xx}}$ & $dv^2=\frac{rrdx^2}{rr-xx}$ sive $rr^2-xx^2=\frac{rrdx^2}{dv^2}$.

Jam verò supponatur valorem x hac serie exprimi, $x=Av+Bv^3+Cv^5$ &c. erit $dx=Adv+3Bv^2dv+5Cv^4dv$ &c. & $dx^2=A^2dv^2+6ABv^2dv^2+9BBv^4dv^2+10ACv^4dv^2$ &c. & $xx=A^2v^2+2ABv^4+BBv^6+2ACv^6$ &c. unde $rr-xx=rr-A^2v^2-2ABv^4$ &c. & $\frac{rrdx^2}{dv^2}=rrA^2+6rrABv^2+9rrBBv^4+10ACv^4$ &c. undè hæ duæ series æquales sunt, & terminorum A, B, C &c. valor ex comparatione terminorum correspondentium harum serierum eruitur, erit ergo

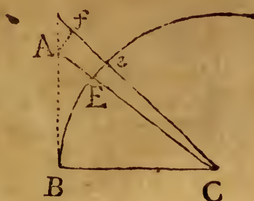
$-rr-A^2v^2-2ABv^4$ &c. $=rrAA+6rrABv^2+9rrBBv^4+10rrACv^4$ &c.

undè erit $rr=rrAA$, idoque $A=1$.

$-A^2v^2=6rrABv^2$, undè $-1=6rrB$ & $B=\frac{-1}{6rr}$

$-2ABv^4=9rrBBv^4+10rrACv^4$, sive substitutione facta & terminis per v^4 divisis $+\frac{2}{6rr}=\frac{9}{36rr}+10rrAC$, sive $10rrAC=\frac{3}{36rr}$

& $C=\frac{3}{10\times36r^4}=\frac{1}{2\times3\times4\times5r^4}$, &c. undè series $Av+Bv^3+Cv^5$ &c. $=x$, ad hanc redit $x=v-\frac{v^3}{2\times3r^2}+\frac{v^5}{2\times3\times4\times5r^4}$ &c. quæ series facile continuatur, & arcu existente parvo citissimè convergit.



Lemma II. *Dato arcu invenire secantem.* Sit ut prius radius C B, r, secans quæsita C A, y, Tangens B A $\sqrt{yy-rr}$, Arcus datus B E, v, ejus fluxio E e, dv; Ducatur ex centro secans C a, proxima propositæ, & radio C A centro C, describatur arcus A f erit f A fluxio secantis quæsitæ sive dy, erunt autem arcus E e & A f ut eorum radii C E, C A ideoque est $r:y=dv:\text{A f}=\frac{ydv}{r}$; præterea Triangula ACB, a A f, sunt similia, nam ob angulum rectum f A C angulus f A a est complementum anguli C A B sive est æqualis angulo A C B, anguli verò B & f sunt ambo æquales ut pote recti, est ergo C B : B A = A f : f a, sive $r:\sqrt{yy-rr}=\frac{ydv}{r}:dy$ & quadrando, $rr:yy-rr=\frac{yydv^2}{rr}:dy^2$ sive $r^4\frac{dy^2}{dv^2}=y^4-rry^2$, Fingatur ergo esse $y=A+Bv^2+Cv^4+Dv^6$ &c.

est $dy=2Bvdv+4Cv^3dv+6Dv^5dv$ &c.

& $dy^2=4B^2v^2dv^2+16BCv^4dv^2+16C^6v^6dv^2+24DBv^6dv^2$ &c.

& $y^2=A^2+2ABv^2+2ACv^4+BBv^4$ &c.

& $y^4=A^4+4A^3Bv^2+6A^2B^2v^4+4A^3Cv^4$ &c.

est ergo $\frac{r^4dy^2}{dv^2}$
$=4r^4B^2v^2+16r^4BCv^4+16r^4C^6v^6+24r^4DBv^6$ &c.

& y^4-rry^2
$=A^4+4A^3Bv^2+6A^2B^2v^4-r^2A^2-2r^2ABv^2+4A^3Cv^4-2r^2ACv^4-r^2B^2v^4$ &c.

DE MOTU CORPORUM.

Unde collatis terminis correſpondentibus harum ſerierum eſt $A^4 - r^2 A^2 = 0$, ideoque $A^2 = r^2$, & $A = r$; eſt $4r^4 B^2 v^2 = 4 A^3 B v^2 - 2 r^2 A B v^2$, ſive diviſis omnibus terminis per $B v^2$ & poſito r loco A; $4 r^4 B = 4 r^3 - 2 r^3$ ideoque eſt $B = \frac{1}{2r}$, eſt $16 r^4 B C v^4 = 6 A^2 B^2 v^4 + 4 A^3 C v^4 - 2 r^2 A C v^4 - r^2 B B v^4$, quæ diviſa per v^4 ſubſtitutiſque valoribus A & B dant $8 r^3 C = \frac{6}{4} + 4 r^3 C - 2 r^3 C - \frac{1}{4}$ unde eſt $6 r^3 C = \frac{5}{4}$ & $C = \frac{5}{2 \times 3 \times 4 r^3}$ &c.

Series ergo ad ſecantis valorem exprimendum $A + B v^2 + C v^3$ &c. in hanc vertitur $r + \frac{v^2}{2r} + \frac{5 v^3}{2 \times 3 \times 4 r^3}$ &c. Quæ ſatis prompte convergit ſi modo arcus v ſit exiguus, ut iſto in caſu.

HIS poſitis, invenientur commodè partes lineæ TE, ſive ſinus ſecundæ æquationis, ea enim conſtat ex differentia inter arcum NQ & ejus ſinum (dato radio OB) & ex differentia inter eum ipſum arcum NQ ſumptum ut radium in angulo fOE & illius anguli ſecantem.

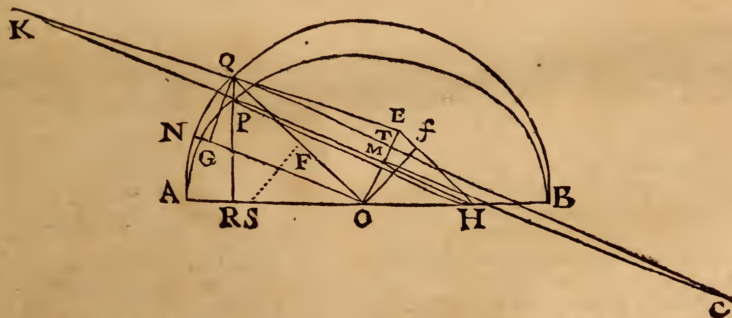
Primum ergo differentia inter arcum NQ & ejus ſinum, ex primâ ſerie invenitur, ſit enim $v = NQ$ & $r = OB$, ſinus arcus NQ per eam ſeriem invenitur $NQ - \frac{NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$ &c. & omiſſis reliquis terminis ſeriei, hic admodum exiguis, liquet differentiam inter arcum NQ & ejus ſinum eſſe terminum $\frac{NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$ qui erat in eâ ſerie ex arcu NQ tollendus ut obtineretur ſinus.

Secundo, ut differentia inter radium & ſecantem anguli fOE obtineatur, loco radii r in ſerie ſuperius inventâ valor radii Of ſive NQ eſt ſubſtituendus, & loco arcus v, valor arcus qui menſurat eum angulum & qui inventus fuit $= \frac{NQ^2}{OB}$, ergo ſeries quæ ſecantem exprimit in hanc abit $NQ + \frac{NQ^4}{2 OB^2 \times NQ}$ &c. reliquis terminis ut pote minimis omiſſis, exceſſus ſecantis ſuper radium eſt $\frac{NQ^3}{2 OB^2}$, qui junctus cum exceſſu arcus ſuper ſinum ſuperius invento $\frac{NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$ efficit ſummam $\frac{4 NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$ ſive $\frac{2 NQ^3}{3 OB^2}$ pro valore ſinus æquationis ſecundæ; ſed eſt (369) ut Radius OB ad QR ita SH ſive OH ad SF ſive NQ, ergo $NQ = \frac{OH}{OB} \times QR$ & $\frac{2 NQ^3}{3 OB^2} = TE = \frac{2 OH^3}{3 OB^5} \times QR^3$; Itaque cum in hâc ſecundâ æquatione radius QE ſit in omni anomaliæ gradu idem aut prope idem, & anguli ſint minimi erunt inter ſe quam proximè ut eorum ſinus TE

TE, cumque in valore TE quantitas $\frac{2OH^3}{3OB^5}$ sit constans, sinus illi sunt inter ut QR^3, sed QR est sinus anomaliæ excentri, & in eâdem prope sunt ratione sinus anomaliæ mediæ, hinc istæ æquationes secundæ in variis anomaliæ mediæ gradibus adhibendæ, sunt inter se ut cubi sinuum anomaliæ mediæ. Si itaque sumatur anomalia media 90. graduum ejus sinus est ipse Radius, eritque illic maxima æquatio, quæ erit ad aliam quamvis, ut cubus Radii ad cubum sinus anomaliæ mediæ ipsi convenientis ut statuit Newtonus.

Ut verò determinetur hæc æquatio ubi est maxima, notandum quod si in foco S erigatur usque ad Ellipsim ordinata Sl ea erit æqualis semi lateri recto, & si ducatur, ln ordinata in minorem axem erit $ln = OS$ sive OH, & Dn erit differentia semi lateris recti & minoris axis quam Newtonus vocat D, & ex natura Ellipseos erit AO^2 sive $OB^2 : ln^2\ (OH^2) = OD^2 : Dn \times nm$ (sive $D \times nm$) sed nm est ferè axi minori $2OD$ æqualis, ergo erit $OB^2 : OH^2 = OD^2 : D \times 2OD$ & $OH^2 = \frac{2D \times OB^2}{OD}$, quo posito valor $TE = \frac{2OH^3}{3OB^5} QR^3$ est æqualis $\frac{2OH \times 2D}{3OB^3 \times OD} \times QR^3$ vel quia $2OH = SH$ est $TE = \frac{2D \times SH}{3OB^3 \times OD} QR^3$.

In nonagesimo verò gradu anomaliæ mediæ linea OM sive OE in axem OB cadit & QT cui ferè æqualis est QE coincidit cum QR, unde QE pro QR sumi potest, & prætereà QR nonnihil excedit lineam Sd sive axem minorem DO, cum non nihil citra focum cadat, minor tamen est radio OB, unde QR^2 pro $OB \times OD$ satis accuratè sumi potest, sicque valor $TE = \frac{2D \times SH}{3OB^3 \times OD} QR^3$ in hanc abit $TE = \frac{2D \times SH}{3OB^2} QE$, sed Radius est ad sinum æquationis maximæ secundæ ut QE ad TE (sive $\frac{2D \times SH}{3OB^2} \times QE$) & QE ad $\frac{2D \times SH}{3OB^2} QE$ sicut $3OB^2$, ad $2D \times SH$, ergo æquatio secunda maxima invenietur dicendo ut triplum Quadrati semi axis majoris ad duplum Rectangulum sub umbilicorum distantiâ SH & differentia D semi axis minoris & semi Lateris Recti, ita Radius ad sinum secundæ æquationis ubi est maxima, & ea data reliquæ invenientur dicendo ut cubus Radii ad cubum sinus anomaliæ mediæ propositæ ita hæc maxima æquatio, ad quæsitam. Q. E. D.



389. Annihilatur prima æquatio in 90. gradu anomaliæ mediæ & in primo, negativa fit in secundo quadrante, positiva in tertio, negativa iterum in quarto.

Etenim in 90. gradu anomaliæ mediæ OM coincidit cum OH ex constructione, sicque linea fH non amplius secat lineam OM in E, evanescit itaque ME sinus primæ Æquationis.

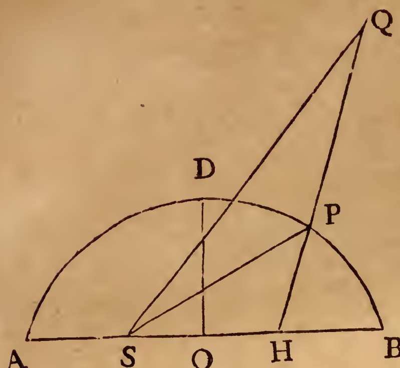
Excedat verò anomalia media 90. fiatque

DE MOTU CORPORUM.

que alia figura secundum constructionem à nobis indicatam, sit locus verus Planetæ P, describatur circulus BQNA, in magnum axem BA, sitque PR perpendicularis à loco Planetæ in axem ducta, quæ producta secet circulum BQNA in Q, ducatur QO, in quam ex sole S, ducatur perpendiculum SF, cui æqualis sumatur arcus QN, erit NOB anomalia media, ducaturin lineam ON perpendicularis OM quæ terminetur in M per perpendiculum à foco altero H ductum, erit ergo MH parallela ON & MHB æqualis anomaliæ mediæ, ex H ducatur ad Planetam linea HP, erit ergo angulus MHP angulus anomaliæ mediæ addendus ut prodeat motus medius æquatus PHB, fiat etiam super OH Triangulum OfH simile & æquale Triangulo SFO, & producatur Hf donec secet in E lineam OM productam; Ducatur ex Q ad T linea QT, parallela lineæ NO ideoque etiam parallela lineæ MH, & erit OT æqualis QG sinui arcus QN. Ducatur etiam linea PM quæ producta secabit in C lineam QT productam & angulus C erit æqualis angulo HMC, qui erit æqualis angulis MHP & MPH (per 32. 1mi. Elem.) sed ob exiguitatem lineæ MH respectu MP, omittitur angulus MPH, & angulus HMC, sive angulus C, pro angulo MHP æquatione motus medii assumitur; Denique ex E per Q ducatur linea EQK quæ lineam PMC secabit in K erit angulus EQT æqualis angulis K & C: (per 32. I. Elem.) ergo si ex angulo EQT subtrahatur angulus K remanebit angulus C, sive æquatio quæsita, est vero angulus EQT secunda æquatio & angulus K sive EKM prima, ut liquet ex constructione, ergo in secundo quadrante prima æquationis pars substrahi debet sive negative sumi, secunda verò positiva remanet.

In tertio quadrante hæc eadem figura deorsum convertatur sub axe AB, liquebitque angulum MHB seu Anomaliam mediam, quæ hic 180° gradus superat, angulo MHP sive angulo C esse minuendam ut habeatur anomalia æquata PHB, ideoque cum sit $C = EQT - K$ secunda æquatio EQT substractivè sumi debebit, & prima K additivè.

In ultimo denique quadrante invertatur figura prima, liquebit ex anomaliâ mediâ IHB, seu HMP, detrahendum esse angulum IHP, seu HMP, sive angulum C ipsi æqualem, ut prodeat motus medius æquatus sed angulus C est summa utriusque partis æquationis, nempe anguli K, & anguli



guli K Q C five T Q E, ergo in ultimo quadrante utraque æquatio negativè affumitur.

390. Exemplum fit in orbe Martis A D B, qui omnium, fi orbem Mercurii excipias, eft maximè excentricus. Excentricitas SO, fit partium 141. & femiaxis major = 1523. 69. erit femiaxis minor O D = 1516. 93. femilatus rectum feu $\frac{1}{2}$ L = 1510. 184. differentia inter femiaxem minorem & femilatus rectum $\frac{1}{2}$ L, = 6. 746. = *D*. Differentia inter logarithmum radii & logarithmum quadrati axis A B, per tabulas.

erit = 3. 0321367. 62.
Log. A O + O D = 3. 3097621. 36.
Log. *D* = 0. 7580391. 75.
Summa = 7. 0999380. 73.

æqualis logarithmo finûs anguli *Y*, per primam proportionem Newtoni, atque hinc in tabulis invenietur angulus *Y*, minutorum primorum 4′, fecundorum 21. 14″.

Differentia inter logarithmum radii & Logarithmum facti 3 A O².

erit = 3. 1570755. 62.
Log. facti 2 S H × *D* = 3. 5093282. 75.
Summa = 6. 6664038. 37.

æqualis logarithmo finûs anguli *Z*, qui per tabulas invenitur effe minutorum fecundorum 100. 39″. Inventis jam æquationibus maximis *Y* + *Z*, anguli *V*, & *X*, pro quolibet anomaliæ mediæ gradu facilè reperiuntur v. gr. pro 45°.

Eft enim Log. anguli *Z* = 2. 0016853. 46.
Log. cubi finûs 45°. = 29. 5484550.
horum fumma = 31. 5501403. 46.

Ex hâc fumma detrahe logarithmum cubi radii 30. 0000000; refiduum 1. 5501403. 46. erit logarithmus finûs anguli X, qui per tabulas invenietur effe minutorum fecundorum 35. 41″. Quarè cum in 45°. anomaliæ gradu angulus *V*, æqualis fit angulo *Y*, erit motus medius æquatus, feu angulus P H B, = 45°, 4′, 56. 55″.

Jam verò ut inveniatur anomalia vera, feu angulus P S B, dato angulo P H B, producatur H P ad Q ut fit P Q = S P, & erit H Q = A B, ex natura ellipfeos, atque angulus P H B, æqualis fummæ angulorum Q S H, S Q H; Quarè femifumma laterum SH, HQ, eft ad eorum femi differentiam, hoc eft, A O + S O, ad A O − S O, ut tangens dimidii anguli P H B, ad tangentem femidifferentiæ angulorum Q S H, S Q H.

Log. tang. $\frac{1}{2}$ P H B = 9. 6181066. 717.
Log. A O − S O = 3. 1407247. 98.
horum fumma = 12. 7588314. 698.
Log. A O + S O = 3. 2212068. 41.
Differentia = 9. 5376246. 246.
= Log. tang. Ang. $\frac{1}{2}$ Q S H − $\frac{1}{2}$ S Q H.

Undè invenietur $\frac{1}{2}$ Q S H − $\frac{1}{2}$ S Q H = 19°. 1′, 35. 5″; & hinc anomalia vera = Q S H − S Q H (five − Q S P) = 38°. 3′ 11″, quam proximè; Nam fi ex datâ hâc anomaliâ verâ, quæratur (371) anomalia media, invenietur effe 45°. graduum quam proximè.

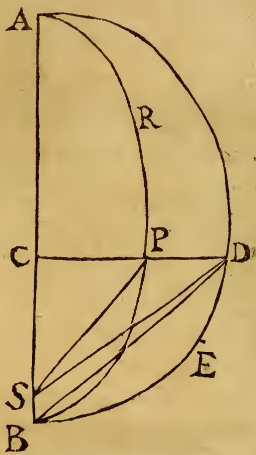
De Motu Corporum.

SECTIO VII.

De corporum ascensu & descensu rectilineo.

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XXIV.

Posito quodvis centripeta sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ locorum à centro, spatia definire quæ corpus rectà cadendo datis temporibus describit.



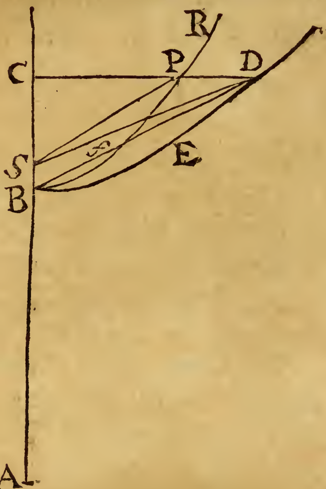
Cas. 1. Si corpus non cadit perpendiculariter, describet id (per corol. 1. prop. XIII.) sectionem aliquam conicam cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit sectio illa conica *ARPB* & umbilicus ejus *S*. Et primo si figura ellipsis est; super hujus axe majore *AB* describatur semicirculus *ADB*, & per corpus decidens transeat recta *DPC* perpendicularis ad axem; actisque *DS*, *PS* erit area *ASD* areæ *ASP*, atque ideo etiam tempori proportionalis. Manente axe *AB* minuatur perpetuo latitudo ellipseos, & semper manebit area *ASD* tempori proportionalis. (e) Minuatur latitu-

(e) 391. Lemma. Si sectionis conicæ latus rectum ad axem transversum pertinens perpetuò minuatur, & tandem evanescat, manente sectionis axe transverso, omnes ad axem ordinatæ perpetuò minuuntur & tandem evanescunt, ac perimeter sectionis cum axe & umbilici cum axis verticibus coincidunt. Est enim, (ex conic.) ordinatæ cujusvis quadratum ad rectangulum abscissarum in ratione datâ lateris recti ad axem transversum; quarè si manente axe transverso, adeóq. & abscissarum rectangulo, latus rectum perpetuò minuatur ac tandem evanescat, ordinatæ quadratum adeóque & ordinata ipsa perpetuò minuitur & tandem evanescit, &c. perimeter sectionis conicæ cum axe coincidit. Porrò ordinata per umbilicum æqualis est dimidio lateri recto (Vid. sup. in Conicis, Theor. III. de Hyperbola & de Ellipsi & Cor. I. Theor. I. de Parab.) adeóque quadratum dimidii lateris recti est ad rectangulum ex distantiis umbilici à verticibus, ut latus rectum ad axem transversum, unde rectangulum sub quartâ parte lateris recti & axe transverso æquatur rectangulo ex distantiis umbilici à verticibus; quarè evanescente latere recto & manente axe transverso, rectangulum sub distantiis umbilici à verticibus nullum fit, & umbilicus cum proximo vertice coincidit.

392.

latitudo illa in infinitum: & orbe *APB* jam coincidente cum axe *AB* & umbilico *S* cum axis termino *B*, descendet corpus in rectâ *A C*, & area *A B D* evadet tempori proportionalis. Dabitur itaque spatium *AC*, quod corpus de loco *A* perpendiculariter cadendo tempore dato describit, si modo tempori proportionalis capiatur area *ABD*, & à puncto *D* ad rectam *AB* demittatur perpendicularis *DC* (f). *Q. E. I.*

Cas. 2. Si figura illa *RPB* hyperbola est, describatur ad eandem diametrum principalem *AB* hyperbola rectangula *BED*: & (g) quoniam areæ *CSP*, *CBfP*, *SPfB* sunt ad areas *CSD*, *CBED*, *SDEB*, singulæ ad singulas, in datâ ratione altitudinum *CP*, *CD*; & area *SPfB* proportionalis est tempori quo corpus *P* movebitur per arcum *PfB*; erit etiam area *SDEB* eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum hyperbolæ *RPB* in infinitum manente latere transverso, & coibit arcus *PB* cum rectâ *CB* & umbilicus *S* cum vertice *B* & recta *SD* cum rectâ *BD*. Proinde area *BDEB* proportionalis erit tempori quo corpus *C* recto descensu describit lineam *CB*. *Q. E. I.*



Cas.

(f) 392. *Perpendicularis DC.* Quoniam area ABD, semper proportionalis est tempori quo corpus ex puncto A per rectam AC cadit, erit totius semicirculi area ADEB, proportionalis tempori quo corpus idem cadendo percurrit lineam AB, & divisim area segmenti BDEB, proportionalis tempori quo corpus ex A, cadendo percurrit lineam CB.

(g) 393. *Quoniam areæ.* Nam 1°. triangula CSP, CSD quorum est basis communis CS, sunt ut altitudines CP, CD. 2°. areæ hyperbolicæ CBfP, CBED sunt ut eædem altitudines CP, CD (374) undè 3°. divisim CBfP − CSP ad CBED − CSD, hoc est, sector SPfB ad sectorem SDEB ut CP ad CD.

De Motu Corporum.

Cas. 3. (h) Et simili argumento si figura *RPB* parabola est, & eodem vertice principali *B* describatur alia parabola *BED*, quæ semper maneat data, interea dum parabola prior, in cujus perimetro corpus *P* movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum lineâ *CB*; fiet segmentum parabolicum *BDEB* proportionale tempori quo corpus illud *P* vel *C* descendet ad centrum *S* vel *B*. *Q. E. I.*

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA IX.

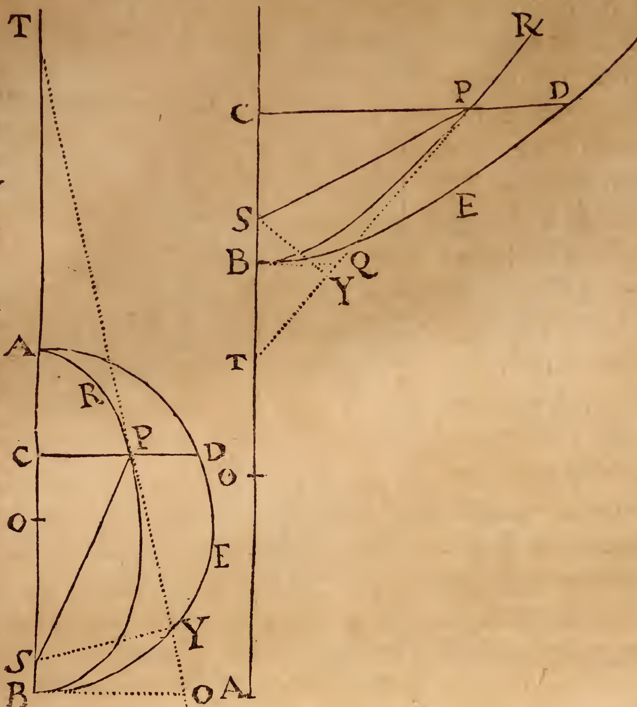
Positis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C *est ad velocitatem corporis centro* B *intervallo* BC *circulum describentis, in subduplicatâ ratione quam* AC *distantia corporis à circuli vel hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore* A, *habet ad figuræ semidiametrum principalem* $\frac{1}{2}$ AB.

Bisecetur *AB*, communis utriusque figuræ *RPB*, *DEB* diameter, in *O*; & agatur recta *PT*, quæ tangat figuram *RPB* in *P*, atque etiam secet communem illam diametrum *AB* (si opus est productam) in *T*; sitque *SY* ad hanc rectam, & *BQ* ad hanc diametrum perpendicularis, atque figuræ *RPB* latus rectum ponatur L. Constat per corol. IX. prop. XVI. quod corporis in lineâ *RPB* circa centrum *S* moventis velocitas in loco quovis *P* sit ad velocitatem corporis intervallo *SP* circa idem

(h) 394. *Simili argumento.* In Parabolâ 1°. CSP : CSD = CP : CD. 2°. sit latus rectum Parabolæ BfP = l, latus rectum Parabolæ BED = L, erit, ex naturâ Parabolæ $CP^2 = l \times CB$ & $CD^2 = L \times CB$, adeóque $CP : CD = \sqrt{l} : \sqrt{L}$, hoc est, in ratione datâ, ergò area CBEP est ad aream CBED, in eâdem ratione datâ CP ad CD; Quarè 3°. divisim SPfB : SDEB = CP : CD. Cætera se habent ut in demonstratione casûs secundi.

395. Scholium. Corporis per rectam CS, ad centrum S, cadentis velocitas in loco quovis C, est ad velocitatem corporis alterius ad eandem à centro distantiam circulum describentis, vel in ratione minore quam $\sqrt{2}$, ad 1, vel in ratione majore aut in eâ ipsâ ratione. In 1°. casu recta SC, usurpanda est pro ellipsi latitudinis evanescentis; in 2°. casu, recta SC, est hyperbola cujus latus rectum evanescit; in 3°. casu, recta SC, est parabola lateris recti evanescentis. Hæc omnia patent ex coroll. 7°. Prop. XVI.

396.



centrum circulum describentis in subduplicatâ ratione rectanguli $\frac{1}{2}$ L × *SP* ad *SY* quadratum. Est autem ex conicis *ACB* ad *CPq* ut 2*AO* ad L, ideoque $\frac{2CPq \times AO}{ACB}$ æquale L. Ergo velocitates illæ sunt ad invicem in subduplicatâ ratione $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ ad *SY quad.* (i) Porro ex conicis est *CO* ad *BO* ut *BO* ad *TO*, & compositè vel divisim ut *CB* ad *BT*. Unde vel dividendo vel componendo fit *BO* − vel + *CO* ad *BO* ut *CT* ad *BT*, id est, *AC* ad *AO* ut *CP* ad *BQ*; indeque $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ æquale est, $\frac{BQq \times AC \times SP.}{AO \times BC}$ Minuatur jam in infinitum figu-

(i) 396. *Porrò ex conicis.* (Vid. Lem. V. de Conicis, Cor. 2.) est TO : AO = AO : CO & quia AO = BO, invertendo & permutando est CO : BO = BO : TO & in Ellipsi compositè CO : BO = CB (seu CO + BO) : BT (seu BO + TO); & in hyperbolâ divisim, CO : BO = CB (seu CO − BO) : BT (seu BO − TO); Quarè in utraque sectione, CO : BO = CB : BT. Undè in ellipsi dividendo fit AC, seu BO − CO, aut AO − CO : BO = CT, seu BT − CB : BT, & in hyperbolâ, componendo AC seu CO + BO : BO = CT seu CB + BT : BT; adeóque in utrâque sectione AC : BO seu AO = CT : BT. Sed propter similitudinem triangulorum TCP, TBQ, CT : BT = CP : BQ, ergò AC : AO = CP : BQ, & $CP = \frac{BQ \times AC}{AO}$, ac $CP^2 = \frac{BQ^2 \times AC^2}{AO^2}$; indèque $\frac{CP^2 \times AO \times SP}{AC \times CB} = \frac{BQ^2 \times AC \times SP}{AO \times CB}$.

De Motu Corporum.

ræ RPB latitudo CP, ſic ut punctum P coeat cum puncto C, punctumque S cum puncto B, & linea SP cum linea BC, lineaque SY cum lineâ BQ; & corporis jam rectâ deſcendentis in lineâ CB velocitas fiet ad velocitatem] corporis centro B intervallo BC circulum deſcribentis; in ſubduplicatâ ratione ipſius $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad SYq, hoc eſt (neglectis æqualitatis rationibus SP ad BC & BQq ad SYq) in ſubduplicatâ ratione AC ad AO ſive $\frac{1}{2}$ AB. *Q. E. D.*

Corol. 1. Punctis B & S coeuntibus, fit TC ad TS ut AC ad AO.

Corol. 2. (k) Corpus ad datam à centro diſtantiam in circulo quovis revolvens, motu ſuo ſurſum verſo aſcendet ad duplam ſuam à centro diſtantiam.

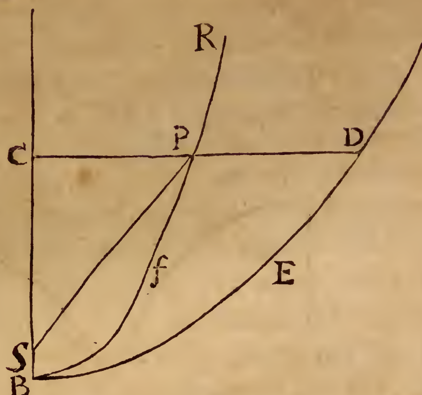
P R O-

(k) 397. *Corpus ad datam.* Si fuerit BED circulus, & punctum C coincidat cum puncto O, erit AC = AO = $\frac{1}{2}$ AB, adeóque velocitas per radium AO cadendo acquiſita eſt æqualis velocitati corporis centro B intervallo BO = AO circulum deſcribentis. Undè ſi corpus illud, ad datam à centro diſtantiam BO in circulo revolvens, ſurſum per OA, projiciatur cum eâ velocitate quâ circulum deſcribit, ſeu quam per AO cadendo acquiſivit, aſcendet ad punctum A, per ſpatium OA (25) ſeu ad duplam ſuam à centro B diſtantiam BA = 2 BO.

398. Coroll. 1. Velocitas in puncto quovis C, eſt ad velocitatem in alio puncto c, in ratione ſubduplicatâ rectanguli AC × BC, ad rectangulum Ac × Bc. Nam velocitas in C, eſt ad velocitatem corporis intervallo BC circulum deſcriben-

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA X.

Si figura BED *parabola est, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis* C *æqualis est velocitati quâ corpus centro* B *dimidio intervalli sui* BC *circulum uniformiter describere potest.*



Nam corporis parabolam *R P B* circa centrum *S* describentis velocitas in loco quovis *P* (per corol. VII. prop. XVI.) æqualis est velocitati corporis dimidio intervalli *S P* circulum circa idem centrum *S* uniformiter describentis. Minuatur parabolæ latitudo *C P* in infinitum eo, ut arcus parabolicus *P f B* cum rectâ *C B*, centrum *S* cum vertice *B*, & intervallum *S P* cum intervallo *B C* coincidat, & constabit propositio. *Q. E. D.*

P R O-

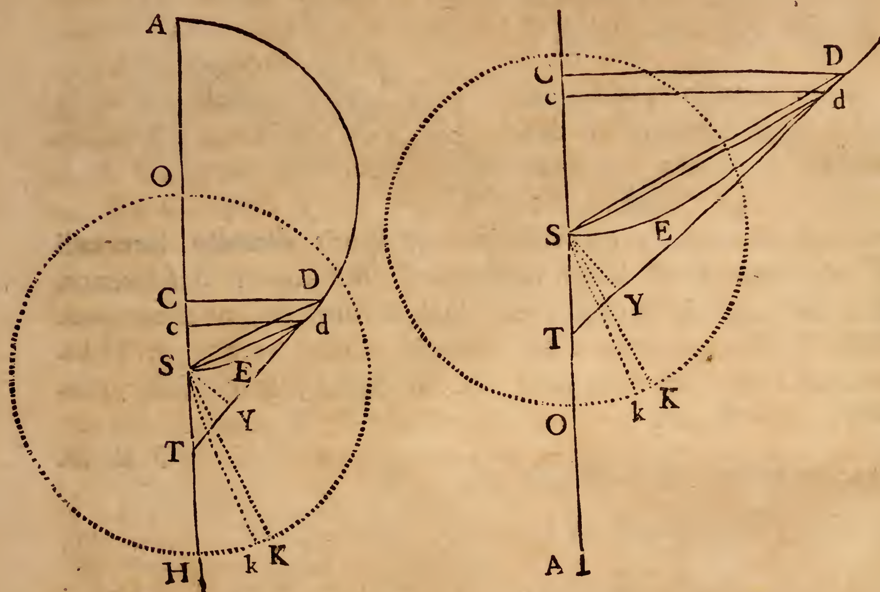
bentis ut $\sqrt{AC}$ ad $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$, (per hancce prop.); Velocitas corporis intervallo B C circulum describentis est ad Velocitatem corporis intervallo B c circulum describentis, (per Cor. 6. Prop. IV.) reciproce in ratione subduplicatâ Radiorum, hoc est, ut $\sqrt{Bc}$ ad $\sqrt{BC}$; Denique Velocitas Corporis intervallo Bc circulum describentis est ad Velocitatem in c corporis ex A cadentis ut $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$ ad $\sqrt{Ac}$ (per hanc propositionem); Ergo per compositionem rationum) est velocitas in C ad velocitatem in c, in ratione compositâ ex ratione $\sqrt{AC}$ ad $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$, ratione $\sqrt{Bc}$ ad $\sqrt{BC}$, & ratione $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$ ad $\sqrt{Ac}$, sive ut $\sqrt{AC} \times \sqrt{Bc}$ ad $\sqrt{Ac} \times \sqrt{BC}$, hoc est, in ratione subduplicatâ rectanguli $AC \times Bc$ ad rectangulum $Ac \times BC$. Q. E. D.

399. Coroll. 2. Si fuerit B f P Parabola, corporis in ea moti velocitas in loco quovis P, erit ad velocitatem corporis ad distantiam S P, circulum describentis in ratione $\sqrt{2}$, ad 1; si sit Ellipsis in minori ratione, in majori verò si fuerit hyperbola (per Cor. 7. Prop. 16.) & latitudine orbis imminuta in infinitum ut coincidat BfP cum axe B C, erit corporis cadentis velocitas in loco quovis C ad velocitatem corporis ad distantiam BC circulum describentis ut $\sqrt{2}$ ad 1. adeóque $AC : \frac{1}{2}AB = 2 : 1$ in 2°. casu ratio A C, ad $\frac{1}{2}AB$, minor erit quam ratio 2 ad 1; in 3°. casu major, & contrà.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XI.

Iisdem positis, dico quod area figuræ DES, *radio indefinito* SD *descripta, æqualis sit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ* DES *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando, eodem tempore describere potest.*



Nam concipe corpus *C* quam minimâ temporis particulâ lineolam *Cc* cadendo describere, & interea corpus aliud *K*, uniformiter in circulo *OKk* circa centrum *S* gyrando, arcum *Kk* describere. Erigantur perpendicula *CD*, *cd* occurrentia figuræ *DES* in *D*, *d*. Jungantur *SD*, *Sd*, *SK*, *Sk* & ducatur *Dd* axi *AS* occurrens in *T*, & ad eam demittatur perpendiculum *SY*.

Cas. 1. Jam si figura *DES* circulus est vel hyperbola rectangula, bisecetur ejus transversa diameter *AS* in *O*, & erit *SO*

SO dimidium lateris recti. ([l]) Et quoniam est *TC* ad *TD* ut *Cc* ad *Dd*, & ([m]) *TD* ad *TS* ut *CD* ad *SY*, erit ex æquo *TC* ad *TS* ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Sed (per corol. I. prop. XXXIII.) ([n]) est *TC* ad *TS* ut *AC* ad *AO*, puta si in coitu punctorum *D*, *d* capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo *AC* est ad *AO* seu *SK* ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Porro corporis descendentis velocitas in *C* est ad velocitatem corporis circulum intervallo *SC* ci ca centrum *S* describentis in subduplicatâ ratione *AC* ad *AO* vel *SK* (per prop. XXXIII.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis describentis circulum *OKk* in subduplicatâ ratione *SK* ad *SC* (per corol. VI. prop. IV.) & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc est lineola *Cc* ad arcum *Kk* in subduplicatâ ratione *AC* ad *SC*, ([o]) id est in ratione *AC* ad *CD*. Quare est $CD \times Cc$ æquale $AC \times Kk$, & ([p]) propterea *AC* ad *SK* ut $AC \times Kk$ ad $SY \times Dd$, indeque $SK \times Kk$ æquale $SY \times Dd$, & $\frac{1}{2}\, SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{2}\, SY \times Dd$, id est area *KSk* æqualis areæ *SDd*. Singulis igitur temporis particulis generantur arearum duarum particulæ *KSk*, & *SDd*, quæ, si magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per corollarium lemmatis IV.) areæ totæ simul genitæ sunt semper æquales. *Q. E. D.*

Cas.

(l) * *Et quoniam est TC ad TD ut Cc ad Dd.* Quia in Triangulo TCD, est cd parallela basi CD, ideoque TC : TD ut partes correspondentes Cc, Dd.

(m) * *Et TD ad TS ut CD ad SY.* Sunt enim propter angulos Y, & C, rectos & angulum T, communem, triangula TCD, TSY, similia.

(n) * *Est TC : TS.* Nam punctis D, d, coeuntibus, fit TD, tangens; adeóque (396.) TC : TS = AC : AO.

(o) * *In ratione AC ad SC, id est in ratione AC ad CD.* Est enim SED, circulus, vel hyperbola æquilatera cujus vertices S & A, sed in circulo & hyperbolâ æquilaterâ ob axium æqualitatem est $CD^2 = AC \times SC$, & proinde $AC : CD = CD : SC$, & hinc AC ad CD, in ratione subduplicatâ AC ad SC.

(p) * *Et propterea.* Nam ex superius demonstratis $AC : SK = CD \times Cc : SY \times Dd$.

 * *Hoc*

DE MOTU CORPORUM.

Cas. 2. Quod si figura *DES* parabola sit, invenietur esse ut supra $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$ ut *TC* ad *TS*, hoc (q) est ut 2 ad 1, ideoque $\frac{1}{4}$ $CD \times Cc$ æquale esse $\frac{1}{2}$ $SY \times Dd$. Sed corporis cadentis velocitas in *C* æqualis est velocitati quâ circulus intervallo $\frac{1}{2}$ *SC* uniformiter describi possit (per prop. XXXIV.) Et hæc velocitas ad velocitatem quâ circulus radio *SK* describi possit, hoc est, lineola *Cc* ad arcum *Kk* (per corol. VI. prop. IV.) est in subduplicatâ ratione *SK* ad $\frac{1}{2}$ *SC*, id (r) est, in ratione *SK* ad $\frac{1}{2}$ *CD*. Quare est $\frac{1}{2}$ $SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{4}$ $CD \times Cc$, ideoque æquale $\frac{1}{2}$ $SY \times Dd$, hoc est, area *KSk* æqualis areæ *SDd*, ut supra. *Q. E. D.*

PRO-

(q) * *Hoc est ut* 2 *ad* 1. Cum enim sit T D tangens, C D ordinata, S C abscissa, est ex naturâ Parabolæ T S = S C, adeóque T C : T S = 2. 1.

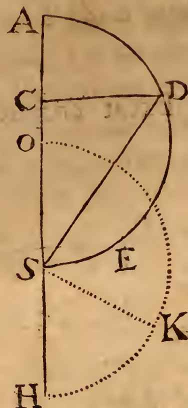
(r) * *Id est in ratione* S K, *ad* $\frac{1}{2}$ C D. Nam (ex hyp.) S K, æqualis est dimidio lateri recto, quarè ex naturâ parabolæ $2SK \times SC = CD^2$, & $\frac{1}{2} SC \times SK = \frac{1}{4} CD^2$. Undè $SK : \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} CD : \frac{1}{2} SC$, & hinc S K ad $\frac{1}{2}$ C D in ratione subduplicatâ S K ad $\frac{1}{2}$ S C.

400. Coroll. 1. Si fuerit S E D circulus cujus diameter S A, corpus ex loco A demissum & solâ vi centripetâ sollicitatum cadendo percurret totam diametrum A S, eodem tempore, quo corpus aliud ad dimidiam distantiam S O, describet semicirculum O K H; sunt enim areæ semicirculorum O K H & S E A *æquales*, tempus verò quo corpus ex *A demissum* cadendo percurrit spatium quodvis A C est ad tempus quo percurret A S, ut area A S D ad semicirculum A D E S, sive ut sector O S K ad sectorem quem describit corpus in circulo OKH revolvens æqualem semicirculo A D E S, qui sector erit ipse semicirculus O K H.

401. Coroll. 2. Si corpus ad distantiam S A, circulum describens omni motu revolutionis privaretur, & ad centrum virium S, solâ vi centripetâ urgeretur, tempus quo ex A usque ad S cadendo perveniret, esset ad tempus unius revolutionis in circulo ut 1, ad $4\sqrt{2}$: est enim tempus periodicum corporis ad distantiam SO circulum describentis (hoc est, duplum ejus

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XXV.

Corporis de loco dato A cadentis determinare tempora descensus.



Super diametro *AS* distantiâ corporis a centro sub initio, describe semicirculum *ADS*, ut & huic æqualem semicirculum *OKH* circa centrum *S*. De corporis loco quovis *C* erige ordinatim applicatam *CD*. Junge *SD*, & areæ *ASD* æqualem constitue sectorem *OSK*. (f) Patet per prop. xxxv. quod corpus cadendo describet spatium *AC* eodem tempore quo corpus aliud, uniformiter circa centrum *S* gyrando, describere potest arcum *OK*. *Q. E. F.*

PRO-

ejus temporis quo corpus ex A, cadendo percurrit AS, (400) ad tempus periodicum corporis ad distantiam AS (= 2 SO) in circulo revolventis ut Radices quadratæ cuborum distantiarum 1 & 2. sive ut 1, ad $\sqrt{8}$ (191), hoc est, ut 1 ad $2\sqrt{2}$; ergo tempus quo corpus cadendo percurrit AS, est ad tempus periodicum corporis ad distantiam AS in circulo revolventis ut $\frac{1}{2}$ ad $2\sqrt{2}$, hoc est, ut 1, ad $4\sqrt{2}$.

402. Scholium. Si planetarum orbitas circulares esse suponamus, vimque centripetam quâ in suis orbitis retinentur, in duplicatâ ratione distantiarum à centro decrescere, ex datis temporibus periodicis, facile erit tempora definire quibus usque ad centrum sui motus cadendo pervenirent. Exempli causâ, cum tempus periodicum lunæ circà terram revolventis sit dierum 27. hor. 7. minutorum primorum 43, hoc est, minutorum primorum 39343, erit $4\sqrt{2}$, ad 1, hoc est, quam proximè 565685, 100000, ut 39343, ad 6955. 5, seu dies 4, hor. 19, min. prim. 55, & secund. 30, tempus quo luna cadendo ad centrum telluris perveniret.

(f) * *Patet per prop. XXXV.* Cum enim semicirculorum ADS, OKH, & sectorum OSK, ASD, areæ æquales sint respectivè, erit quoque sector HSK æqualis segmento SED, adeóque (401.) tempus quo corpus ex A cadendo percurrit CS, æquatur tempori, quo corpus aliud in circulo OKH revolvens describit arcum KH, & quoniam tempus per AS cadendo æquatur tempori quo corpus revolvens totum semicirculum OKH, describit (401), erit tempus per AC, æquale tempori per arcum OK.

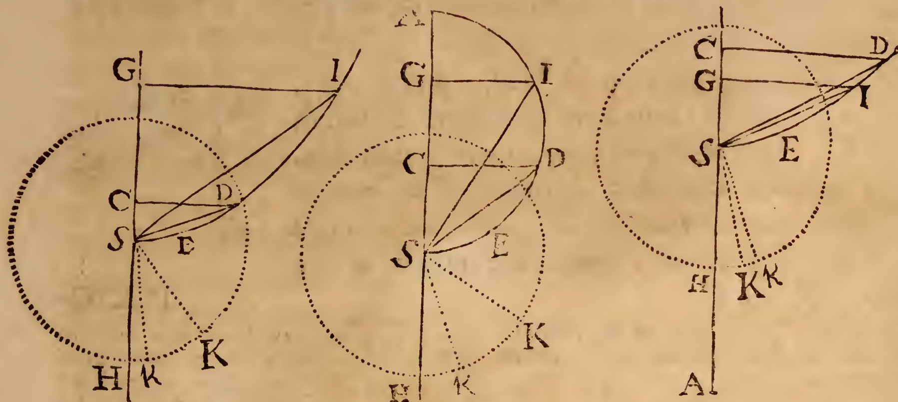
403. Coroll. Arcus OK, æqualis est summæ arcus AD & lineæ CD. Est enim sector ASD, æqualis sectori AOD, + triangulo DOS, sive $\frac{1}{2}$ AO × AD + $\frac{1}{2}$ AO × CD: sector verò OSK, = $\frac{1}{2}$ SO × OK = $\frac{1}{2}$ AO × OK, sed est sector OSK = ASD. Quarè $\frac{1}{2}$ AO × OK = $\frac{1}{2}$ AO × AD + $\frac{1}{2}$ AO × CD, atquè adeò OK = AD + CD. Si itaque fiat ut radius ad arcum grad. 57. 29578, qui radio æqualis est, ita CD, ad 4um. *B*, erit *B* arcus rectæ CD æqualis, & obtinebitur OK=AD+*B*. Hinc dato tempore quo corpus datam AS ex puncto A cadendo percurrit, invenitur tempus quo datam rectæ AS partem AC describit, si fiat ut semicirculus OKH, seu grad. 180, ad arcum AD + *B*, seu OK, ità tempus quo corpus ex A cadendo percurrit AS, ad tempus quo percurrit AC.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XXVI.

Corporis de loco dato sursum vel deorsum projecti definire tempora ascensus vel descensus.

Exeat corpus de loco dato *G* secundum lineam *GS* cum ve-



locitate quâcumque. In duplicatâ ratione hujus velocitatis ad uniformem in circulo velocitatem, quâ corpus ad intervallum datum *SG* circa centrum *S* revolvi posset, cape *GA* ad $\frac{1}{2}$ *AS*. Si ratio illa est numeri binarii ad unitatem, punctum *A* infinite distat, quo casu parabola vertice *S*, axe *SG*, latere quovis recto describenda est. Patet hoc per prop. XXXIV. Sin ratio illa minor vel major est quam 2 ad 1, priore casu circulus, posteriore hyperbola rectangula super diametro *SA* describi debet. ([t]) Patet per prop. XXXIII. Tum centro *S*, intervallo æquan-

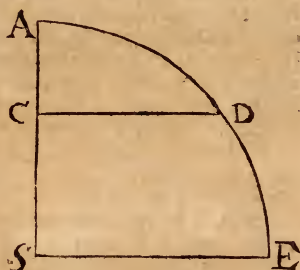
(t) * *Patet per Prop. XXXIII.* Scilicet, fingatur sectio conica latitudinis quam minimæ, ut proximè coincidat cum axe AB, & in ea fingatur esse punctum G ex quo corpus movetur cum datâ velocitate, primo quæritur species illius sectiones, & ex proportione velocitatis datæ ad velocitatem quâcum corpus ad intervallum datum SG circa Centrum S revolveretur, agnoscetur, ex Cor. 7. Prop. XVI: &, si sit Ellipsis vel Hiperbola ejus axis major ex velocitate in G datâ etiam innotescet, per Prop. XXXIII, quia velocitas corporis cadentis in puncto G, est ad velocitatem corporis in distantia SG revolventis in subduplicatâ ratione distantiæ puncti G à vertice ulteriore Ellipsis vel Hyperbolæ ad ejus semi Axem, unde

æquante dimidium lateris recti, describatur circulus HkK, & ad corporis descendentis vel ascendentis locum G, & locum alium quemvis C, erigantur perpendicula GI, CD occurrentia conicæ sectioni vel circulo in I ac D. Dein junctis SI, SD, fiant segmentis $SEIS$, $SEDS$ sectores HSK, HSk æquales, & per prop. XXXV. corpus G describet spatium GC eodem tempore quo corpus K describere potest arcum Kk. *Q. E. F.*

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XII.

Posito quod vis centripeta proportionalis sit altitudini seu distantiæ locorum à centro, dico quod cadentium tempora, velocitates & spatia descripta sunt arcubus, arcuumque sinibus rectis & sinibus versis respectivè proportionalia.

Cadat corpus de loco quovis A secundum rectam AS; & centro virium S, intervallo AS, describatur circuli quadrans AE, sitque CD sinus rectus arcus cujusvis AD; & corpus A, tempore AD, cadendo describit spatium AC, inque loco C acquiret velocitatem CD.



Demonst-

unde si fiat GA ad $\frac{1}{2}SA$ in duplicatâ ratione velocitatis in G ad velocitatem corporis in distantiâ SG revolventis, erit A vertex ulterior Ellipsis vel Hyperbolæ, & $\frac{1}{2}SA$ semi Axis quæsitus.

Fiat ergo in vertice S Parabola quævis, si curva evanescens in quâ G est, sit Parabola, vel fiat Circulus, vertice S Diametro SA, si sit Ellipsis; vel Hyperbola æquilatera eâdem Diametro si ea curva sit Hyperbola, & si Corpus ex G perveniat in C, erectis usque ad curvas descriptas perpendicularibus GI. CD, erunt segmenta SEI, SED proportionalia temporibus quibus corpus propositum ex G ad S, & ex C ad S movebitur per Prop. XXXII: *Sed per Prop. XXXV*, corpus G spatia GS, CS, iisdem temporibus cadendo percurrit, quibus corpus K, describit arcus KH, kH; eodem igitur tempore percurritur GC, quo Kk.

* 404.

(u) Demonstratur eodem modo ex propositione x, quo propositio xxxii, ex propositione xi demonstrata fuit.

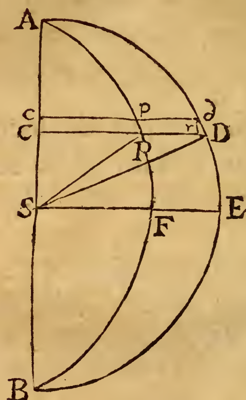
Corol. 1. (x) Hinc æqualia sunt tempora, quibus corpus unum de loco *A* cadendo pervenit ad centrum *S*, & corpus aliud revolvendo describit arcum quadrantalem *A D E*.

Corol. 2. Proinde æqualia sunt tempora omnia quibus corpora de locis quibusvis ad (y) usque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per corol. iii. prop. iv.) æquantur.

PRO-

(u) * 404. *Demonstratur eodem modo.* Nam si corpus non cadit perpendiculariter, describet id (per Cor. 1. Prop. X.) ellipsim aliquam A P F B, cujus centrum congruit cum centro virium S; Super hujus ellipseos axe majore A B, describatur semicirculus A D B, & per corpus decidens transeat recta D P C perpendicularis ad axem, actisque D S, P S, erit area A S D, areæ A S P, atque adeò etiam tempori proportionalis. Manente axe AB, minuatur perpetuò latitudo Ellipseos, & semper manebet area A S D, tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum, & orbe A P B jam coincidente cum axe A B, puncto P cum C, & F cum S, descendet corpus in rectâ A C, & area A S D, seu huic proportionalis arcus A D, evadet tempori proportionalis. In rectâ A C capiatur linea quam minima C c, agaturque c d, parallela C D, & circulum secans in puncto d, ex quo ad C D, demittatur perpendiculum d r, & arcus D d proportionalis erit tempori quo percurritur C c, (ex demonstr.) atque adeò coeuntibus punctis C c, & d D, erit velocitas in C, ut $\frac{C c}{D d}$ (5, 145), sed ob triangula D r d, S C D, similia C c, seu d r : d D = C D : S D, id est, $\frac{C c}{d D} = \frac{C D}{S D}$. Quarè velocitas in loco C, est ut $\frac{C D}{S D}$, hoc est, ob constantem S D, ut C D. Q. E. D.

(x) * *Cor.* 1. *Hinc æqualia.* Nam per coroll. 2. prop. X. tempora revolutionum in ellipsibus quibusvis APF, ADB, adeóque & tempora per ellipseon quadrantes A P F seu A S, A D E, sunt æqualia.



(y) * *Ad usque centrum.* Ex quiete cadunt.

405. Æqualia sunt tempora quibus corpus unum de loco A cadendo pervenit ad locum C, & corpus aliud revolvendo describit arcum circuli A D; Cum enim corpus in circulo uniformiter revolvatur, erit tempus per A D ad tempus per A E seu ad tempus per A S, ut arcus A D, ad quadrantem A E, sed est etiam tempus per A C, ad tempus per A S, ut arcus A D, ad quadrantem A E, ergò tempus per A C, æquatur tempori per A D.

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XXVII.

Positâ cujuscumque generis vi centripetâ, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis rectâ ascendentis vel descendentis tum velocitas in locis singulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.

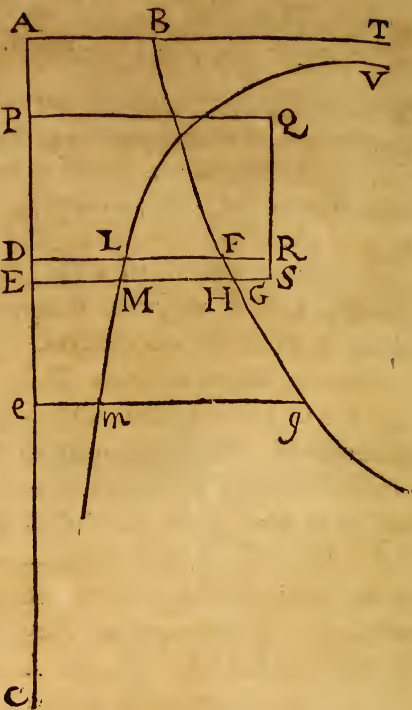
De loco quovis *A* in rectâ *ADEC* cadat corpus *E*, (z) deque loco ejus *E* erigatur semper perpendicularis *EG*, vi centripetæ in loco illo ad centrum *C* tendenti proportionalis: Sitque *BFG* linea curva quam punctum *G* perpetuo tangit. Coincidat autem *EG* ipso motus initio cum perpendiculari *AB*, & erit corporis velocitas in loco quovis *E* (a) ut recta, quæ potest aream curvilineam *ABGE*. *Q. E. I.*

In *EG* capiatur *EM* rectæ, quæ potest aream *ABGE*, reciprocè proportionalis, & sit *VLM* linea curva, quam punctum *M* perpetuo tangit, & cujus asymptotos est recta *AB* producta; & erit tempus, quo corpus cadendo describit lineam *AE*, ut area curvilinea *ABTVME*. *Q. E. I.*

(z) * *Deque loco ejus E.* Id est, per omnia lineæ A C puncta erigantur perpendicula ut E G, vi centripetæ in singulis illis punctis proportionalia, sitque B F G curva ad quam omnia illa perpendicula terminentur. Possunt autem perpendicula illa ad arbitrium assumi, dummodò singula vi centripetæ in singulis locis proportionalia sint.

(a) *Ut recta, quæ potest aream curvilineam A B G E.* In prioribus Editionibus erat, *ut areæ curvilineæ A B G E latus quadratum*; hæ scilicet phrases synonymæ sunt; frasis quæ hic juxta Editionem Londinensem adhibetur, veteribus Geometris est familiaris: Ea autem linea quæ potest figuram datam, est linea cujus quadratum est æquale illi figuræ datæ.

DE MOTU CORPORUM.



Etenim in rectâ AE capiatur linea quam minima DE datæ longitudinis, sitque DLF locus lineæ EMG, ubi corpus versabatur in D; & si ea sit vis centripeta, ut recta, quæ potest aream $ABGE$, sit ut descendentis velocitas: erit area ipsa in duplicatâ ratione velocitatis, id est, si pro velocitatibus in D & E, scribantur V & V + I, erit area $ABFD$ ut VV, & area $ABGE$ ut VV + 2VI + II, & divisim area $DFGE$ ut 2VI + II, ideoque $\frac{DFGE}{DE}$ ut $\frac{2VI+II}{DE}$, id (b) est si primæ quantitatum nascentium rationes sumantur, longitudo DF ut quantitas $\frac{2VI}{DE}$, ideoque etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$. Est autem tempus, quo corpus cadendo describit lineolam

(b) 406. * *Id est, si primæ quantitatum nascentium &c.* Seu coeuntibus punctis, D & E, F & G, fit area DFGE, æqualis rectangulo DF × DE (107) & velocitatis finitæ V, incrementem nascens I, evanescit respectu V, (107) ac proinde cum sit I : V = II : VI, quadratum II, evanescit respectu rectanguli VI, aut 2VI; Quarè in hoc casu $\frac{DFGE}{DE} = \frac{DF \times DE}{DE} = DF$, & $\frac{2VI+II}{DE} = \frac{2VI}{DE}$; Est igitur longitudo DF, ut quantitas $\frac{2VI}{DE}$, ideóque etiam, ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$: Quoniam autem velocitas per spatium evanescens DE, est uniformis (145), si tempus quo DE percurritur, dicatur T, erit $T = \frac{DE}{V}$, (5). Est autem vis ut $\frac{I}{T}$ (13) adeóque si loco T ponatur $\frac{DE}{V}$, erit vis ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc est, ut longitudo DF, *ergò vis ipsi* DF, *vel* EG *&c.*

* Por-

neolam *D E*, ut lineola illa directè & velocitas V inversè, estque vis ut velocitatis incrementum I directè & tempus inversè, ideoque si primæ nascentium rationes sumantur, ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc est, ut longitudo *D F*. Ergo vis ipsi *D F* vel *E G* proportionalis facit ut corpus eâ cum velocitate descendat, quæ sit ut recta quæ potest aream *ABGE*. *Q. E. D.*

(c) Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola *DE* describatur, sit ut velocitas inversè, ideoque inversè ut linea recta quæ potest aream *ABFD*; (d) sitque *DL*, atque ideo area nascens *D L M E*, ut eadem linea recta inversè: erit tempus ut area *DLME*, & summa omnium temporum ut summa omnium arearum, hoc est (per corol. lem. IV.) tempus totum quo linea *A E* describitur ut area tota *ATVME*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si *P* sit locus, de quo corpus cadere debet, ut urgente aliquâ uniformi vi centripetâ notâ (qualis vulgo supponitur gravitas) velocitatem acquirat in loco *D* æqualem velocitati, quam corpus aliud vi quâcunque cadens acquisivit eodem loco *D*, & in perpendiculari *DF* capiatur *DR*, quæ sit ad *DF* ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco *D*, & compleatur rectangulum *PDRQ*, eique æqualis abscindatur area *A B F D*; erit *A* locus de quo corpus alterum cecidit. Namque completo rectangulo *D R S E*, (e) cum sit area *A B F D* ad aream *DFGE* ut *VV* ad 2*VI*, ideoque ut $\frac{1}{2}$ V ad I, id est, ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæ-

(c) * *Porrò cum tempus.* Tempus enim est ut spatium uniformiter percursum directè & velocitas inverse (5), quarè si spatium constans fuerit, tempus est ut velocitas inverse.

(d) * *Sitque* D L. Est enim D L, ut D L in constantem D E ducta, hoc est, ut area nascens D L M E, sed D L est ut latus quadratum areæ A B F D inversè (per constr.) ergò area nascens D L M E, est ut idem latus quadratum inverse, hoc est, ut velocitas inversè, sive, ut tempus per D E. *Quarè summa omnium temporum est ut summa omnium arearum nascentium. Hoc est, &c.*

(e) * *Cum* (coeuntibus punctis D, E) *sit area A B F D ad aream D F G E, ut VV, ad 2V × I*; Si enim A sit locus ex quo corpus cadere debet vi quâcunque ut eamdem in D velocitatem V acquisiverit ac si ex P vi gravitatis decidisset erit area ABFD, ut V V, & area D F G E, ut 2 V I + I I, hoc est, (406) ut 2 V I. Quare A B F D: D F G E = V V : 2 V I = $\frac{1}{2}$ V : I.

 * Et

De Motu Corporum.

inæquabili cadentis; (f) & similiter area $PQRD$ ad aream $DRSE$ ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; sintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum nascentium) ut vires generatrices, id est, ut ordinatim applicatæ DF, DR, ideoque ut areæ nascentes $DFGE$, $DRSE$; erunt ex æquo areæ totæ $ABFD$, $PQRD$ ad invicem ut semisses totarum velocitatum, & propterea, ob æqualitatem velocitatum, æquantur.

Corol. (g) 2. Unde si corpus quodlibet de loco quocunque D datâ cum velocitate vel sursum vel deorsum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco

(f) * *Et similiter area PQRD ad aream DRSE*, hoc est, linea P D ad lineam D E (propter altitudinem communem DR=SE) *ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis*, scilicet cum velocitas in D sit V, ejus incrementum in E sit X, ex naturâ gravitatis altitudines ex quibus corpus cadit sunt ut quadrata velocitatum in fine lapsus acquisitarum, ergo erit PD ad PE ut VV ad $VV + 2VX + X^2$, & dividendo $PD : DE = VV : 2VX + X^2$ (& omisso X^2 ut pote infinite parvo) $VV : 2VX = \frac{1}{2}V : X$; unde $PQRD : DRSE = \frac{1}{2}V : X$, sive invertendo $DRSE : PQRD = X : \frac{1}{2}V$; sunt verò incrementa illa I & X (13) ut vires generatrices id est ut DF ad DR, sive ut DFGE ad DRSE. Est ergo per hanc demonstrationem

$ABFD : DFGE = \frac{1}{2}V : I$

$DFGE : DRSE = DF : DR = I : X$

$DRSE : PQRD = X : \frac{1}{2}V$

Unde ex compositione rationum $ABFD : PQRD = \frac{1}{2}V \times I \times X : I \times X \times \frac{1}{2}V$ sive in ratione æqualitatis.

(g) * *Coroll.* 2. *demonstratur.* Sit A punctum ex quo corpus cadere debet ut acquirat in loco D velocitatem cum quâ sursum vel deorsum projicitur, erit, (ex Dem.) area A B g e proportionalis quadrato velocitatis corporis in loco e; Est autem (ex Dem.) area A B F D, æqualis rectangulo P Q R D, adeóque area A B g e $= PQRD + DFge$ si locus e loco D inferior fuerit, & $ABge = PQRD - DFge$, si locus e loco D superior, hoc est, si corpus sursum projectum sit; ergò velocitas cor-

loco *e*, erigendo ordinatam *eg*, & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco *D* ut eſt recta, quæ poteſt rectangulum *PQRD* areâ curvilineâ *DFge* vel auctum, ſi locus *e* eſt loco *D* inferior, vel diminutum, ſi is ſuperior eſt, ad rectam quæ poteſt rectangulum ſolum *PQRD*.

Corol 3. Tempus quoque innoteſcet erigendo ordinatam *em* reciproce proportionalem lateri quadrato ex $PQRD +$ vel $- DFge$, & capiendo tempus quo corpus deſcripſit lineam *De* ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit à *P* & cadendo pervenit ad *D*, ut area curvilinea *DLme* ad rectangulum $2\,PD \times DL$. Namque tempus quo corpus vi uniformi deſcendens deſcripſit lineam *PD* eſt ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineam *PE* in (h) ſubduplicatâ ratione *PD* ad *PE*, id eſt (lineola *DE* jamjam naſcente) in ratione *PD* ad $PD + \frac{1}{2}DE$ ſeu $2\,PD$ ad $2\,PD + DE$, & (i) diviſim, ad tempus quo corpus idem deſcripſit lineolam *DE* ut $2\,PD$ ad *DE*, ideoque ut rectangulum $2\,PD \times DL$ ad aream *DLME*; eſtque tempus quo corpus utrumque deſcripſit lineolam *DE* ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu deſcripſit lineam *De*, ut area *DLME* ad aream *DLme*, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum $2\,PD \times DL$ ad aream *DLme*.

corporis in loco e, eſt ut $\sqrt{PQRD \mp DFge}$; cumque ſit velocitas in D, ut $\sqrt{ABFD}$, ſive ut huic æqualis $\sqrt{PQRD}$ (ex Dem.) erit velocitas in e, ad velocitatem in D, ut $\sqrt{PQRD \mp DFge}$, ad $\sqrt{PQRD}$.

(h) * *In ſubduplicatâ ratione* PD, ad PE (27), *id eſt, lineola* DE, *jamjam naſcente in ratione* PD, *ad* PD, $+ \frac{1}{2}$ DE; quadratis enim his ultimis terminis fiet $PD^2 : PD^2 + PD \times DE + \frac{1}{4} DE^2$; & cum ſit PD quantitas finita; & DE naſcens, evaneſcit (107) $\frac{1}{4} DE^2$ reſpectu $PD \times DE$; adeóque $PD \times DE \mp \frac{1}{4} DE^2 = PD \times DB$. Undè eſt $PD^2 : PD^2 + PD \times DE + \frac{1}{4} DE^2 = PD^2 : PD^2 + PD \times DE = PD : PD + DE$, ſeu PE; eſt igitur PD : PE in ratione duplicatâ PD ad $PD + \frac{1}{2} DE$, atque adeò PD ad $PD + \frac{1}{2} ED$, in ratione ſubduplicatâ PD, ad PE.

(i) * *Et diviſim.* Tempus per PD, vi uniformi deſcriptum eſt ad tempus per DE, ut 2 PD, ad DE, adeóque ut rectangulum $2\,PD \times DL$, ad rectangulum $DE \times DL$, ſeu ad aream DLME; tempus per rectam PD, vi uniformi deſcriptam ſit T, tempus per DE, ſit θ, & tempus per De, ſit t, erit (ex Dem.) $T : \theta = 2\,PD \times DL : DLME$, eſtque idem tempus θ, quo utrumque corpus deſcribit lineam DE, ſiquidem utriuſque eadem eſt velocitate in D: ſed (ex conſtructione) tempus quo corpus

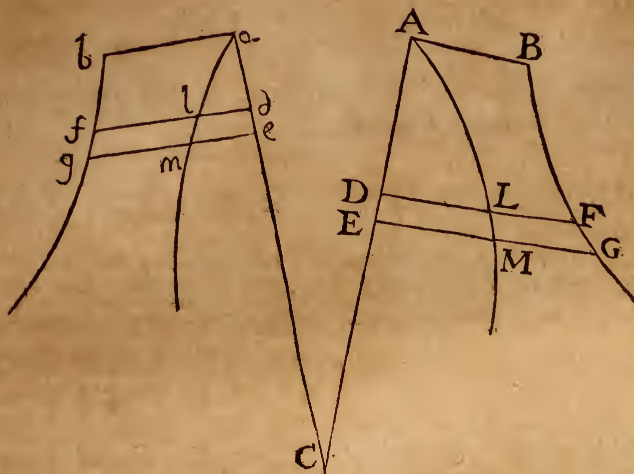
De Moto Corporum.

inæquabili motu defcribit lineam D E eft ad tempus quo defcribit lineam D e, ut area DLME, ad aream D L M e, ergo θ : T = D L M E : D L m e; unde ex æquo T : t = 2 P D × D L : D L m e.

407. Sit fpatium à corpore cadente defcriptum A E = x, velocitas in E acquifita = v, tempus quo A E, percurritur = t, vis centripeta in E, hoc eft, E G = y, erunt dx, dv, dt, quantitatum x, v, t, fluxiones feu incrementa nafcentia vel evanefcentia (146. 158), cumque velocitas per fpatium nafcens D E, fit uniformis (145) erit $v = \frac{dx}{dt}$ (5), ac proindè velocitatis incrementum $dv = \frac{ddx}{dt}$, fi fumatur dt, conftans (164) fed eft (13) $y = \frac{dv}{dt}$, adeóque fi loco dv, fubftituatur $\frac{ddx}{dt}$, invenietur $y = \frac{ddx}{dt^2}$. Hæ funt formulæ quas tradidit Varignonius in Comm. Parif. an. 1700. Harum formularum ope, datâ inter duas ex variabilibus quatuor y, x, v, t, æquatione quâvis, obtinebuntur tres æquationes quæ fimul quatuor duntaxat variabiles complectentur, ex quibus proindè æquationibus per calculum fluxionum & folitas reductiones inveniri poterit æquatio inter duas quaflibet ex quatuor variabilibus y, x, v, t, ut demonftravit Varignonius in Comm. Parif. an. 1700, qui in iifdem commentariis an, 1707. 1720. præclara de afcenfu & defcenfu corporum perpendiculari theoremata edidit.

408. Coroll. Cum fit juxtà fuperiores formulas $dt = \frac{dx}{v}$, & $dt = \frac{dv}{y}$, ac proindè $\frac{dx}{v} = \frac{dv}{y}$, vel $ydx = vdv$, erit $S. ydx = \frac{1}{2}v^2$. Sed ydx = E G × D E, feu fluxioni areæ $ABGE$; ergò (147) $S.\ ydx$ = areæ A B G E, $= \frac{1}{2}v^2$, & $v = \sqrt{2\,ABGE}$. Eft igitur ob conftantem 2, velocitas in loco E, ut recta quæ poteft aream curvilineam A B G E. Hinc eft 1us. cafus Prop. XXXIX. Newt. Quoniam verò $dt = \frac{dx}{v}$ & $v = \sqrt{2\,\overline{ABGE}}$, erit $dt = \frac{dx}{\sqrt{2ABGE}}$; Quare fi capitur EM $= \frac{1}{\sqrt{2ABGE}}$, erit dt = E M × dx = E M × D E, & fumptis utrinque fluentibus t = area A L M E. Hic eft cafus 2us. Prop. XXXIX. Newt.

409. Superior expreffio vis centripetæ y, $= \frac{dv}{dt}$ fi vis centripeta confideretur ut gravitas in centrum, fupponit maffam corporum aut eandem effe aut ponderibus proportionalem. Verùm fi pondera non fint maffis proportionalia, diverfæque inter fe maffæ conferantur, tum habenda eft maffarum ratio ut determinetur tota corporis gravitas, feu vis tota quâ centrum verfus urgetur. Sit vis illa = y, & maffa = m, erit quidem femper $v = \frac{dx}{dt}$ (5), at fiet $y = \frac{m\,dv}{dt}$. Etenim vis centripeta confiderari poteft ut potentia motrix, quæ corpori indefinenter applicata, motum in eo fuâ actione producit, quæque tempufculo evanefcente eadem conftanter permanet, & uniformiter agit (117). Porrò factum ex potentiâ motrice uniformiter agente & tempore actionis æquivalet quantitati actionis; crefcit enim actionis quantitas cum potentiâ motrice & tempore actionis proportionaliter, & factum ex maſsâ corporis & celeritate, feu quantitas motûs producti eft id quod actione illâ effectum eft, feu quantitati actionis æquipollet, cum neceffarius fit nexus inter quantitatem actionis & quantitatem effectûs & alter alteri æquivaleat. Quare $ydt = m\,dv$, & $y = \frac{m\,dv}{dt}$.



410. Si itaque pondera non ſupponantur maſſis proportionalia, & corpora duo A, a, quorum maſſæ M, m ad idem vel diverſa virium centra C, perpendiculariter cadant, earumque vires centripetæ in ſingulis locis E, e, ſint $Y = EG$, $y = eg$, velocitates V, v, ſpatia deſcripta $X = AE$, $x = ae$, tempora quibus deſcripta ſunt T, t, invenietur (409) $v = \frac{dx}{dt}$, $V = \frac{dX}{dT}$, & $y\,dt = m\,dv$, $Y\,dT = M\,dV$, adeóque (408), $S.\ y\,dx = abge = \frac{1}{2} mvv$; & ſimiliter $S.\ Y\,dX = ABGE = \frac{1}{2} MVV$, ob conſtantes M, m; undè $v = \frac{\sqrt{2abge}}{m}$, $V = \frac{\sqrt{2ABGE}}{M}$: proindèque $v : V = \frac{\sqrt{2abge}}{m} : \frac{\sqrt{2ABGE}}{M}$. Quarè $dt = \frac{dx}{v} = \frac{dx\sqrt{m}}{\sqrt{2abge}}$ & $dT = \frac{dX\sqrt{M}}{\sqrt{2ABGE}}$; undè ſi ponatur em, $= \frac{1}{\sqrt{2abge}}$ & $EM = \sqrt{2ABGE}$, erit $dt = de \times em \times \sqrt{m}$, & $dT = DE \times EM \times \sqrt{M}$, ac conſequenter $t = alme \times \sqrt{m}$: & $T = ALME \times \sqrt{M}$. Unde $t : T = alme \times \sqrt{m} : ALME \times \sqrt{M}$.

SECTIO VIII.

De inventione orbium in quibus corpora viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur.

PROPOSITIO XL. THEOREMA XIII.

Si corpus, cogente vi quâcunque centripetâ, moveatur utcunque, & corpus aliud rectà ascendat vel descendat, sintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

Descendat corpus aliquod ab *A* per *D*, *E*, ad centrum *C*, & moveatur corpus aliud a *V* in lineâ curvâ *VIKk*. Centro *C* intervallis quibusvis describantur circuli concentrici *DI*, *EK* rectæ *AC* in *D* & *E*, curvæque *VIK* in *I* & *K* occurrentes. Jungatur *IC* occurrens ipsi *KE* in *N*; & in *IK* demittatur perpendiculum *NT*; sitque circumferentiarum circulorum intervallum *DE* vel *IN* quam minimum, & habeant corpora in *D* & *I* velocitates æquales. Quoniam distantiæ *CD*, *CI* æquantur, erunt vires centripetæ in *D* & *I* æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas *DE*, *IN*; & si vis una *IN* (per legum corol. 2.) resolvatur in duas *NT* & *IT*, vis *NT*, agendo secundum lineam *NT* corporis cursui *ITK* perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in cursu illo, sed retrahet solummodo corpus à cursu rectilineo, facietque ipsum de orbis tangente perpetuo deflectere, inque viâ curvilineâ *ITKk* progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota consumetur: vis autem altera *IT*, secundum corporis cursum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit

nerabit ſibi ipſi proportionalem. (k) Proinde corporum in *D* & *I* accelerationes æqualibus temporibus factæ (ſi ſumantur linearum naſcentium *DE*, *IN*, *IK*, *IT*, *NT* rationes primæ) ſunt ut lineæ *DE*, *IT*: temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora autem quibus *DE* & *IK* deſcribuntur, ob æqualitatem velocitatum ſunt ut viæ deſcriptæ *DE* & *IK*, ideoque accelerationes, in curſu corporum per lineas *DE* & *IK*, ſunt ut *DE* & *IT*, *DE* & *IK* conjunctim, id eſt ut *DE quad.* & $IT \times IK$ *rectangulum.* (l) Sed *rectangulum* $IT \times IK$ æquale eſt *IN quadrato*, hoc eſt, æquale *DE quad.* & propterea accelerationes in tranſitu corporum à *D* & *I* ad *E* & *K* æquales generantur. Æquales igitur ſunt corporum velocitates in *E* & *K*: & eodem argumento ſemper reperientur æquales in ſubſequentibus æqualibus diſtantiis. *Q. E. D.*

Sed & (m) eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter à centro diſtantia, in aſcenſu ad æquales diſtantias æqualiter retardabuntur. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpus vel oſcilletur pendens à filo, vel impedimento quovis politiſſimo & perfectè lubrico cogatur in lineâ curvâ moveri, & corpus aliud rectâ aſcendat vel deſcen-dat,

(k) * *Proindè corporum in D & I accelerationes æqualibus temporibus factæ ſunt ut lineæ DE, IT.* Sunt enim vires acceleratrices ut accelerationes naſcentes, ſeu celeritatum incrementa naſcentia directè & tempora inversè (13), undè temporibus æqualibus accelerationes naſcentes ſunt ut vires acceleratrices, temporibus autem inæqualibus ut vires acceleratrices & tempora conjunctim; ſed lineæ DE, IT, ſunt ut vires acceleratrices in directionibus DE, IT; ergò corporum in D & I accelerationes æqualibus temporibus factæ ſunt ut lineæ DE, IT; temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim.

(l) * *Sed rectangulum* $IT \times IK$ *æquale eſt IN qudrato*, cum ſit KNI angulus rectus; & linea NT ad baſim IK normalis, adeóque crus IN medium proportionale inter hypothenuſam IK & illius abſciſſam IT.

(m) 411. *Et eodem argumento.* Vis enim acceleratrix motum corporis aſcendentis eodem modo retardat, quo motum deſcendentis accelerat in iiſdem locis (25); undè vera eſt propoſitio ſivè corpus utrumque deſcendat aut aſcendat, ſive deſcendente uno, alterum aſcendat.

412. Si centrum C in infinitum abeat, rectæ AC, IC fiunt parallelæ & arcus DI, EK in rectas, lineis AC, IC perpendiculares, mutantur. Valet igitur propoſitio etiam ubi vis centripetæ directio AC, IC ſibi perpetuò parallela eſt, dummodò puncta D, I æque alta ſint, hoc eſt, in eâdem rectâ ad directionem vis centripetæ perpendiculari ſumantur.

 * Im-

De Motu Corporum.

dat, sintque velocitates eorum in eâdem quâcunque altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuscunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque corporis penduli filo vel (n) impedimento vasis absolutè lubrici idem præstatur quod vi transversâ *NT*. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, sed tantum cogitur de cursu rectilineo discedere.

Corol. 2. Hinc etiam si quantitas P sit maxima à centro distantia, ad quam corpus vel oscillans vel in trajectoriâ quâcunque revolvens, deque quovis trajectoriæ puncto, eâ quam ibi habet velocitate sursum projectum ascendere possit; sitque quantitas A distantia corporis à centro in alio quovis orbitæ puncto, & vis centripeta semper sit ut ipsius A dignitas quælibet A^{n-1}, cujus index $n-1$ est numerus quilibet n unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine A erit ut $\sqrt{P^n - A^n}$, atque ideo datur. (o) Namque velocitas rectâ ascendentis ac descendentis (per prop. XXXIX.) est in hâc ipsâ ratione.

(n) * *Impedimento vasis.* (Vid. not. 83. 86. 89. 90. 91.

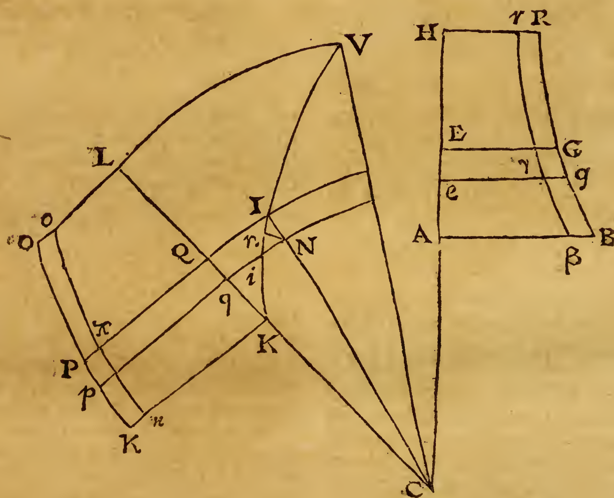
(o) 413. *Namque velocitas recta ascendentis ac descendentis (per prop. XXXIX.) est in hâc ipsâ ratione* $\sqrt{P^n - A^n}$; Sit enim centrum virium C, distantiâ CP ex quâ corpus incipit cadere dicatur P, visque centripeta sit semper ut abscissarum CE (quæ dicuntur *A* in hoc Corollario) dignitas $n-1$, erigantur in omnibus punctis E perpendiculares EG vi centripetæ CE^{n-1} proportionales, perpendicularis PB in puncto P erecta dicatur b, & per omnium perpendicularium vertices ducatur curva, dicantur x abscissæ CE, dicantur y ordinatæ EG, erit $b : y = P^{n-1} : x^{n-1}$, ideoque $y = \frac{bx^{n-1}}{P^{n-1}}$. Unde liquet curvam hanc esse generis Parabolici & ejus quadraturam facilè obtineri, sit enim $Ee = dx$ fluxio abscissæ CE, erit $EegG = y\,dx$ fluxio areæ CEG, & loco y posito ejus valore $\frac{bx^{n-1}}{P^{n-1}}$ erit $y\,dx = \frac{bx^{n-1}}{P^{n-1}}dx$, cujus fluens est (165) $\frac{bx^n}{nP^{n-1}}$, quæ exprimit aream quæ respondet abscissæ x, sive A, itaque deletis con-

constantibus, erunt semper areæ CEG sicut x^n sive A^n.

Jam verò per Prop. XXXIX., velocitas corporis cadentis in puncto E, est ut linea quæ potest aream PBGE, sive quæ potest differentiam arearum CPB, CEG, est autem semper CPB ad CEG ut P^n ad A^n, earum ergo differentiæ erunt semper ut $P^n - A^n$, ideoque velocitas corporis cadentis in E erit semper ut $\sqrt{P^n - A^n}$.

His positis si corpus vel oscillans vel in trajectoriâ quâcumque VIKk revolvens in puncto I velocitatem eam habeat quâ (lineâ CI in P productâ) ex I in P ascendere potuisset, vel quod idem est quam acquireret (25) ex P ad I decidendo, in omni aliâ altitudine CK sive A eamdem habebit celeritatem quam corpus acquiret rectâ descendendo ex distantiâ P à centro usque ad altitudinem æqualem CK, per Prop. præsentem, sed celeritates corporis ex P rectâ descendentis erunt semper ut $\sqrt{P^n - A^n}$, Ergo etiam velocitates corporis in trajectoriâ revolventis erunt semper in quâvis distantiâ A à centro ut $\sqrt{P^n - A^n}$. Q. E. D.

414. Scholium. Vera est Propositio XL, si corporum duorum (quorum unum in rectâ alterum in curvâ lineâ fertur) massæ sint æquales & pondera in locis æquè altis æqualia aut pondera massis inæqualibus proportionalia in locis æquè altis. Illud idem theorema ad majorem universalitatem admodum eleganter reduxit Varignonius in Comm. Paris. an. 1719. Nos quoque principiis suprà positis insistentes, universalius Newtoni propositionem demonstrabimus.



Corpora duo quorum Massæ M, m ad idem vel diversa virium centra C ex locis quibuslibet datis H, V descendant, alterum quidem M, perpendiculariter per rectam HC; alterum verò m per rectam vel curvam quamvis VIK.

Primùm. De loco quovis E lineæ HC erigatur semper perpendicularis EG vi centripetæ in loco illo ad centrum tendenti proportionalis, sitque RGB linea curva quam punctum G perpetuò tangit: Perpendiculares in punctis datis H & A sint HR & AB, perpendicularis in puncto variabili E sit EG cui proxima ducatur linea eg; velocitates in punctis datis H & A sint b & a, velocitas in puncto variabili E sit V, & vis centripeta in eo puncto dicatur F, cui EG est proportionalis, sit abscissa HE, s, ejus fluxio Ee erit ds, & tempusculum quo describitur

E e lapſu corporis M ſit dT; Erit (13 & 409) vis centripeta F ſive EG $= \frac{M \times dV}{dT}$, & (5) $ds = VdT$. Unde erit EG $\times ds$ ſive fluxio areæ HRGE $= MVdV$, cujus fluens erit $\frac{1}{2}MVV$ (165) junctâ aut detractâ quâdam conſtanti quantitate; Coeuntibus enim H & E eſt in H, $V=b$ ideoque fit $\frac{1}{2}MVV = \frac{1}{2}Mbb$ dum area HRGE evaneſcit, itaque (170) ex fluente $\frac{1}{2}MVV$ detrahenda eſt quantitas conſtans $\frac{1}{2}Mbb$ ut areæ HRGE ſit æqualis: Coeuntibus verò E & A, cum in puncto A ſit $V=a$ erit in eo caſu HRGE ſive HRBA $= \frac{1}{2}Maa - \frac{1}{2}Mbb$, & ſumpto quovis puncto E erit HRBA − HREG ſive EGBA $= \frac{1}{2}Maa - \frac{1}{2}Mbb - \frac{1}{2}MVV + \frac{1}{2}Mbb = \frac{1}{2}Maa - \frac{1}{2}VV$, Unde ſic tandem incidimus in duas æquationes.

HRGE $= \frac{1}{2}MVV - \frac{1}{2}Mbb$ &

EGBA $= \frac{1}{2}Maa - \frac{1}{2}MVV$ quibus comparatis cum iis quas reſpectu corporis m in curvâ VIK moti ſimili modo deducemus, velocitates corporum in quibuſvis æqualibus vel inæqualibus altitudinibus, in quâvis virium centripetarum hypotheſi & in quâlibet ponderum & maſſarum proportione conferri poterunt.

Secundò itaque, per locum K datum in curva VIK agatur recta CKL æqualis CV & centro C per punctum quodvis I lineæ VIK deſcribatur arcus circularis IQ rectæ CL occurrens in Q per punctum Q erigatur ſemper perpendiculum PQ proportionale vi Centripetæ quâ Corpus in diſtantiâ CQ verſus C urgetur: ſitque OPk curva quam punctum P perpetuò tangit, & perpendiculares in punctis datis L & K ſint LO & Kk. Dicatur arcus VI, x, & linea LQ, y; ſit linea Ii fluxio arcus VI, & radio Ci deſcribatur arcus lineæ CL occurrens in q, & lineæ CI in N, erit Qq $=$ IN, ex q erigatur perpendicularis qp uſque ad curvam OPK; & ex N ducatur Nn perpendicularis in arcum Ii.

Velocitates corporis m in punctis datis L & K dicantur e & c velocitas in puncto variabili Q ſit u: Vis totalis centripeta in Q ſemper exprimatur per QP, eadem vis QP aget in I (propter æquales CQ, CI,) ſecundùm directionem IN, reſolvatur ergo illa vis in vires duas quarum una agit in corpus m ſecundum directionem Im alte-

altera secundum directionem N n, erit I N ad I n ut vis tota Q P ad vim quâ corpus urgetur secundum curvam, sed ob Triangula I N n, I N i similia est I N ad I n sicut I i ad I N sive Q q, ideoque I i ad Q q ut vis Q P ad vim agentem secundum curvam quæ itaque erit $\frac{QP \times Qq}{Ii}$; sit dt, tempusculum quo describetur I i per eam vim, eritque (13 & 409) ea vis $\frac{QP \times Qq}{Ii} = \frac{m\,du}{dt}$; Unde erit $QP \times Qq = \frac{m\,du}{dt} \times Ii$ sed (5) est I i spatiolum percursum tempore dt velocitate u est ergo æquale udt ideoque $QP \times Qq \frac{mdu}{dt} \times udt = mudu$, sed $QP \times Qq = m\,u\,d\,u$ est fluxio areæ L O Q P, hujus fluens est $\frac{1}{2} m u u$ (165) additâ aut detractâ quâdam constanti quantitate, coeuntibus enim Q & L, fit in L, $u = e$ ideoque fit $\frac{1}{2} m u u = \frac{1}{2} m e e$ dum area L O Q P evanescit, itaque (170) ex fluente $\frac{1}{2} m u u$ detrahenda est quantitas constans $\frac{1}{2} mee$, eritque $LOQP = \frac{1}{2} muu - \frac{1}{2} mee$, & coeuntibus Q & K fit $u = c$ & $LOKk = \frac{1}{2} mcc - \frac{1}{2} mee$ & $LOKk - LOQP$ sive $QPKk = \frac{1}{2} mcc - \frac{1}{2} muu$, sicque tandem incidimus in has duas æquationes $LOQP = \frac{1}{2} muu - \frac{1}{2} mee$ & $QPKk = \frac{1}{2} mcc - \frac{1}{2} muu$ eâdem methodo quâ in primo calculo sumus usi.

415. Coroll. 1. Ex primâ Æquatione primi calculi est $V = \frac{\sqrt{2HRGE + Mbb}}{M}$, ex primâ Æquatione secundi calculi est $u = \frac{\sqrt{2LOQP + mee}}{m}$, unde invenitur $V : u = \frac{\sqrt{2HRGE + Mbb}}{M} : \frac{\sqrt{2LOQP + mee}}{m}$.

Ex secundâ verò æquatione primi calculi est $V = \frac{\sqrt{Maa - 2EGBA}}{M}$ & ex secunda Æquatione 2[di]. calculi $u = \frac{\sqrt{mcc - 2QPKk}}{m}$, & hinc est $V : u = \frac{\sqrt{Maa - 2EGBA}}{M} : \frac{\sqrt{mcc - 2QPKk}}{m}$.

416. Coroll. 2. Si in perpendiculo QP, ita capiatur Q π, ut factum $\pi Q \times m$, sit ubique gravitati corporis in I proportionale, seu rectæ Q P æquale, erit $2Lo\pi Q \times m = 2LOQP$, adeoque $u = \frac{\sqrt{2LOQP + mee}}{m} = \sqrt{2Lo\pi Q + ee}$ & $u = \sqrt{cc - 2Q\pi uK}$. Et similiter si ponatur $E\gamma \times M = EG$, erit $V = \sqrt{2Hr\gamma E + bb}$ & $V = \sqrt{aa - 2E\gamma\beta A}$.

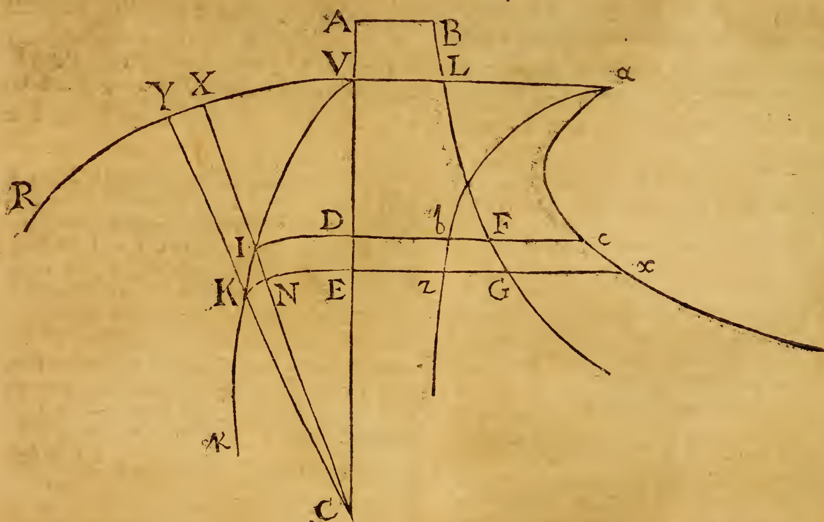
417. Coroll. 3. Si puncta H & V, E & I, fuerint æquè alta, & in illis lineæ EG, QP vi centripetæ proportionales, sint semper æquales, erit HRGE = LOPQ. Quare si præterea massæ M, m, & velocitates b, e, in punctis H, V, æquentur, erit $\frac{2HRGE + Mbb}{M} = \frac{2LOQP + mee}{m}$, adeoque $V = u$, in omnibus punctis æquè altis E & I. Si in punctis æquè altis H & V, E & I, vires centripetæ massarum M & m rationem semper habeant, erit $HRGE : LOQP = M : m$, proindeque $\frac{2HRGE}{M} = \frac{2LOQP}{m}$. Unde si præterea ponatur $bb = ee$, erit $V = u$, quæ est propositio XL. Newtoni. Patet etiam in 4. superioribus formulis (415), Massas M & m exterminari, si fuerint ponderibus proportionales.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXVIII.

Positâ cujuscunque generis vi centripetâ & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in trajectoriis inventis.

Tendat vis quælibet ad centrum *C* & invenienda sit trajectoria *VIKk*. Detur circulus *VR* centro *C* intervallo quovis *CV* descriptus, centroque eodem describantur alii quivis circuli *ID*, *KE* trajectoriam secantes in *I* & *K* rectamque *CV*



in *D* & *E*. Age tum rectam *CNIX* secantem circulos *KE*, *VR* in *N* & *X*, tum rectam *CKY* occurrentem circulo *VR* in *Y*. Sint autem puncta *I* & *K* sibi invicem vicinissima, & pergat corpus ab *V* per *I* & *K* ad *k*; sitque punctum *A* locus ille de quo corpus aliud cadere debet, ut in loco *D* velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in *I*. Et stantibus quæ in propositione XXXIX, lineola *IK*, dato tempore quam

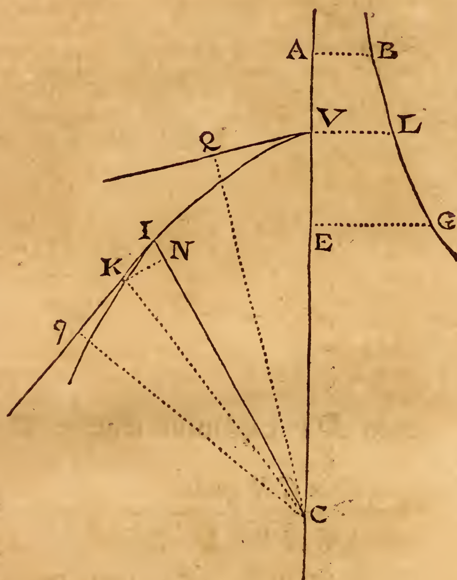
mini-

minimo descripta, erit ut velocitas, atque ideo ut recta quæ potest aream *ABFD*, & (p) triangulum *ICK* tempori proportionale dabitur, ideoque *KN* erit reciprocè ut altitudo *IC*, id est, si detur quantitas aliqua Q, & altitudo *IC* nominetur A, ut $\frac{Q}{A}$. Hanc quantitatem $\frac{Q}{A}$ nominemus Z, & ponamus eam esse magnitudinem ipsius Q ut sit in aliquo casu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut est *IK* ad *KN*, & (q) erit in omni casu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut *IK* ad *KN*, & *ABFD* ad ZZ ut *IKq* ad *KNq*, & divisim *ABFD*−ZZ ad ZZ ut *IN* (r) *quad.* ad *KN quad.*

(p) * *Triangulum ICK tempori quo describitur proportionale* (per Prop. 1.) dato tempore *dabitur*; Est autem trianguli ICK area $= \frac{1}{2}$ KN × IC. Quarè erit rectangulum KN × IC quantitati constanti æquale, & hinc lineola KN æqualis quantitati constanti ad IC applicatæ, hoc est, KN reciprocè ut IC.

(q) * *Erit in omni casu.* Quoniam IK est semper ut $\sqrt{ABFD}$, hoc est IK ad $\sqrt{ABFD}$ in datâ ratione, & similiter Z ad KN in datâ ratione, si in aliquo casu sit $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut IK ad KN adeóque $\sqrt{ABFD}$ ad IK ut Z ad KN, erit in omni casu $\sqrt{ABFD}$ ad IK ut Z ad KN, ac proindè $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut IK ad KN.

418. Ducatur VL parallela EG quæ curvæ BFG occurrat in L, & ex centro C ad QV tangentem in V, ac ad qI, tangentem in I, demissis perpendiculis CQ, Cq, erit CQ × $\sqrt{ABLV}$ quantitas constans & æqualis Cq × $\sqrt{ABFD}$. Nam (per coroll. 1. prop. 1.) velocitas in V (adeóque $\sqrt{ABLV}$) est ut CQ reciprocè, id est, ut $\frac{1}{CQ}$ directè & proinde CQ × $\sqrt{ABLV}$ ut quantitas constans 1, & pariter velocitas in I (adeóque $\sqrt{ABFD}$) est ut Cq reciprocè, id est, ut $\frac{1}{Cq}$ directè, & proindè Cq × $\sqrt{ABFD}$, ut quantitas constans 1, adeóque Cq × $\sqrt{ABFD}$ = CQ × $\sqrt{ABLV}$. Si itaque capiatur Q = CQ × $\sqrt{ABLV}$ = Cq × $\sqrt{ABFD}$, & Z = $\frac{Q}{IC}$ (unde est Q = Z × IC) erit semper $\sqrt{ABFD}$: Z = IC : Cq = IK : KN. Nam propter triangula IKN, ICq similia, est IK ad KN ut IC ad Cq, sed quia Z × IC (= Q) = Cq × $\sqrt{ABFD}$ est IC : Cq = $\sqrt{ABFD}$: Z ergo IK : KN = IC : Cq = $\sqrt{ABFD}$: Z.



(r) * *Ut IN², ad KN².* Est enim ob angulum INK rectum, $IK^2 - KN^2 = IN^2$.

* Un-

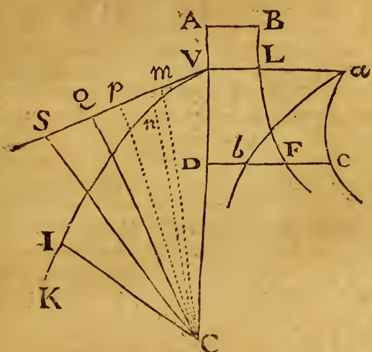
De Motu Corporum.

ideoque $\sqrt{ABFD-ZZ}$ ad Z seu $\frac{Q}{A}$ ut IN ad KN, & propterea $A \times KN$ æquale $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD-ZZ}}$. (f) Unde cum $YX \times XC$ sit ad $A \times KN$ ut CXq ad AA, erit rectangulum $XY \times XC$ æquale $\frac{Q \times IN \times CX \text{ quad.}}{AA\sqrt{ABFD-ZZ}}$. Igitur si in perpendiculo DF capiantur semper Db, Dc ipsis $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD-ZZ}}$, $\frac{Q \times CX \text{ quad.}}{2AA\sqrt{ABFD-ZZ}}$ æquales respectivè, & describantur curvæ lineæ ab, ac, quas puncta b, c perpetuo tangunt; deque puncto V ad lineam AC erigatur perpendiculum Va abscindens areas curvilineas $VDba$, $VDca$, & erigantur etiam ordinatæ Ez, Ex: quoniam rectangulum $Db \times IN$ seu $DbzE$ æquale est dimidio rectanguli $A \times KN$ seu triangulo ICK; & rectangulum

(f) * Undè cum $YX \times XC : A \times KN = CX^2 : AA$. Sunt enim triangula nascentia CKN, CYX similia & eorum proindè areæ duplæ $YX \times XC$, $IC \times KN$, seu $A \times KN$, in ratione duplicatâ homologorum laterum CX, CI, sive A.

† 419.

$Dc \times IN$ seu $Dc x E$ æquale est dimidio rectanguli $YX \times XC$ seu triangulo XCY; hoc est, quoniam arearum $VDba$, VIC æquales semper sunt nascentes particulæ $DbzE$, ICK, & arearum $VDca$, VCX æquales semper sunt nascentes particulæ $DcxE$, XCY, erit area genita $VDba$ æqualis areæ genitæ VIC, ideoque tempori proportionalis, & area genita $VDca$ æqualis sectori genito VCX. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus discessit de loco V, (†) dabitur area ipsi proportionalis $VDba$, & inde dabitur corporis altitudo CD vel CI; & area $VDca$, eique æqualis sector VCX unà cum ejus angulo VCI. Datis autem angulo VCI & altitudine CI datur locus I,



(†) 419. *Dabitur area ipsi proportionalis.* Datâ corporis velocitate & directione seu tangente in V, datur spatium VS quod corpus in illâ tangente dato tempore quo describitur area VIC uniformi motu describeret. Porrò junctâ CS, area trianguli CSV æqualis erit areæ VIC, quam corpus in curvâ VIK motum describit eodem tempore quo uniformiter percurreretur VS. Nam tempusculo nascente velocitate æquabili spatium Vm describatur in tangente VS, & eodem tempusculo arcus Vn describatur in curvâ VIK, erit (per prop. 1.) area VCm = VCn, & ob velocitatem uniformem in tangente singulo tempusculo lineolæ æquales Vm, mp &c. percurrentur ideoque æquabuntur triangula VCM, mCp, &c., sed pariter omnes areæ æqualibus tempusculis descriptæ in curva VIK æquantur areæ VCn sive VCm, undè patet summam arearum VCm + mCp + &c. æqualem esse summæ arearum quæ eodem tempore in curvâ describuntur, hoc est, totas areas VCS, VIC, eodem tempore descriptas esse æquales. Cum igitur data sit tangens VS & perpendiculum CQ in eam ductum, ex tempore dato dabitur area trianguli VCS, & area VIC ei æqualis; Hincque concessis figurarum quadraturis, invenietur area $VDba = VCS = VIC$, & indè dabitur VD, atque $CD = CV - VD$; dabitur quoque constans $Q = QC \times \sqrt{ABLV}$ (418).

420. Si ponatur variabilis $IC = CD = x$, data $VC = a$, erit $VD = a - x$ & $Z = \frac{Q}{x}$, concessisque figurarum curvilinearum quadraturis area ABFD exprimi poterit per datas AV, VC & variabilem x, ac proindè iisdem quantitatibus exprimi poterunt $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$ & $\frac{Q \times CX^2}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$, seu ordinatim applicatæ Db, Dc; & hinc obtinebuntur æquationes ad curvas ab, ac, ex constantibus & solis variabilibus CD, Db, vel Dc, compositæ, curvæque illæ poterunt describi. Quoniam porrò est (per constr.) sector VCX, æqualis areæ VDca, erit arcus $VX = \frac{2VDca}{CV}$; quarè invenitur angulus VCX, & indè punctum I, in trajectoriâ VIK.

421. Scholium. Datâ vi centripetâ in singulis locis trajectoriæ VIK, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, trajectoria VIK describi potest, ut in probl. XXVIII, licet gravitates massis non sup-

in quo corpus completo illo tempore reperietur. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id est, apsides trajectoriarum expeditè inveniri possunt. Sunt enim apsides puncta illa in quibus recta *IC* per centrum ducta incidit perpendiculariter in trajectoriam *VIK*, id (t) quod fit ubi rectæ *IK* & *NK* æquantur, ideoque ubi area *ABFD* æqualis est ZZ.

(u) *Corol.* 2. Sed & angulus *KIN*, in quo trajectoria alicu-

supponantur proportionales, nec vis centripeta æqualis in æqualibus à centro distantiis. Nam factum $M \times EG$, ex corporis massa M in perpendiculum EG, ejusdem corporis gravitatem in loco quovis I exhibeat, sitque BLFG curva quam punctum G perpetuò tangit, velocitas in loco V dicatur C, lineâ AB ita abscindatur ut sit area $ABLV = \frac{1}{2} CC$; erit velocitas in $I = \sqrt{2 VLFD + 2 ABLV}$ (416), id est $= \sqrt{2 ABFD}$, adeóque ut $\sqrt{ABFD}$, undè *lineola IK dato tempore quam minimo descripta erit ut* $\sqrt{ABFD}$, *& triangulum ICK &c.* Cætera quæ in probl. XXVIII. solutione sequuntur ratiocinia & constructiones manent eadem.

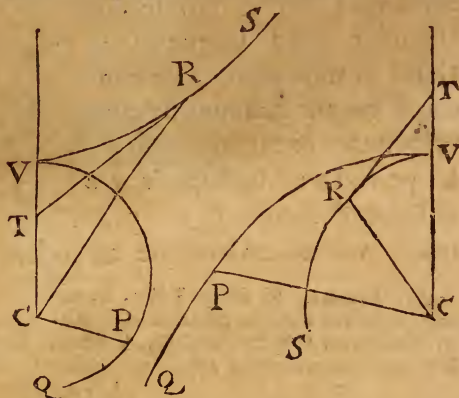
422. Trajectoria VIK, geometricè rationalis est ubi per æquationes finitas inveniri potest sector circuli æqualis areæ VDca: & hujus sectoris radius est ad CX radium, circuli VXY, ut nn ad 1 estque nn numerus rationalis positivus integer vel fractus. Sit enim sector circuli LPC = areæ VDca, id est, æqualis sectori VCX, sitque radius CP ad radium CV, ut n, ad 1, erit $CP \times PL = CV \times VX$, & $CP : CV = n : 1 = VX : PL$, (per hyp.) & $CP : CV = n : 1 = PR : VX$ (ex naturâ circuli). Quare per compositionem rationum & ex æquo $nn : 1 = RP : PL$. Si ergò fuerit nn, ad 1, ut numerus ad numerum, dato arcu PL, inveniri poterit arcus RP per æquationem finitam, cum possit semper arcus datus in datâ ratione numeri ad numerum per æquationem finitam dividi. Quoniam igitur assumptæ CI positio & punctum I, in curvâ VIK per finitas æquationes determinantur, erit VK curva algebraica seu geometricè rationalis. Hermannus prop. 25. Lib. I. Phoron. hoc elegans & difficile problema solvit: invenire canonem generalem determinandæ gravitatis variabilis pro omnibus curvis algebraicis in infinitum, quantitatibus finitis expressum.

(t) * *Id quod fit ubi rectæ IK & KN æquantur.* Tunc enim punctum N coincidit cum puncto I, ob angulum *KIN* rectum, adeóque ob proportionem $\sqrt{ABFD} : Z = IK : KN$, fit $ABDF = ZZ = \frac{QQ}{IC^2}$, & $IC^2 \times ABFD = QQ$ quantitati datæ. Hinc cum concessis curvarum quadraturis data sit area ABFD in quantitatibus constantibus & variabili IC seu CD, invenietur valor IC, hoc est, maximæ & minimæ altitudines corporis trajectoriam VK describentis.

(u) * *Coroll.* 2. Ob angulum KNI rectum in triangulo nascente KIN, sinus anguli KIN est ad sinum totum, ut KN ad IK, id est, ut Z (seu $\frac{Q}{IC}$) ad $\sqrt{ABFD}$. Verum datâ IC datur area ABFD, & indè ob quantitatem Q datam datur ratio Q.

ibi secat lineam illam IC, ex datâ corporis altitudine IC expeditè invenitur; nimirum capiendo sinum ejus ad radium ut KN ad IK, id est, ut Z ad latus quadratum areæ $ABFD$.

(x) *Corol.* 3. Si centro C & vertice principali V describatur sectio quælibet conica VRS, & à quovis ejus puncto R agatur tangens RT occurrens axi infinitè producto CV in puncto T; dein junctâ CR ducatur recta CP, quæ æqualis sit abscissæ CT, angulumque VCP sectori VCR proportionalem constituat; tendat autem ad centrum C vis centripeta cubo distantiæ locorum à centro reciprocè proportionalis, & exeat corpus de loco V justâ cum velocitate secundum lineam rectæ CV perpendicularem: progredietur

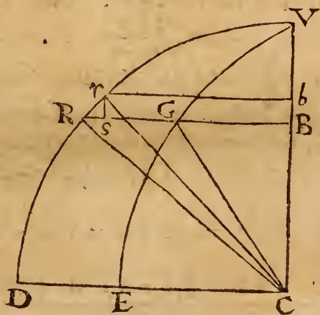


$\frac{Q}{IC}$ ad $\sqrt{ABFD}$, hoc est, ratio sinûs anguli KIN, ad radium. Invenietur ergò sinus anguli KIN, & hinc angulus ipse cognoscetur.

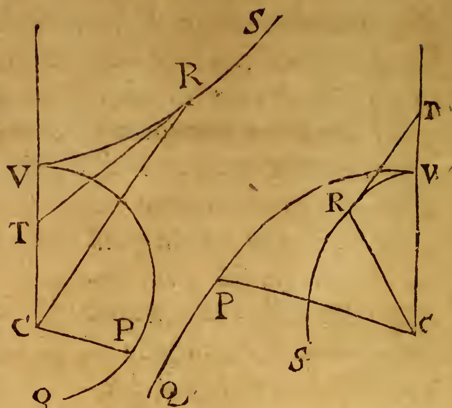
(x) 423. Lemma. Si fuerit DVC, circuli quadrans cujus radius CV $= r$ abscissa CB $= z$, ordinatæ infinitè propinquæ BR, br, fluxio arcûs DR erit $\frac{r\,dz}{\sqrt{rr-zz}}$, & fluxio sectoris CDR $= \frac{\frac{1}{2} rr\,dz}{\sqrt{rr-zz}}$.

Est enim BR $= \sqrt{rr-zz}$, & demissâ ex puncto r in RB, perpendiculari rs, triangula similia RCB, rRs, dant RB $(\sqrt{rr-zz})$: RC (r) = rs (dz) : Rr $= \frac{r\,dz}{\sqrt{rr-zz}}$. Q. e. 1. Porrò sector nascens CRr $= \frac{1}{2}$ CR $\times$ Rr $= \frac{\frac{1}{2} rr\,dz}{\sqrt{rr-zz}}$. Q. e. 2.

424. Coroll. Si fuerit EGVC, quadrans ellipseos cujus centrum C, semiaxis unus CV $= r$, alter semiaxis CE $= c$, abscissa CB $= z$, & BG ordinatim applicata ad axem CV, sectoris CEG fluxio erit $= \frac{\frac{1}{2} rc\,dz}{\sqrt{rr-zz}}$. Sunt enim sectores CDR, CEG, adeóque & eorum fluxiones in datâ ratione r ad c, (251).



dicetur corpus illud in trajectoriâ *VPQ* quam punctum *P* perpetuò tangit; ideoque si conica sectio *VRS* hyperbola sit, descendet idem ad centrum: Sin ea ellipsis sit, ascendet illud perpetuò & abibit in infinitum. Et contra, si corpus quâcunque cum velocitate exeat de loco *V*, & perinde ut incœperit v e obliquè descendere ad centrum, vel ab eo obliquè ascendere, figura *VRS* vel hyperbola



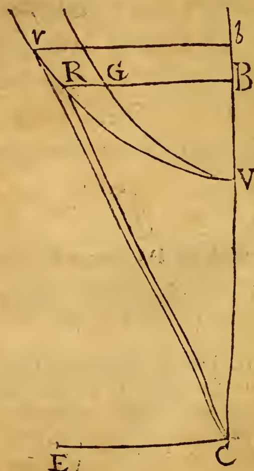
425. Lemma. Si fuerit VRr, hyperbola æquilatera cujus centrum c, semiaxis transversus CV$=r$, abscissa CB$=z$; RB ad axem ordinatim applicata, sectoris hyperbolici CRV fluxio erit $\frac{\frac{1}{2}rrdz}{\sqrt{zz-rr}}$.

Agatur enim rb ordinata, priori RB infinitè propinqua, sitque RB$=y$, erit (ex naturâ hyperbolæ æquilateræ) $yy=zz-rr$, & $y=\sqrt{zz-rr}$. Undè $2ydy=2zdz$, & $dy=\frac{zdz}{\sqrt{zz-rr}}$. Porrò triangulum CRB$=\frac{1}{2}zy$, & illius fluxio $=\frac{1}{2}zdy+\frac{1}{2}ydz=$ trapesio BbrR + triang. CrR; sed trapesium nascens BbrR$=ydz$, ergò sector nascens CrR$=\frac{1}{2}zdy-\frac{1}{2}ydz$

$$=\frac{\frac{1}{2}zzdz}{\sqrt{zz-rr}}-\frac{1}{2}dz\times\sqrt{zz-rr}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}zzdz-\frac{1}{2}zzdz+\frac{1}{2}rrdz}{\sqrt{zz-rr}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}rrdz}{\sqrt{zz-rr}}.$$ Q. e. D.



426. Coroll. 1. Quoniam (ex demonstratis) $dy=\frac{zdz}{\sqrt{zz-rr}}$, & $yy=zz-rr$, erit $\frac{dz}{\sqrt{zz-rr}}=\frac{dy}{z}$, & $z=\sqrt{yy+rr}$, adeóque CrR$=\frac{\frac{1}{2}rrdz}{\sqrt{zz-rr}}=\frac{\frac{1}{2}rrdy}{\sqrt{yy+rr}}$.

427. Coroll. 2. Si descripta fuerit altera hyperbola GV, cujus idem centrum C, idem semiaxis transversus CV$=r$, semiaxis conjugatus CE$=c$; sectoris CGV fluxio erit $=\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{zz-rr}}=\frac{\frac{1}{2}rcdy}{\sqrt{yy+rr}}$. Est enim sector CRV ad sectorem CGV, adeóque prioris fluxio ad fluxionem posterioris in datâ ratione r ad c. (374).

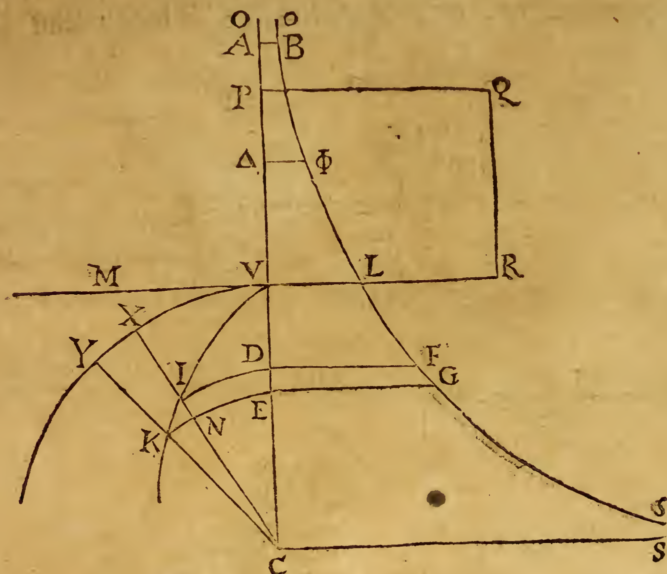
428.

sit vel ellipsis, inveniri potest trajectoria augendo vel minuendo angulum *VCP* in datâ aliquâ ratione. Sed &, vi centripetâ in centrifugam versâ, ascendet corpus obliquè in trajectoriâ *VPQ*, quæ invenitur capiendo angulum *VCP* sectori elliptico *VRC* proportionalem, & longitudinem *CP* longitudini *CT* æqua- LIBER PRIMUS. PROP. XLI.

428. Lemma. Iisdem positis quæ in superioribus Newtoni propositionibus, sit $CV=r$, $CA=a$, CD vel $C\Delta=x$, DF vel $\Delta\Phi=y$; & si fuerit vis centripeta in loco quovis D ut $\frac{1}{CD^3}$, sitque $2f^4$ quantitas data, erit $y=\frac{2f^4}{x^3}$, æquatio ad curvam BFG, & quoniam in æquatione y infinita evadit si x ponatur $=o$, & similiter x infinita fit si $y=o$, liquet rectas sibi mutuò perpendiculares CO CS esse curvæ BFG asymptotos. Area $DFGE=y\,dx=\frac{2f^4\,dx}{x^3}$, undè sumptis fluentibus additâque constanti Q; erit area in infinitum versùs S protensa $CDFsSC=Q-\frac{f^4}{xx}$; Ponatur x infinita, & erit $\frac{f^4}{xx}=o$, & area CDFsS, mutabitur in aream utrinque infinitè protensam COosSC; quare $COosSC=Q$; & hinc $COosSC-CDFsSC=ODFo=Q-Q+\frac{f^4}{xx}=\frac{f^4}{xx}$, id est, area ODFo, vel $O\Delta\Phi o$ versus O in infinitum extensa, æqualis est quantitati finitæ $\frac{f^4}{xx}$.

 429. Co-

qualem ut supra. Consequuntur hæc omnia ex propositione præcedente, per curvæ cujusdam quadraturam, cujus inventionem, ut satis facilem, brevitatis gratiâ missam facio.



429. Coroll. 1. Area infinitè protensa $OVLo = \frac{f^4}{rr}$; area $OABo = \frac{f^4}{aa}$ & proindè $\sqrt{OVLo} = \frac{ff}{r}$, $\sqrt{OABo} = \frac{ff}{a}$.

430. Coroll. 2. Area $ABLV = OVLo - OABo = \frac{f^4 \times aa - rr}{rraa} = \frac{f^4 cc}{rraa}$, ponendo $aa - rr = cc$ (429) undè $\sqrt{ABLV} = \frac{f^2 c}{ra}$.

431. Coroll. 3. Similiter si punctum D sit inter puncta data C, V, & punctum Δ inter puncta data V, A; erit area ABΦΔ, vel $ABFD = \frac{f^4 \times aa - xx}{aaxx}$, area $VLFD = \frac{f^4 \times rr - xx}{rrxx}$, $\Delta\Phi LV = \frac{f^4 \times xx - rr}{rrxx}$. (428. 429. 430.)

432. Iisdem manentibus quæ in Lemmate superiori (428) si corpus de loco V, cum velocitate quâlibet secundùm directionem VM ad CV perpendicularem projiciatur ut curvam VIK *describat*, erit VM hujus curvæ *tangens in puncto* V, CV ad tangentem Vm normalis, & velocitas projectionis æqualis erit velocitati quam corpus ex distantiâ infinitâ OV, cadendo acquireret in loco V, vel eâ minor, vel major.

433. Primus casus. Velocitas projectionis æqualis sit velocitati per spatium infinitum OV cadendo acquisitæ in loco V, erit (418) quantitas data $Q = CV\sqrt{OVLo} = ff$ (429) & $Z = \frac{Q}{IC} = \frac{ff}{x}$. Sed (per prop. 41.) $\sqrt{ODFo} : Z = IK : KN$, hoc est, (428) $\frac{ff}{x} : \frac{ff}{x} = IK : KN$, ergò $IK = KN$, proindèque angulus KIN rectus est (cor. 2. prop. 41.) In hoc igitur

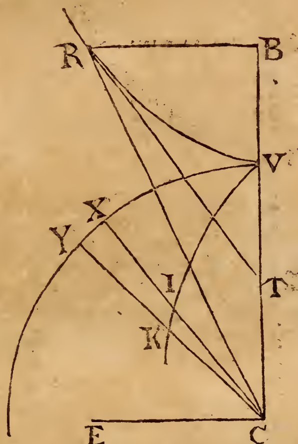
tur cafu trajectoria VIK eft circulus VXY radio CV defcriptus.

434. Hinc fi velocitas projectionis minor fuerit velocitate quæ ex infinitâ diftantiâ cadendo acquiritur in loco V, corpus in trajectoriâ VK motum ad centrum virium C perpetuò accedet, velocitas illius perpetuò crefcet, & punctum D femper erit inter data puncta V & C fitum. Si verò projectionis velocitas major fit velocitate per infinitum fpatium cadendo acquifitâ, corpus in trajectoriâ VIK, à centro femper recedet, illius velocitas continuò decrefcet & punctum Δ puncto I correfpondens, punctо dato V fuperius erit.

435. Si manente cafûs primi hypothefi, directio VM ad CV perpendicularis non fit, & perpendiculum è centro C in projectionis directionem demiffum dicatur p, erit $Q = \frac{pff}{r}$, $Z = \frac{pff}{rx}$, & $\sqrt{ODFo}\left(\frac{f^2}{x}\right) : Z \left(\frac{pff}{rx}\right) = r : p = IK : KN$. Hoc eft, (per coroll. 2. prop. 41.), finus totus ad finum anguli KIN, in datâ ratione adeóque angulus KIN datus, & trajectoria VK fpiralis logarithmica.

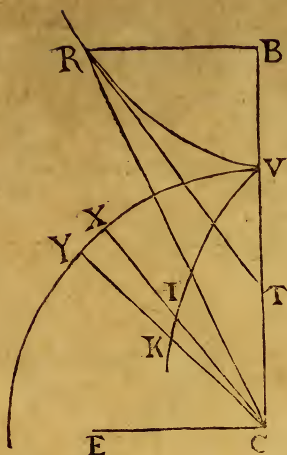
436. Cafus fecundus. Velocitas projectionis æqualis fit velocitati quam corpus de loco aliquo dato A, cadendo haberet in V, erit $Q = CV \times \sqrt{ABLV} = \frac{ffc}{a}$ (430) $Z = \frac{ffc}{ax}$, $ZZ = \frac{f^4cc}{aaxx}$, $ABFD = \frac{f^4 \times aa - xx}{aaxx}$ (431.), undè $ABFD - ZZ = \frac{f^4 \times aa - cc - xx}{a^2x^2} = \frac{f^4 \times rr - xx}{a^2x^2}$, ob $a^2 - cc = rr$ (430) & $\sqrt{ABFD - ZZ} = \frac{ff\sqrt{rr - xx}}{ax}$. Cum igitur (in prop. 41.) fit $A = IC = CD = x$, $DE = IN = dx$, $CX = CV = r$, erit $\frac{Q \times CX^2 \times IN}{2AA} = \frac{\frac{1}{2}ffrrcdx}{axx}$ & $\frac{Q \times CX^2 \times IN}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}} = \frac{\frac{1}{2}rrcdx}{x\sqrt{rr - xx}} =$ fectori CXY. Quoniam autem crefcente IC feu x, decrefcit fector YXC (434) fcribendum eft $CXY = -\frac{\frac{1}{2}rrcdx}{x\sqrt{rr - xx}}$ (159).

Ponatur $x = \frac{rr}{z}$, erit $xx = \frac{r^4}{zz}$, $rr - xx = \frac{rrzz - r^4}{zz}$, $\sqrt{rr - xx} = \frac{r\sqrt{zz - rr}}{z}$, & $zx = rr$, fumptifque fluxionibus $zdx + xdz = 0$, & proindè $-\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}$, hifque valoribus fubftitutis invenitur $-\frac{\frac{1}{2}rrcdx}{x\sqrt{rr - xx}} = \frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{zz - rr}} = CXY$.



Centro C, femiaxe tranfverfo $CV = r$ femiaxe conjugato $CE = c$, defcribatur hyperbola VR, ex cujus puncto quovis R, demittatur ad axem perpendiculum RB, & tangens RT, axi occurrens in T, & CB, dicatur $= z$, erit (427) $\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{zz - rr}}$, fluxio fectoris hyperbolici CRV, & (ex conicis) CB (z) : CV (r) = CV (r) : $CT = \frac{rr}{z} = x = CI$. Itaque cum fit $CXY = \frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{zz - rr}}$, fi fumantur utrinque fluentes additâ conftanti Q erit fector circuli CXV, æqualis fectori hyperbolico CRV + Q. invenitur autem Q = 0. Nam pofitâ CT feu $x = r$,

DE MOTU CORPORUM.



$x = r$, fit quoque $z = r$, ob $\frac{rr}{z} = x$, & puncta B & V coeunt, evanescitque sector CRV, & quoniam positâ $x = r$ corpus projectum est in V, punctum X coincidet quoque in hoc casu cum puncto V, & fit CXV=o, undè æquatio CXV=CRV+Q, mutatur in hanc o=o+Q. Nulla igitur est quantitas constans addenda vel subducenda, sed est semper CXV=CRV. Quare invenitur punctum I in trajectoriâ VIK, capiendo sectorem CXV=CRV, & in lineâ CX sumendo CI=CT.

437. Casus 3us. Projectionis velocitas major sit velocitate per spatium infinitum cadendo acquisitâ. Sit P locus de quo corpus cadere debet ut urgente gravitate uniformi velocitatem acquirat in loco V æqualem velocitati projectionis. In perpendiculo VL, capiatur VR ad VL in ratione vis gravitatis uniformis ad vim centripetam variabilem in loco V, & compleatur rectangulum PVRQ cujus latus quadratum dicatur e; & velocitas projectionis erit ut e, (per cor. 1. prop. 39.) Quarè (430) $Q = re$, $ZZ = \frac{rree}{xx}$; & quoniam velocitas corporis trajectoriam VIK describentis continuò decrescit atque corpus à centro C perpetuò recedit (434), loco areæ ABFD, (prop. 41.) capienda est quantitas $ee - \Delta\Phi LV = ee - \frac{f^4 \times xx - rr}{rrxx}$ (431) $= \frac{rreexx - f^4xx + f^4rr}{rrxx}$, & quantitas ABFD−ZZ, (prop. 41.) erit hic $= \frac{r^2e^2xx - f^4xx + f^4rr - r^4ee}{rrxx}$. Est autem area rectanguli PVRQ major areâ infinitè protensâ OVLo, hoc est, quantitas ee major quam $\frac{f^4}{rr}$, & proindè $rree - f^4$, quantitas positiva, fiat igitur $rree - f^4 = bbrr$, & quantitas ABFD−ZZ, (prop. 41.) evadet $= \frac{bbrrxx - bbr^4}{rrxx}$, & $\sqrt{ABFD - ZZ} = \frac{b\sqrt{xx - rr}}{x}$; Hinc factis debitis substitutionibus, formula (prop. 41.) $\frac{Q \times CX^2 \times IN}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$, in hanc mutabitur

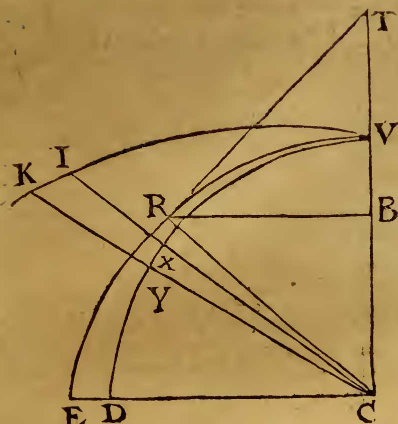
$$\frac{r^3edx}{2xx} \times \frac{x}{b\sqrt{xx - rr}} = \frac{\frac{1}{2}r^3edx}{bx\sqrt{xx - rr}} = \frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{x\sqrt{xx - rr}}$$

ponendo $\frac{re}{b} = c$. Quarè sector circuli

$$CXY = \frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{x\sqrt{xx - rr}}.$$

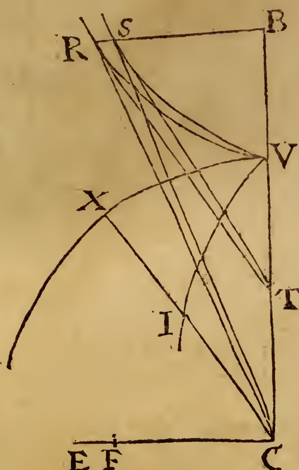
Fiat $x = \frac{rr}{z}$ & erit $\frac{dx}{x} = \frac{-dz}{z}$, ac $\sqrt{xx - rr} = \frac{r\sqrt{rr - zz}}{z}$ atquè $\frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{x\sqrt{xx - rr}} = -\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{rr - zz}} =$ CXY. Centro C, semiaxe CV $= r$, & altero semiaxe CE $= c$, describatur ellipseos *quadrans* VE, ex cujus *puncto quovis R agatur* ad axem CV perpendiculum RB, & tangens RT axi producto occurrens in T, & CB dicatur $= z$, erit (ex conicis) CB (z) : CV (r) = CV (r) : CT $= \frac{rr}{z} = x =$ CI; & (424) $\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{rr - zz}}$, fluxio sectoris elliptici CRE; quarè cum sit CXY $= -\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{rr - zz}}$, si sumantur utrinque fluentes additâ constanti Q, erit sector circuli CXV=Q−CRE. Ut inveniatur valor quantitatis constantis Q, ponatur CXV=o, & erit Q=CRE; sed ubi CXV=o puncta X & I cum puncto V coeunt, & fit CT seu

CI



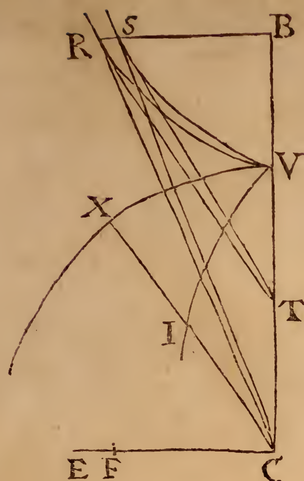
CI=CV, adeóque punctum R coincidit etiam cum puncto V, & sector CER, æqualis fit quadranti CEV; ergò Q=CEV. Est igitur semper CXV=CEV−CRE =CRV. Itaque ut inveniatur trajectoriæ VIK punctum I, capiatur sector circuli CXV, æqualis sectori elliptico CRV, & in lineâ CX, productâ capiatur CI=CT, erit I punctum in trajectoriâ quæsitâ.

438. Datâ velocitate projectionis & magnitudine vis centripetæ variabilis, hoc est, ipsius ratione ad aliquam vim centripetam uniformem notam in loco dato V, (fig. not. 430.) describi potest trajectoria VIK. Iis enim datis, dabitur locus P ex quo corpus urgente vi centripetâ constante cadere debet ut in loco V datam projectionis velocitatem habeat; & sumptâ VR ad VL in datâ ratione vis centripetæ constantis ad vim centripetam variabilem in loco V, dabitur rectangulum PQRV. Porrò si rectangulum illud æquale fuerit areæ infinitè protensæ OVLo, corpus circulum describet (per cas. 1. not. 433.); si rectangulum minus est areâ OVLo, inveniri poterit punctum A, ex quo ducta perpendicularis AB, abscindat aream ABLV æqualem rectangulo PQRV; & trajectoria VIK, describetur (per constr. cas. 2ⁱ.) (436). Si rectangulum PQRV areâ OVLo majus est, adhibenda erit constructio casûs 3ⁱ. (437). Observandum autem est sectores circulares esse angulis suis ad centrum proportionales; undè in superioribus constructionibus loco sectorum circuli, uti possumus angulis qui ad sectores hyperbolicos vel ellipticos datam habeant rationem.



439. Casus 2ᵘˢ. & 3ᵘˢ. construi possunt per hyperbolam vel ellipsim, cujus sit semiaxis CV=r, & alter semiaxis quilibet. Nam iisdem positis quæ in constructione casûs 2ⁱ., semiaxe transverso CV=r, & semiaxe quovis conjugato CF, describatur hyperbola altera SV, quam in S secat perpendiculum RB; tangentes RT, ST per puncta R, S ductæ axi occurrunt in eodem puncto T, (257) & sector CRV est ad sectorem CSV in datâ ratione CE ad CF (374). Quarè cum (per constr. cas. 2ⁱ.) sector circuli CXV æqualis sit sectori CRV, erit etiam ad sectorem CSV in datâ ratione CE ad CF, atque ità punctum trajectoriæ I invenietur capiendo sectorem CXV ad sectorem CSV, in datâ ratione CE ad CF, & in radio CX, capiendo CI=CT. Idem eodem modo demonstratur in casu 3°.

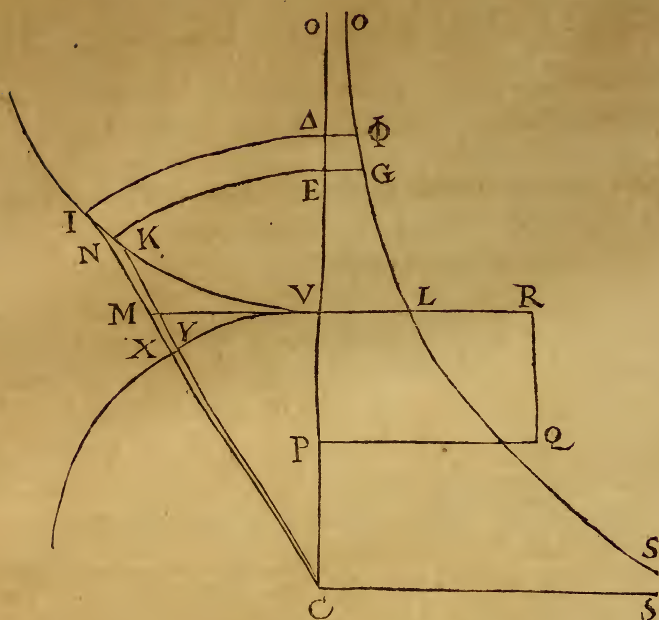
440. Hinc si (juxtà constructionem Coroll. 3. prop. 41.) describatur curva VI capiendo angulum VCI sectori conico VCR proportionalem, vel quod in idem recidit, capiendo sectorem circuli CXV ad sectorem conicum VCR in



in datâ ratione, & CI = CT, inveniri poterit velocitas quâ corpus de loco V, ſecundùm lineam ipſi CV perpendicularem projici debet ut in trajectoriâ deſcriptâ VI progrediatur. Nam ſit VS hyperbola quævis, centro C, ſemiaxe tranſverſo CV $=r$, ſemiaxe conjugato CF deſcripta, data erit ratio ſectoris circuli CXV, ad ſectorem hyperbolicum CSV, (ex hyp.) ſeu (439) ratio CE ad datam CF; ergò dabitur CE, ſeu c; Eſt autem in caſ. 2°. (430, 436) $cc = aa - rr$ adeóque $aa = rr + cc$; & hinc datis r & c, dabitur a, ſeu AC, (fig. not. 428). Dato autem puncto A, & vi centripetâ, datur rectangulum PQRV, æquale areæ ABLV, & indè velocitas projectionis habetur, (438). Si trajectoria VI, per ſectores ellipſeos deſcripta fuerit, ſimiliter invenietur c; eſt autem in caſu 3°. (437) $c = \frac{re}{b}$, & $rree - f^4 = bbrr$, adeóque $b = \frac{re}{c}$, $bb = \frac{rree}{cc}$, & $bb = \frac{rree - f^4}{rr} = \frac{rree}{cc}$; quarè $ccrree - r^4ee = f^4cc$, & $ee = \frac{f^4cc}{ccrr - r^4} = \frac{f^4}{rr} \times \frac{cc}{cc - rr}$, cum igitur datæ ſint c, & r, ac $\frac{f^4}{rr}$ = areæ datæ OVLo (429); dabitur ee, ſeu rectangulum PQRV (437) & hinc velocitas projectionis in V, habetur (438). Patet autem in hoc caſu c majorem eſſe debere radio r, ſeu CV, alioquin problema eſſet impoſſibile, cum ſit $e = \frac{ff}{r} \times \frac{c}{\sqrt{cc - rr}}$.

441. Vis centripeta in centrifugam vertatur, ſeu directionem in contrariam mutet, & corpus per rectam VM ad CV perpendicularem cum quâvis velocitate projiciatur, ut trajectoriam VKI deſcribat. Sit ut in caſu 3°. (437) PV ſpatium per quod vi centrifugâ conſtante urgeri debet corpus ut velocitatem acquirat in V velocitati projectionis æqualem, & RV ad LV ut vis centrifuga conſtans ad variabilem in V, & rectangulum PRQV, dicatur ee; velocitas projectionis in V, erit ut e, (per cor. 1. prop. 39.) & quoniam velocitas in receſſu à centro ſemper creſcit, erit velocitas in I vel Δ, ut $\sqrt{ee + \Delta\Phi LV}$, quæ (in formulâ prop. 41.) ſubſtitui debet loco $\sqrt{ABFD}$. Invenietur etiam (430) $Q = re$, $ZZ = \frac{rree}{xx}$, $ee + \Delta\Phi LV = ee + \frac{f^4 \times \overline{xx - rr}^2}{rrxx}$ (431) $= \frac{rreexx + f^4xx - f^4rr}{rrxx}$. Hinc quantitas ABFD − ZZ (propoſ. 41.) fiet hic $= \frac{rreexx + f^4xx - f^4rr - r^4ee}{rrxx} = \frac{bbrrxx - bbr^4}{xx}$, ponendo $rree + f^4 = bbrr$. Quarè $\sqrt{ABFD - ZZ} = \frac{b\sqrt{xx - rr}}{x}$. Factis igitur debitis ſubſtitutionibus, formula prop. 41. $\frac{Q \times CX^2 \times IN}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$, in hanc mutatur $\frac{\frac{1}{2}r^3edx}{bx\sqrt{xx - rr}} = \frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{x\sqrt{xx - rr}}$, ponendo $\frac{re}{b} = c$. Quarè ſector circuli $CXY = \frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{bx\sqrt{xx - rr}}$, ut in caſ. 3°. (437). Igitur trajectoria VI conſtruetur per ſectores ellipticos prorſus ut in hoc 3°. caſu.

442. Schol. Keillius ad calcem introduc-



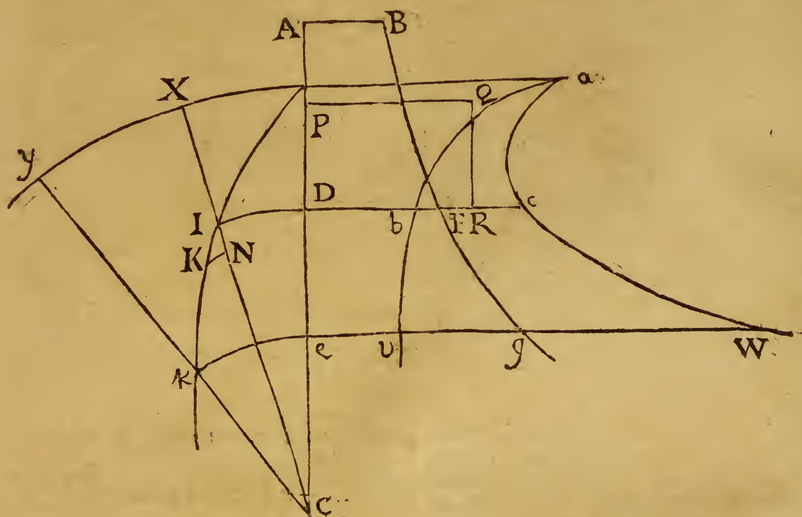
ductionis ad veram aſtronomiam, inverſum problema virium centripetarum in ratione triplicatâ diſtantiæ à centro decreſcentium generatim ac perſpicuè ſolvit, & trajectoriarum quæ in hâc hypotheſi deſcribuntur plures proprietates demonſtravit, inter alias iſtam, earum omnium, ſi circulum exceperis, areas eſſe perfectè quadrabiles, quæ quidem de omnibus trajectoriis per conſtr. coroll. 3. prop. 41. deſcriptis facilè demonſtratur. Nam (per prop. 41.) arearum illarum fluxio $CIK = \frac{Q \times IN}{2\sqrt{ABFD - ZZ}} = \frac{-\frac{1}{2}cxdx}{\sqrt{rr-xx}}$ in caſ. 2°. & $CIK = \frac{Q \times IN}{2\sqrt{ABFD - ZZ}} = \frac{\frac{1}{2}cxdx}{\sqrt{xx-rr}}$ in caſu 3°. (437. 441.). Ponatur 1°. $\sqrt{rr-xx} = z$; & erit $rr - xx = zz$, $-xdx = zdz$, & $-\frac{\frac{1}{2}cxdx}{\sqrt{rr-xx}} = CIK = \frac{1}{2}cdz$, & ſumptis fluentibus, ſector $CIV = \frac{1}{2}cz = \frac{1}{2}c\sqrt{rr-xx}$, nulla enim eſt addenda quantitas conſtans. Ponatur 2°. $\sqrt{xx-rr} = y$, & proindè $xx - rr = yy$, $xdx = ydy$, erit $CIK = \frac{\frac{1}{2}cxdx}{\sqrt{xx-rr}} = \frac{1}{2}cdy$, & ſector fluens $CIV = \frac{1}{2}cy = \frac{1}{2}c\sqrt{xx-rr}$.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXIX.

Datâ lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, secundum datam rectam egressi.

Stantibus quæ in tribus propositionibus præcedentibus: exeat



corpus de loco *I* secundum lineolam *IK*, eâ cum velocitate quam corpus aliud, vi aliquâ uniformi centripetâ, de loco *P* cadendo acquirere posset in *D*: sitque hæc vis uniformis ad vim, quâ corpus primum urgetur in *I*, ut *DR* ad *DF*. Pergat autem corpus versus *k*; centroque *C* & intervallo *Ck* describatur circulus *ke* occurrens rectæ *PD* in *e*, & erigantur curvarum *BFg*, *abv*, *acw* ordinatim applicatæ *eg*, *ev*, *ew*. (y) Ex dato

(y) * *Ex dato rectangulo P D R Q &c.* Ex datâ vis centripetæ lege, datur curva linea BFG, (per constr. 1æ. partis prop. 39). Dato rectangulo PDRQ, datur locus A, de quo corpus urgente vi centripetâ variabili cadere debet, ut velocitatem acquirat in loco D, æqualem velocitati quam corpus aliud urgente aliquâ uniformi vi centripetâ notâ ex loco P cadens acquisivit eodem loco D, (per cor. 1. prop. 39.) dato autem loco A, & descriptâ curvâ BFg, describi poterit altera curva VLM, (per constr. & fig. 2æ. ptis. Prop. 39).

dato rectangulo *PDRQ*, datâque lege vis centripetæ quâ corpus primum agitatur, datur curva linea *BFg*, per constructionem problematis XXVII, & ejus corol. I. ([z]) Deinde ex dato angulo *CIK* datur proportio nascentium *IK*, *KN*, & inde, per constructionem prob. XXVIII. datur quantitas Q, unà cum curvis lineis *abv*, *acw*: ideoque, completo tempore quovis *Dbve*, datur tum corporis altitudo *Ce* vel *Ck*, tum area *Dcwe*, eique æqualis sector *XCy*, angulusque *ICk*, & locus *k* in quo corpus tunc versabitur. *Q. E. I.*

Supponimus autem in his propositionibus vim centripetam in recessu quidem à centro variari secundum legem quamcunque, quam quis imaginari potest, in æqualibus autem à centro distantiis esse undique eandem. Atque hactenus motum corporum in orbibus immobilibus consideravimus. Superest ut de motu eorum in orbibus, qui circa centrum virium revolvuntur, adjiciamus pauca.

(z) * *Deinde.* Cum sit IK ad KN, ut sinus totus ad sinum anguli dati NIK, (per cor. 2. prop. 41.) dabitur quantitas constans Q, unà cum curvis lineis abu, acw, est enim $IK : KN = \sqrt{ABFD}$ (sive $\sqrt{PDRQ}$) : Z; est ergo data Z (per constr. probl. 28. & not. 418). & $Z = \frac{Q}{A}$ sive $A \times Z = Q$ unde habetur Q, ex quibus habentur quantitates $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$ & $\frac{Q \times CX^2}{2A^2 \times \sqrt{ABFD - ZZ}}$ quæ sunt ordinatæ curvarum abv, acw.

SECTIO IX.

De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apsidum.

PROPOSITIO XLIII. PROBLEMA XXX.

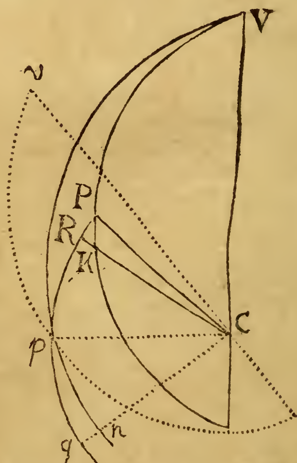
(a) *Efficiendum est ut corpus in trajectoriâ quâcunque circa centrum virium revolvente perinde moveri possit, atque corpus aliud in eâdem trajectoriâ quiescente.*

In orbe *VPK* positione dato revolvatur corpus *P* pergendo à *V* versus *K*. A centro *C* agatur semper *Cp*, quæ sit ipsi *CP* æqualis, angulumque *VCp* angulo *VCP* proportionalem constituat; & (b) area, quam linea *Cp* describit, erit ad aream *VCP*, quam linea *CP* simul describit; ut velocitas lineæ describentis *Cp* ad velocitatem lineæ describentis *CP*; hoc est, ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ideoque in datâ ratione, & prop-

(a) * *Efficiendum est.* Sit VPK quælibet immota trajectoria quam corpus P ad centrum virium C tendens describat pergendo ab V versùs K, invenienda est lex vis centripetæ ad C tendentis, quâ urgente corpus aliud p feratur in perimetro figuræ u p, priori similis & æqualis, intereadum hæc ipsa figura u p, circà C revolvitur in uno eodemque plano, ità ut dum corpus P, arcum quemlibet ut V P, percurrit in orbe quiescente V P, aliud corpus p, similem & æqualem arcum u p, percurrat in orbe revolvente u p.

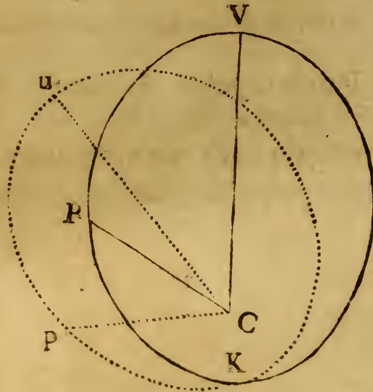
443. Si fuerit C V ad trajectoriam VPK in puncto V perpendicularis, hoc est, si sit C V linea apsidum in orbe quiescente, & correspondens C u linea apsidum in orbe revolvente, motus angularis lineæ C u dicitur apsidum motus, qui in consequentia fit, ubi linea C u, in eandem partem fertur cum corpore P, vel p. In antecedentia verò ubi linea C u, & corpus P, vel p, in plagas contrarias tendunt.

(b) * *Et area quam linea Cp, describit.* Sit V p n curva quam corpus p in orbe mobili u p revolvens describit, centro C, intervallo C P, vel C p, describatur circuli arcus P p q, agatur radius C R orbem



quiescentem V P K secans in K, & radius C q, trajectoriam V p n, secans in n, sintque K, n, loca in quibus eodem tempore reperiuntur corpora P, p, id est, arcus P K, p n, sint eodem tempore descripti. Nascentibus arcubus P R, p q, sectores P C K, p C n, æquales sunt factis ½ PC

propterea tempori proportionalis. Cum area tempori proportionalis ſit quam linea *Cp* in plano immobili deſcribit, manifeſtum eſt quod corpus, cogente juſtæ quantitatis vi centripetâ revolvi poſſit unà cum puncto *p* in curvâ illâ lineâ quam punctum idem *p* ratione jam expoſitâ deſcribit in plano immobili. Fiat angulus *VCu* angulo *PCp*, & linea *Cu* lineæ *CV*, atque figura *uCp* figuræ *VCP* æqualis, & corpus in *p* ſemper exiſtens movebitur in perimetro figuræ revolventis *uCp*, eodemque tempore deſcribet arcum ejus *up* quo corpus aliud *P* arcum ipſi ſimilem & æqualem *VP* in figurâ quieſcente *VPK* deſcribere poteſt. Quæratur igitur, per corollarium quintum propoſitionis VI., vis centripeta quâ corpus revolvi poſſit in curvâ illâ lineâ quam punctum *p* deſcribit in plano immobili, & ſolvetur problema. *Q. E. F.*



PRO-

$\frac{1}{2}$ PC×PR, $\frac{1}{2}$ pC×pq, adeóque ob pC=PC ſectores illi ſunt inter ſe ut arcus PR, pq, ſeu ut anguli PCK, pCn; ſed quoniam angulus VCK, eſt ad angulum VCn, in datâ ratione anguli VCP, ad angulum VCp (per hyp.) erit dividendo angulus VCK—VCP, ad angulum VCn—VCp, hoc eſt, angulus PCK, ad angulum pCn, in datâ ratione anguli VCP, ad VCp, atquè adeò ſector PCK, ad ſectorem pCn, in eâdem ratione datâ. Undè (per cor. Lem. 4.) totus ſector VpC, eſt ad totum ſectorem VPC, eodem tempore deſcriptum in datâ ratione, ſive ſector VpC, eſt ut ſector VPC, proindéque (per prop. 1.) ut tempus quo ſector uterque deſcribitur. Quare manifeſtum eſt (per prop. 2.) quod corpus p, cogente juſtæ quantitatis vi centripetâ revolvi poſſit in curvâ lineâ Vpn, quam punctum p perpetuò tangit. Porrò dato orbe VPK, & virium centro C, datur longitudo & poſitio lineæ CP, per (ſuperiorem Newt. conſtr.) ideoque & lineæ Cp, & hinc datur punctum quodlibet p, in trajectoriâ Vpn, adeóque & ipſa trajectoria datur. Inveniri igitur poteſt (per cor. 5. prop. 6). Lex vis centripetæ quâ corpus p, in trajectoriâ illâ Vpn revolvi poteſt.

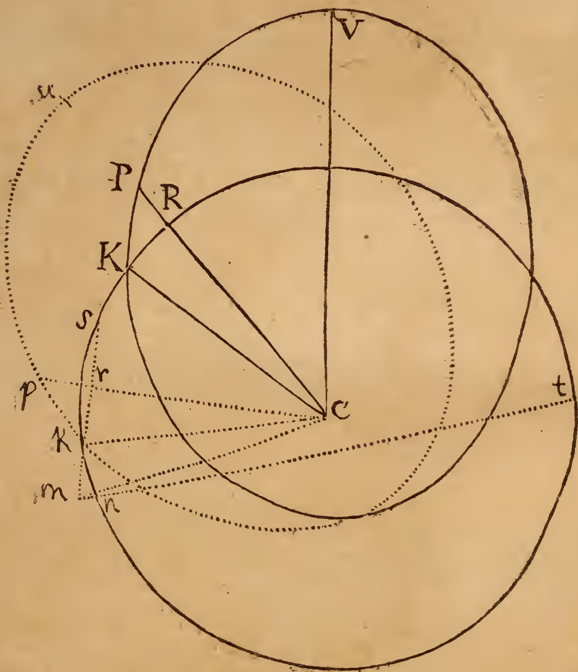
Quoniam autem angulus VCP æqualis eſt angulo vCp (per conſtr.) erit quoque angulus VCv æqualis angulo PCp, adeóque datâ Cp, magnitudine & poſitione, facile invenitur poſitio lineæ apſidum Cv in orbe mobili Vp: Fiat enim angulus VCv angulo PCp, & linea Cv lineæ CV, atque figura uCp, figuræ VCP ſimilis & æqualis, & corpus unà cum puncto p, ſemper latum & figuram immotam Vpn deſcribens, deſcribit etiam perimetrum up, figuræ revolventis uCp, eodemque tempore deſcribit arcum ejus vp, quo corpus aliud P arcum ipſi ſimilem & æqualem VP, in figurâ quieſcente VPK, deſcribere poteſt. Vide Varignonium Legem vis centripetæ in trajectoriâ Vpn determinantem, in Comm. Pariſ. 1705.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XIV.

Differentia virium, quibus corpus in orbe quiescente, & corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicatâ ratione communis altitudinis inverse.

Partibus orbis quiescentis *VP*, *PK* sunto similes & æquales orbis revolventis partes *u p*, *p k*; & punctorum *P*, *K* distantia intelligatur esse quam minima. A puncto *k* in rectam *p C* demitte perpendiculum *k r*, idemque produc ad *m*, ut sit *mr* ad



k r ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*. Quoniam corporum altitudines *PC* & *pC*, *KC* & *kC*, semper æquantur, manifestum est quod linearum *P C* & *p C* incrementa vel decrementa semper sint æqualia, ideoque si corporum in locis *P* & *p* existentium distinguantur motus singuli (per legum corol. 2) in binos,

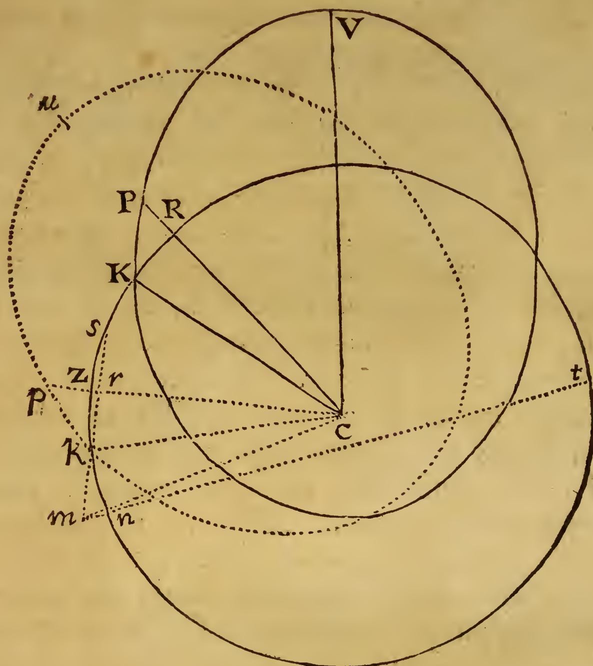
nos, quorum hi verſus centrum, ſive ſecundum lineas PC, pC determinentur, & alteri prioribus tranſverſi ſint, & ſecundum lineas ipſis PC, pC perpendiculares directionem habeant; motus verſus centrum erunt æquales, & motus tranſverſus corporis p erit ad motum tranſverſum corporis P, ut motus angularis lineæ pC ad motum angularem lineæ PC, id eſt, ut angulus VCp ad angulum VCP. Igitur eodem tempore quo corpus P motu ſuo utroque pervenit ad punctum K, corpus p æquali in centrum motu æqualiter movebitur à p verſus C, ideoque completo illo tempore reperietur alicubi in lineâ mkr, quæ per punctum k in lineam pC perpendicularis eſt; & motu tranſverſo acquiret diſtantiam à lineâ pC, quæ ſit ad diſtantiam quam corpus alterum P acquirit à lineâ PC, ut eſt motus tranſverſus corporis p ad motum tranſverſum corporis alterius P. Quare cum kr æqualis ſit diſtantiæ quam corpus P acquirit à lineâ PC, ſitque mr ad kr ut angulus VCp ad angulum VCP, hoc eſt, ut motus tranſverſus corporis p ad motum tranſverſum corporis P, (c) manifeſtum eſt quod corpus p completo illo tempore reperietur in loco m. Hæc ita ſe habebunt ubi corpora p & P æqualiter ſecundum lineas pC & PC moventur, ideoque æqualibus viribus ſecundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulus pCn ad angulum pCk ut eſt angulus VCp ad angulum VCP, ſitque nC æqualis kC, & corpus p completo

LIBER PRIMUS. PROP. XLIV. THEOR. XIV.

(c) * *Manifeſtum eſt quod corpus p &c.* Ex puncto K in rectam P C, demiſſum intelligatur perpendiculum K R, & erit P R = p r. Fingamus corpus P de loco P ità projici ut vi ſecundum directionem P C, urgente percurrat ſpatium P R, eodem tempore quo vi alterâ ſecundum rectam ipſi R K, parallelam impellente, percurrit ſpatium æquale rectæ R K, adeò ut eo tempore viribus conjunctis deſcribat diagonalem P K. Fingamus ſimiliter corpus p, de loco p ità projici, ut vi ſecundùm directionem p C urgente percurrat p r = P R, eodem tempore quo corpus P percurrit P R aut R K vel P K, & vi alterâ ſecundum directionem rectæ r m, parallelam impellente, corpus p, eodem tempore deſcribat ſpatium æquale rectæ r m, quæ eſt ad R K, in ratione velocitatis tranſverſæ corporis p, ad velocitatem tranſverſam corporis alterius P. His poſitis manifeſtum eſt corpora P & p, de locis P, & p, ſimul egreſſa, eodem temporis puncto reperiri in locis K, & m.

* Re-

pleto illo tempore (d) reverâ reperietur in *n*; (e) ideoque vi majore urgetur quam corpus *P*, si modo angulus *nCp* angulo *kCp* major est, id est si orbis *v p k* vel movetur in consequentia, vel movetur in antecedentia majore *celeritate* quam sit dupla ejus quâ linea *CP* in consequentia fertur; & vi minore si orbis tardius movetur in antecedentia. Estque virium diffe-



(d) * *Reverâ reperitur in puncto n.* Est enim angulus p C k = P C K (per hyp.) & si fuerit n locus corporis p, erit (per prop. 43.) angulus p C n, ad angulum P C k, ut angulus VCp, ad angulum VCP, & puncta C, n, m, jacent in unâ rectâ. Nascentibus enim angulis p C n, P C K, perpendicula r m, R K, sunt ut arcus circulares nascentes radiis æqualibus C R, C r descripti, seu ut anguli m C r, K C R, (per Lem. 7.) Est ergò angulus m C p, ad angulum K C P, seu k C p, ut m r, ad K R, seu k r, hoc est, ut angulus V C p, ad angulum V C P, sive, ut angulus p C n, ad angulum k C p, (per constr.) quare angulus m C p = p C n, & hinc puncta C, n, m, jacent in unâ rectâ.

(e) 444. *Ideoque vi majore urgetur, quam corpus P, si modò angulus* n C p, *angulo* k C p *major; vi minore*, si angulus m C p, angulo k C p minor; & vi æquali, si angulus m C p, angulo k C p æqualis. Nam in 1°. casu linea Cm, major est quam Cn, & punctum m extrà peripheriam

differentia ut locorum intervallum mn, per quod corpus illud p ipſius actione, dato illo temporis ſpatio, transferri debet. Centro C intervallo Cn vel Ck deſcribi intelligatur circulus ſecans lineas mr, mn productas in s & t, & (f) erit rectangulum $mn \times mt$ æquale rectangulo $mk \times ms$, ideoque mn æquale $\frac{mk \times ms}{mt}$. (g) Cum autem triangula pCk, pCn dato tempore den-

riam circuli radio Ck, vel Cn, deſcripti cadit, adeóque præter vim quâ corpus utrumque ad centrum urgetur, requiritur vis altera quâ corpus P, adhuc deſcribat m n. In 2°. caſu C m, minor eſt quam C n, puncto m, cadente inter puncta k, & r, in lineâ k r. In 3°. caſu C m = C n, coincidentibus punctis m, n, k.

445. Porrò angulus m C p, angulo k C p, ſeu k C P major eſt, ſi orbis v p k, vel movetur in conſequentia (ut patet) vel movetur in antecedentia majore celeritate quam ſit dupla ejus quâ linea C P in conſequentia fertur. Nam in hoc caſu angulus v C V, eſt plusquam duplo major angulo V C p, ſeu u C p, adeóque angulus VCp, major angulo V C P, ſeu v C p, & hinc angulus p C m, major angulo p C k, cum ſit angulus p C m, ad angulum p C k, ut V C p, ad V C P.

446. Si orbis u p k, movetur in antecedentia cum celeritate duplâ ejus quâ linea C P, in conſequentia fertur, erit angulus V C p = V C P; cumque ſit etiam C p = C P, corpus p deſcribet orbem immotum V p, ſimilem & æqualem orbi VPK. In hoc caſu corpus p, non fertur ab V, versùs p, ſed in partem oppoſitam ut patet.

447. Si orbis vpk movetur in antecedentia minori celeritate quam ſit dupla ejus quâ linea C P in conſequentia fertur, erit angulus m C p, angulo k C p minor. In hoc enim caſu angulus V C v minor eſt duplo angulo V C P, vel v C p, adeóque angulus V C p, minor angulo V C P, vel v C p, & hinc angulus m C p, minor angulo k C p (per conſtr.)

(f) * *Erit rectangulum* m n × m t = *rectangulo* m k × m s. Per prop. 35 vel 36. lib. 3. Elem.

(g) *Cum autem triangula* p C k, ſive P C K, *&* p C n, *dato tempore deſcribantur* (per hyp.) *dantur magnitudine* (per prop. 1.) Porrò triangulum $PCK = \frac{1}{2} PC \times KR$, & trian-

dentur magnitudine, ſunt kr & mr, earumque differentia mk & ſumma ms reciprocè ut altitudo pC, ideoque rectangulum $mk \times ms$ eſt reciprocè ut quadratum altitudinis pC. Eſt & mt directè ut $\frac{1}{2}\,mt$, id eſt, ut altitudo pC. Hæ ſunt primæ rationes linearum naſcentium; & hinc fit $\frac{mk \times ms}{mt}$, id eſt lineola naſcens mn, eique proportionalis virium differentia reciprocè ut cubus altitudinis pC. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc differentia virium in locis P & p, vel K & k, eſt ad vim quâ corpus motu circulari revolvi poſſit ab R ad K eodem tempore quo corpus P in orbe immobili deſcribit arcum PK, ut lineola naſcens mn ad (h) ſinum verſum arcus naſcentis RK, id eſt ut $\frac{mk \times ms}{mt}$ ad $\frac{rkq}{2kC}$, vel ut $mk \times ms$ ad rk quadratum; hoc eſt, ſi capiantur datæ quantitates F, G in

triangulum $pCn = \frac{1}{2}pC \times mr$. Junctis enim pn, pm, erit triangulum naſcens pnC æquale naſcenti pmC, ob mn evaneſcentem reſpectu lineæ finitæ Cn, & triangulum $pmC = \frac{1}{2}pC \times mr$. Sunt ergò facta $pC \times kr$, & $pC \times mr$, conſtantia ſeu data & hinc kr, & mr, ſunt reciprocè ut altitudo pC, & propterea dividendo & componendo, earum differentia; mk, & ſumma ms, ſunt reciprocè ut eadem altitudo pC. Quod ut clariùs intelligatur, ſupponamus eſſe $kr = \frac{F}{pC}$, $mr = \frac{G}{pC}$, & F & G eſſe quantitates datas, erit $mr - kr = mk = \frac{G-F}{pC}$, $mr + kr = ms = \frac{G+F}{pC}$, hoc eſt, ob quantitates F, G, G − F, G + F, datas, erunt kr, mr, mk, ms, ut $\frac{1}{pC}$. Hinc rectangulum $mk \times ms$, $= \frac{GG-FF}{pC^2}$, eſt reciprocè ut quadratum altitudinis PC; Eſt & mt, directè ut $\frac{1}{2}mt = Cn = Ck = pC$, quarè $mn = \frac{mk \times ms}{mt} = \frac{GG-FF}{2pC^3}$, & ideò mn eſt reciprocè ut cubus altitudinis pC ob datam quantitatem $\frac{GG-FF}{2}$.

(h) * *Ad ſinum verſum arcûs naſcentis Rk*, ſeu Zk, hoc eſt, ad Zr, nam Zr & mn, ſunt ſpatia naſcentia eodem tempuſculo viribus illis *deſcripta*, & *iiſdem* proindè viribus proportionalia. Eſt autem $mn = \frac{mk \times ms}{mt}$ (ex Dem.) & $Zr = \frac{kr^2}{2kC}$. Nam, ex naturâ circuli $Zr : kr = kr : KC + rC$, hoc eſt, quia rC uſurpari poteſt pro ZC, & quia $ZC = kC$, $Zr : kr = kr : 2kC$, & $Zr = \frac{kr^2}{2kC}$; undè $mn : Zr = mk \times ms : kr^2$, ob $mt = 2kC$. Si verò capiantur duæ quantitates G, F, in eâ ratione ad invicem quam habet angulus VCp, ad angulum VCP, ſeu quam habet mr, ad kr, erit $mk \times ms : kr^2 = GG - FF : FF$; ut ex ſuprà demonſtratis liquet, ergò $mn : Zr = GG - FF : FF$.

* Et

in eâ ratione ad invicem quam habet angulus *VCP* ad angulum *VCp*, ut GG−FF ad FF. Et (i) propterea, si centro *C* intervallo quovis *CP* vel *Cp* describatur sector circularis æqualis areæ toti *VPC*, quam corpus *P* tempore quovis in orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto descripsit: differentia virium, quibus corpus *P* in orbe immobili & corpus *p* in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam, quâ corpus aliquod, radio ad centrum ducto, sectorem illum eodem tempore, quo descripta sit area *VPC* uniformiter describere po-

LIBER PRIMUS. PROP. XLIV. THEOR. XIV.

(i) * *Et propterea si centro* C. Corpus P, in orbitâ V P K revolvens dato tempore datum sectorem P C K, radio ad centrum C ducto describit (per prop. 1.) & corpus in circulo radio C K descripto uniformiter revolvens, & arcum R K, seu sectorem C R K = C P K, describens eodem tempore quo corpus P describit arcum P K, seu sectorem C P K, dato tempore datum quoque sectorem describit. Quare corpus P, in orbitâ V P K, & corpus in circulo prædicto revolventia, radiis ad centrum C ductis, sectores æquales temporibus æqualibus describunt. *Et propterea si centro C, intervallo CP, vel Cp, describatur &c.*

* *Erit*

DE MOTU CORPORUM.

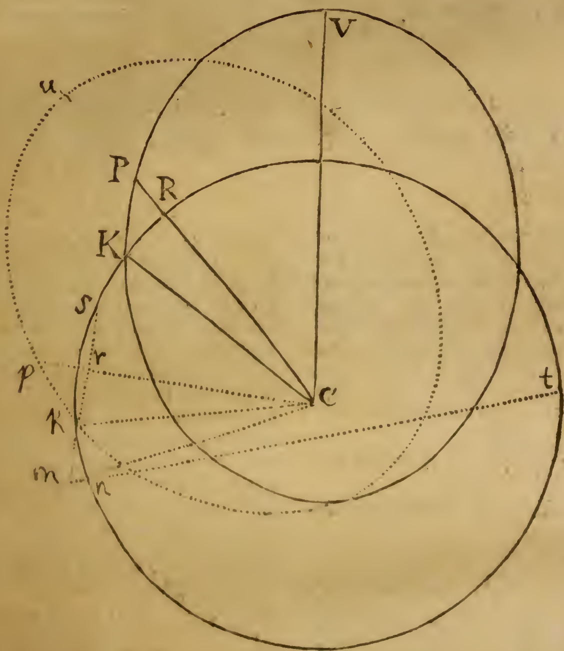
potuisset, ut GG−FF ad FF. Namque sector ille & area *pCk* sunt ad invicem ut tempora quibus describuntur.

Corol. 2. Si orbis *VPK* ellipsis sit umbilicum habens *C* & apsidem summam *V*; eique similis & æqualis ponatur ellipsis *upk*, ita ut sit semper *pC* æqualis *PC* & angulus *VCp* sit ad angulum *VCP* in datâ ratione G ad F; pro altitudine autem *PC* vel *pC* scribatur A, & pro ellipseos latere recto ponatur 2R: erit vis, quâ corpus in ellipsi mobili revolvi potest, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$ & contra. Exponatur enim vis quâ corpus revolvatur in immotâ ellipsi per quantitatem $\frac{FF}{AA}$, & vis in *V* erit $\frac{FF}{CV\ quad.}$. (k) Vis autem quâ corpus in circulo ad distantiam *CV* eâ cum velocitate revolvi posset quam corpus in ellipsi revolvens habet in *V*, est ad vim quâ corpus in ellipsi revolvens urgetur in apside *V*, ut dimidium lateris recti ellipseos ad circuli semidiametrum *CV*, ideoque valet $\frac{RFF}{CV\ cub.}$: & vis, quæ sit ad hanc ut GG−FF ad FF, valet

RGG

(k) * *Vis autem quâ corpus in circulo &c.* Demonstratio Newtoniana ita procedit: Vis quâ corpus in Ellipsi circa ejus focum revolvitur, est semper æqualis cuidam quantitati constanti divisæ per quadratum distantiæ à foco (per Prop. XI.) Sumatur ergo pro illâ quantitate constanti, quadratum *FF* cujus latus F est primâ ex illis indeterminatis (sed constantibus) quæ exprimunt rationem anguli V C P ad angulum V C p, erit vis in $V = \frac{FF}{VC^2}$. Sit Corpus circà centrum quodvis in circulo revolvens, ad distantiam CV, eâdem velocitate quâ Corpus in ellipsi revolvens urgetur in apside V, sumantur in Circulo & in Ellipsi arcus quamminimi eodem tempore descripti, illi arcus erunt inter se æquales, ob æquales velocitates (ex Hypoth.) & eorum sagittæ erunt inter se ut vires Centrales (per Corol. 4. Prop. I.): in ellipsibus autem omnibus in quibus vis centripeta ad *focum tendit* (& iis annumeratur Circulus) latera recta sunt inversè ut arcuum quamminimo tempore descriptorum sagittæ & directè ut quadrata perpendiculi ducti ab extremitate eorum arcuum in lineam ad Centrum virium tendentem (per Corol. 2. Prop. XIII.) sed in apside Ellipseos & Circulo, illa perpendicula sunt ipsi arcûs, ideoque sunt æqualia; Ergo latera recta hujus Ellipsis & hujus Circuli erunt inversè ut sagittæ arcuum sive inversè ut vires Centrales; Latus rectum circuli est ipsa diameter, ergo sumendo dimidium utriusque Lateris recti est *vis quâ Corpus in Ellipsi revolvens urgetur* &c. Reliqua demonstratio est plana.

$\frac{RGG - RFF}{CV \, cub.}$: estque hæc vis (per hujus corol. 1.) differentia virium in *V* quibus corpus *P* in ellipsi immotâ *VPK*, & corpus *p* in ellipsi mobili *u p k* revolvuntur. Unde cum (per hanc prop.) differentia illa in aliâ quâvis altitudine A sit ad seipsam in altitudine *CV* ut $\frac{1}{A \, cub.}$ ad $\frac{1}{CV \, cub.}$, eadem diffe-



rentia in omni altitudine A valebit $\frac{RGG - RFF}{A \, cub.}$. Igitur ad vim $\frac{FF}{AA}$, quâ corpus revolvi potest in ellipsi immobili *VPK*, addatur excessus $\frac{RGG - RFF}{A \, cub.}$; & componetur vis tota $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A \, cub.}$ quâ corpus in ellipsi mobili *upk* iisdem temporibus revolvi possit.

Co-

Corol. 3. (l) Ad eundem modum colligetur quod, si orbis immobilis *V P K* ellipsis sit centrum habens in virium centro *C*; eique similis, æqualis & concentrica ponatur ellipsis mobilis *u p k*; sitque 2 R ellipseos hujus latus rectum principale, & 2 T latus transversum sive axis major, atque angulus *VCp* semper sit ad angulum *VCP* ut G ad F; vires, quibus corpora in ellipsi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi possunt, erunt ut $\frac{FFA}{T\,cub.}$ & $\frac{FFA}{T\,cub.} + \frac{RGG - RFF}{A\,cub.}$ respectivè.

Corol. 4. Et universaliter, si corporis altitudo maxima *CV* nominetur T, & radius curvaturæ quam orbis *V P K* habet in

(l) *Ad eundem modum* &c. Si Corpus revolvatur in Ellipsi vi centripetâ tendente ad focum Ellipseos, vis centralis est directè ut distantia à Centro; ideoque erit æqualis quantitati constanti multiplicatæ per distantiam (per Prop. X.), posito 2 *T* pro axe transverso & 2 *R* pro latere recto, sit ea quantitas constans $\frac{FF}{T^3}$, vis in V erit $\frac{FF \times CV}{T^3}$ vel quoniam CV $=T$, erit $\frac{FF}{TT}$ in aliis verò omnibus punctis erit $\frac{FF \times A}{T^3}$.

Sit Corpus in circulo revolvens circa centrum C ad distantiam CV, quâlibet vi centripetâ, sed tali ut eâdem velocitate feratur quâ corpus in Ellipsi latum urgetur in extremitate axis transversi, sumantur in eo Circulo & in extremitate axis transversi Ellipseos arcus quamminimi eodem tempore descripti illi arcus erunt æquales, ob æquales velocitates, & eorum sagittæ erunt ut vires Centrales quibus corpora in circulo & Ellipsi retinentur (per Cor. 4. Prop. I.); in Ellipsibus autem diversis (& iis annumeratur Circulus) in quibus vis centripeta ad centrum tendit, in distantiis æqualibus à Centro, dupla quadrata facti axium sunt inversè ut sagittæ quam minimo tempore descriptæ, & directè ut quadrata arearum dato tempore descriptarum (per constr. Prop. X.), cum ergo hic sumantur arcus æquales & perpendiculares in lineam ad centrum ductam, & distantiæ à centro sint æquales, illæ areæ utrinque sunt æquales, ergo sagittæ arcuum in Ellipsi & in circulo sunt inverse ut ipsa quadrata facti axium, seu quia axis transversus Ellipseos & circuli diameter idem sunt, sagittæ arcuum in Ellipsi & circulo sunt inverse ut quadratum axis conjugati ad quadratum transversi, sivè inverse ut Latus rectum ad Axem transversum ergo $2T:2R$ (sive $T:R) = \frac{FF}{TT}$: ad vim in *Circulo quæ itaque* erit $\frac{R \times FF}{T^3}$ sed hæc vis est ad differentiam virium in orbe mobili & immobili, ut *FF* ad GG$-$FF, ergo illa differentia est $\frac{RGG - RFF}{T^3}$, hæc autem differentia in V, est ad differentiam in alio quovis loco inversè ut cubi altitudinum ergo $A^3 : CV^3$ (sive $T^3) = \frac{RGG-RFF}{T^3} : \frac{RGG-RFF}{A^3}$, cum ergo Vis in Orbe immobili sit ut $\frac{FFA}{T^3}$ in orbe mobili erit $\frac{FFA}{T^3} + \frac{RGG-RFF}{A^3}$. Q. E. D.

in *V*, id eſt radius circuli æqualiter curvi, nominetur R, & vis centripeta, quâ corpus in trajectoriâ quâcunque immobili *VPK* revolvi poteſt in loco *V* dicatur $\frac{VFF}{TT}$, atque aliis in locis *P* indefinitè dicatur X, altitudine *CP* nominatâ A, & capiatur G ad F in datâ ratione anguli *VCp* ad angulum *VCP*: erit (m) vis centripeta, quâ corpus idem eoſdem motus in eâdem trajectoriâ *upk* circulariter motâ temporibus iiſdem peragere poteſt, ut ſumma virium $X + \frac{VRGG - VRFF}{A\ cub.}$

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in orbe quocunque immobili, augeri vel minui poteſt ejus motus angularis circa centrum virium in ratione datâ, & inde inveniri novi orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

(m) * *Erit vis centripeta*, ut hæc commodè demonſtrentur adhibendum Lemma ſequens.

Corol. 6. Igitur ſi ad rectam *CV* poſitione datam erigatur perpendiculum *VP* longitudinis indeterminatæ, jungaturque *CP*, & ipſi æqualis agatur *Cp*, conſtituens angulum *VCp*, qui ſit ad angulum *VCP* in datâ ratione; vis quâ corpus gyrari poteſt in curva illa *Vpk* quam punctum *p* perpetuò tangit, erit reciprocè ut cu-

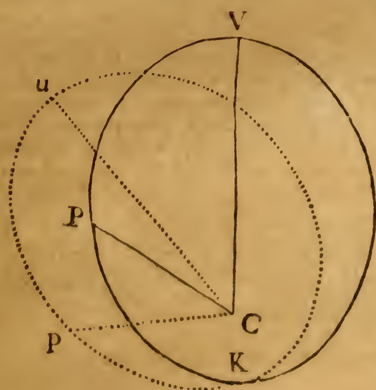
448. Lemma. Si corpus ad centrum virium C tendens deſcribat trajectoriam immotam VP, vis centripeta quâ in apſide V urgetur eſt ad vim centripetam corporis alterius in circulo VBQ, ad eandem diſtantiam CV, eâdem cum velocitate revolventis, ut diſtantia CV ad VO radium circuli VDS, trajectoriam VP oſculantis in V. Capiantur in circulo VBQ & in trajectoriâ VP arcus quam minimi & æquales VB, VD, & ex punctis B & D ad rectam CV demiſſa intelligantur perpendicula BE, DF; arcus evaneſcentes VB, VD eodem tempore à corporibus duobus percurrentur, ob utriuſque corporis velocitatem æqualem, eruntque perpendicula BE, DF æqualia (per Lem. VII). Quoniam autem arcus evaneſcens VD uſurpari poteſt pro arcu circuli curvam VP oſculantis in V, erit ex naturâ circuli $VF : DF = DF : VO + FO$, ſeu $2VO$, adeoque $DF^2 = 2VO \times VF$, & ſimiliter $BE^2 = 2VC \times VE = 2VO \times VF$; undè $VF : VE = VC : VO$; ſed vis centripeta corporis arcum VD deſcribentis, eſt ad vim centripetam alterius corporis arcum VB deſcribentis ut VF ad VE, quæ ſunt ſpatia viribus illis urgentibus eodem tempuſculo deſcripta, quarè vis centripeta quâ corpus in apſide V urgetur, eſt ad vim centripetam alterius corporis in circulo ad eandem diſtantiam eâdem cum velocitate revolventis, ut diſtantia illa CV ad radium VO circuli oſculatoris in V. Q. E. D.

449. Cor. 1. Si radius VO circuli trajectoriam VP oſculantis in apſide V dicatur *R*, diſtantia CV, *T*, diſtantia CP, *A*, vis centripeta in V, $\frac{VFF}{TT}$, hæc erit ad vim centripetam in circulo VQ, ad eandem diſtantiam CV eâdem cum velocitate deſcripto ut *T* ad *R*, (448) hæc ergo erit $\frac{VRFF}{T^3}$, quæ erit ad differentiam virium centripetarum in apſidibus V & u, orbis immobilis VP, & orbis mobilis up, ut FF ad GG − FF (per Cor. I. Newt.) ideoque differentia *illa* erit $\frac{VRGG - VRFF}{T^3}$ quæ *erit ad differentiam* in aliis locis P ut A^3 ad T^3, ideoque in quibuſvis locis erit differentia virium in orbe mobili & immobili $\frac{VRGG - VRFF}{A^3}$. Quod aliâ ratione demonſtravit Hermannus prop. 25. Lib. 1. Phoronomiæ.

450. Coroll. 2. Hinc ſi vis centripeta in quovis puncto P, orbitæ immobilis VP, dicatur *X*, vis in puncto æquè alto p, orbitæ mobilis up erit $= X + \frac{VRGG - VRFF}{A^3}$ Q. E. D.

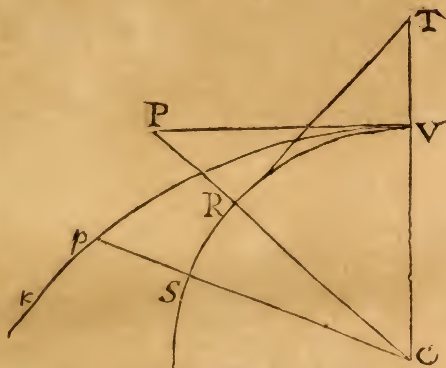
451. Cor. 3. Si orbitæ VP & up ſint ellipſes quarum umbilicus communis C, erit (240) radius oſculi *R* æqualis dimidio lateri recto ellipſeos VP, vel up: & (per prop.

bus altitudinis *Cp*. Nam (n) corpus *P* per vim inertiæ, nullâ aliâ vi urgente, uniformiter progredi poteſt in rectâ *VP*. Additur vis in centrum *C*, cubo altitudinis *CP* vel *Cp*, reciprocè proportionalis, & (per jam demonſtrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam *Vpk*. Eſt (o) autem hæc curva *Vpk* eadem cum curvâ illâ *VPQ* in corol 3. prop. XLI. inventâ, in quâ ibi diximus corpora hujuſmodi viribus attracta obliquè aſcendere.



prop. XI) $X:\frac{VFF}{TT}=TT:AA$, adeoque $X=\frac{VFF}{AA}$, Ergo (450) vis in Orbitâ mobili erit $\frac{VFF}{AA}+\frac{VRGG-VRFF}{A^3}$, & diviſis omnibus terminis per V ut $\frac{FF}{AA}+\frac{RGG-RFF}{A^3}$; & ſi vis centralis ad centrum Ellipſeos dirigatur erit $X:\frac{VFF}{TT}=A:T$ & $X=\frac{VFF\times A}{T^3}$ & vis in Orbita mobili erit $\frac{VFF\times A}{T^3}+\frac{VRGG-VRFF}{A^3}$ & diviſis terminis per V erit $\frac{FF\times A}{T^3}+\frac{RGG-RFF}{A^3}$; ſicut in Cor. 3. & 4. Newt. inventum fuerat.

(n) * *Nam corpus P.* Linea VP conſiderari poteſt tanquam trajectoria immota, in quâ vis centripeta X in loco quovis P nulla eſt, & radius oſculi R infinitus; erit igitur in hoc caſu (per cor. 4.) vis centripeta in loco p, trajectoriæ mobilis, æqualis $\frac{VRGG-VRFF}{A^3}$, adeóque ob datam quantitatem $VRGG-VRFF$, erit X, ſeu vis in p, ut $\frac{1}{A^3}$.



(o) * *Eſt autem hæc curva Vpk eadem &c.* Nam ſi centro C intervallo CV deſcribatur circulus VRS quem recta CP ſecat in R, recta Cp, in S, ſitque angulus SCV ad angulum RCV in datâ ratione, erit quoque ſector SVC ad ſectorem RVC in datâ illâ ratione, & ductâ per punctum R tangente RT, quæ radio CV producto occurrat in T, ejuſdem anguli RCV ſecantes CP, CT erunt æquales, atquè adeò curva Vpk, eadem cum curvâ VPQ, in coroll. 3°. prop. 41. inventâ, in quâ *recta Cp eſt ſemper æqualis abſciſſæ CT, & angulus VCp eſt ſemper ſectori VCR proportionalis.*

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XLV. PROBLEMA XXXI.

(p) *Orbium qui sunt circulis maxime finitimi requiruntur motus apsidum.*

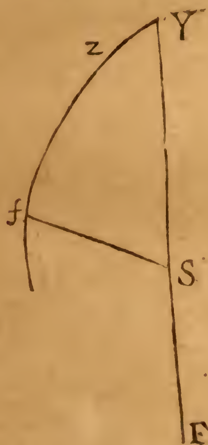
(q) Problema solvitur arithmeticè faciendo ut orbis, quem corpus in ellipsi mobili (ut in propositionis superioris corol. 2. vel 3.) revolvens describit in plano immobili, accedat ad formam orbis cujus apsides requiruntur, & quærendo apsides orbis

(p) * *Orbium qui sunt &c.* Iisdem positis quæ in propositione 44 & ejus corollariis 1. & 2. sit V p n π orbis quem corpus p in ellipsi mobili u p b revolvens describit in plano immobili, & V Π, v b, ellipseon immobilis & mobilis axes transversi, manifestum est punctum V esse apsidem summam tam in ellipsi immotâ V P Π, quam in orbe V p n π, & esse π apsidem imam in orbe V p n π si fuerit C π = C b = C Π, in quâ hypothesi corpus p pervenit ad locum π, ubi corpus P, in ellipsi immotâ pervenit ad apsidem imam Π & in ellipsi revolvente corpus p, pervenit ad b, ac in orbe V p n π, puncta p, b, π, coincidunt. Jam verò datâ vi centripetâ in orbe V p n π, quæritur motus apsidum, hoc est, motus axis u c b, seu quod idem est, quæritur ratio F, ad G, vel anguli V C P ad angulum V C p, aut anguli V C Π, 180°. ad angulum V C π; quod si ellipsis V P Π, sit circulo maximè finitima, orbis V p n π ad circuli formam quam proximè accedet, nam si ellipsis V P Π, in circulum perfectum mutetur, orbis V p n π fit quoque circulus.

(q) * *Problema solvitur arithmeticè.* Revolvatur corpus Y in orbe immoto Y Z f vi centripetâ datâ tendente ad centrum S, sitque punctum Y apsis summa, f apsis ima in illo orbe. Umbilico S, & axe transverso Y S F = Y S + S f, descriptæ intelligantur ellipses *immobilis & mobilis*, efficiendum est ut corpus Y orbem Y Z f describens, *simul revolvatur in hâc ellipsi mobili*, dum corpus aliud ellipsim immotam describit eâ ratione quam exposuimus prop. 43. & inveniendus est apsidum motus. Id autem absolvitur faciendo ut orbis V p n π (fig. superiori) qui omnes orbes ut Y Z f quæcumque sit in illis vis centripetæ lex generaliter exhibet accedat ad formam orbis Y Z f, sive ei similis & æqualis fiat, ac quærendo apsides V π, vel rationem angulorum V C P, V C p, in orbe illo V p n π. Porrò si supponamus orbem V p n π, similem & æqualem factum esse orbi Y Z f, erit vis centripeta in ellipsi immotâ cujus umbilicus S vel C ut $\frac{FF}{AA}$, & vis centripeta in loco quovis Z, orbis Y Z f, vel

bis quem corpus illud in plano immobili describit. Orbes autem eandem acquirent formam, si vires centripetæ quibus describuntur, inter se collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum *V* apsis summa, & scribantur T pro altitudine maximâ *CV*, A pro altitudine quâvis aliâ *CP* vel *Cp*, & X pro altitudinum differentiâ *CV*−*CP*; & vis, quâ corpus in ellipsi circa umbilicum suum *C* (ut in corol. 2.) revolvente movetur, quæque in corol. 2. erat ut $\frac{FF}{AA}+\frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$, id est ut $\frac{FFA+RGG-RFF}{A\ cub.}$, substituendo T−X pro A, erit ut $\frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A\ cub.}$. Reducenda similiter est vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator sit A *cub.* & numeratores, factâ homologorum terminorum collatione, statuendi sunt analogi. Res exemplis patebit.

Exem-



vel in loco P, orbis Vpnπ, ut $\frac{FF}{AA}+\frac{RGG-RFF}{A^3}=\frac{FFA+RGG-RFF}{A^3}=\frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A^3}=\frac{P}{A^3}$, substituendo *T*−*X* pro *A* in numeratore, & *P* pro numeratore toto. Unde si quantitas $\frac{Q}{A^3}$ vim centripetam in loco quovis Z orbis YZf exponat, eaque sit data, erit $\frac{P}{A^3}$ ad $\frac{Q}{A^3}$ in datâ ratione. Sit illa ratio 1 ad *B*, & erit $\frac{PB}{A^3}=\frac{Q}{A^3}$, & $PB-Q=0$. Loco *A*, in quantitate *Q*, substituatur *T*−*X*, & æqualitatis $PB-Q=0$, termini omnes analogi se mutuo destruere debent, hoc est, termini omnes dati seu in quibus non reperitur quantitas variabilis *X* erunt simul nihilo æquales, & termini non dati, seu in quibus variabilis *X* invenitur, erunt etiam simul nihilo æquales, atque inde determinabitur ratio G ad F seu anguli VCP ad angulum VCp, faciendo ut sint termini dati in quantitate P ad terminos non datos ejusdem quantitatis, ita termini dati in quantitate *Q*, ad terminos non datos ejusdem quantitatis. Quod exemplis patebit.

(r) *Exempl.* 1. Ponamus vim centripetam uniformem esse, ideoque ut $\frac{A\ cub.}{A\ cub.}$, sive (scribendo T − X pro A in numeratore) ut $\frac{T\ cub. - 3TTX + 3TXX - X\ cub.}{A\ cub.}$; & collatis numeratorum terminis correspondentibus; nimirum datis cum datis, & non datis cum non datis, fiet RGG − RFF + TFF ad T *cub.* ut − FFX ad − 3TTX + 3TXX − X *cub.* sive ut − FF ad − 3TT + 3TX − XX. Jam cum orbis ponatur circulo quam maximè finitimus, coeat orbis cum circulo; & ob factas R, T æquales, atque X in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad T *cub.* ut − FF ad 3TT, seu GG ad TT ut FF ad 3TT, & vicissim GG ad FF ut TT ad 3TT, id est, ut 1 ad 3; ideoque G ad F, hoc est angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\surd 3$. Ergo cum corpus in ellipsi immobili, ab apside summâ ad apsidem imam descendendo conficiat angulum VCP (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in ellipsi mobili, atque ideo in orbe immobili de quo agimus, ab apside summâ ad apsidem imam descendendo conficiet angulum VCp graduum $\frac{180}{\surd 3}$: id ideo ob similitudinem orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripetâ describit, & orbis illius quem corpus in

(r) * *Exemplum* 1um. *Ponamus vim centripetam* in orbe Y Z f *uniformem* seu constantem *esse, ideóque ut* 1, seu ut $\frac{A^3}{A^3}$, erit $Q = A^3 = T^3 - 3TTX + 3TXX - X^3$, & $PB = BRGG - BRFF + BTFF - BFFX$ atquè adeò $BRGG - BRFF + BTFF - BFFX - T^3 + 3TTX - 3TXX + X^3 = 0$, & termini dati $BRGG - BRFF + BTFF - T^3 = 0$, seu $BRGG - BRFF + BTFF = T^3$, & termini non dati $-BFFX + 3TTX - 3TXX + X^3 = 0$, seu $BFF = 3TT - 3TX + X^2$; undè hæc proportio deducitur $BRGG - BRFF + BTFF : BFF = T^3 : 3TT - 3TX + X^2 = RGG - RFF + TFF : FF$. Jam cum orbis YZf, ponatur circulo quam maximè finitimus, coeat orbis cum circulo & ob factas R & T æquales, atquè $X = 0$, erit $X^2 = 0$, $3TX = 0$, $RFF = TFF$, & hinc $T^3 : 3TT = RGG : FF : = TGG : FF$, & $T^2 : 3T^2 = 1 : 3 = GG : FF$, adeóque $G : F = 1 : \surd 3$, hoc est, angulus V C p, est ad angulum VCP, ut 1, ad $\surd 3$. Ergò cum corpus in ellipsi immobili VPΠ, ab apside summâ V ad apsidem imam Π descendendo, conficiat angulum V C Π grad. 180. corpus aliud in ellipsi mobili u p b, atque adeò in orbe immobili V p n π, seu YZf, ab apside summâ V vel Y, ad apsidem imam π vel f, descendendo conficiet angulum V C π, vel YSf grad. $\frac{180}{\surd 3}$.

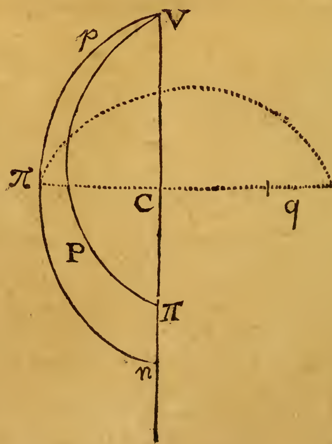
in ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescente. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur hi orbes, non universaliter sed tunc cum ad formam circularem quam maximè appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripetâ in orbe propemodum circulari revolvens, inter apsidem summam & apsidem imam conficiet semper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, seu 103 *gr.* 55 *m.* 23 *sec.* ad centrum; perveniens ab apside summâ ad apsidem imam ubi semel confecit hunc angulum, & inde ad apsidem summam rediens ubi iterum confecit eundem angulum; & sic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3} seu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ & n significant dignitatum indices quoscunque integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n seu $\overline{T-X}|^n$ in seriem indeterminatam per (f) methodum nostram serierum convergentium reducta, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XXT^{n-2}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis numeratoris alterius $RGG-RFF+TFF-FFX$, fit $RGG-RFF+TFF$ ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1}+\frac{nn-n}{2}XT^{n-2}$ &c.

(f) * *Per methodum nostram.* Vide fragmentum Epistolæ Newtoni ad Oldenburgium & theorematis ibi propositi demonstrationem requiras ex elementis algebræ clarissimorum virorum Wolfii, Abbatis de Molieres, vel ex analysi demonstratâ Patris Reyneau, aut ex aliis passim authoribus. Interim cum hic satis sit duos priores terminos dignitatis $\overline{T-X}^n$ reperire ob evanescentes terminos in quibus reperitur ipsius X dignitas primâ altior, facilè demonstratur ex dignitatum per continuam radicis multiplicationem formatione duos illos priores terminos esse $T^n - n \times XT^{n-1}$. Ut si fuerit $n=2$, duo priores termini dignitatis $\overline{T-X}^2$, erunt $T^2 - 2 \times TX$; si $n=3$, erunt $T^3 - 3 \times XT^2$, & ità porrò; atque hinc patet quam compendiosa sit Newtoniana methodus motum apsidum determinandi, nam prætterquam quod sufficit duos dignitatum terminos invenire, possunt quoque termini æquales RFF, TFF, in formulâ $RGG-RFF+TFF-FFX$, deleri; unde tantummodò conferendus terminus datus RGG cum aliis terminis datis, & terminus non datus $-FFX$ cum aliis non datis.

Et ſumendo rationes ultimas ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit RGG ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1}$, ſeu GG ad T^{n-1} ut FF ad nT^{n-1}, & viciſſim GG ad FF ut T^{n-1} ad nT^{n-1} id eſt ut 1 ad n; ideoque G ad F, id eſt angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{n}$. Quare cum angulus VCP, in deſcenſu corporis ab apſide ſummâ ad apſidem imam in ellipſi confectus, ſit graduum 180; conficietur angulus VCp, in deſcenſu corporis ab apſide ſummâ ad apſidem imam, in orbe propemodum circulari quem corpus quodvis vi centripetâ dignitati A^{n-3} proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; & hoc angulo repetito angulus redibit ab apſide imâ ad apſidem ſummam, & ſic deinceps in infinitum. Ut ſi vis centripeta ſit ut diſtantia corporis à centro, id eſt, ut A ſeu $\frac{A^4}{A^3}$, erit n æqualis 4 & $\sqrt{n}$ æqualis 2; ideoque angulus inter apſidem ſummam & apſidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ *gr.* ſeu 90 *gr.* Completâ igitur quartâ parte revolutionis unius corpus perveniet ad apſidem imam, & completâ aliâ quartâ parte ad apſidem ſummam, & ſic deinceps per vices in infinitum. Id (t)

(t) * Id *quod etiam ex prop.* 10. *&c.* Nam corpus urgente hâc vi centripetâ revolvetur in ellipſi immobili $Vp\pi n$, cujus centrum eſt in centro virium C, axis tranſverſus Vn, axis conjugatus πq, apſides ſummæ duæ V, n, imæ π, q; ellipſeos autem mobilis $VP\Pi$, umbilicus erit C, axis tranſverſus $V\Pi = VC + C\pi$.



* Idem

quod etiam ex propositione x. manifestum est. Nam corpus urgente hâc vi centripetâ revolvetur in ellipsi immobili, cujus centrum est in centro virium. Quod si vis centripeta sit reciprocè ut distantia, id est directè ut $\frac{1}{A}$ seu $\frac{A^2}{A^3}$, erit n æqualis 2, ideoque inter apsidem summam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ seu 127 *gr.* 16 *m.* 45 *sec.* & propterea corpus tali vi revolvens, perpetuâ anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab apside summâ ad imam & ab imâ ad summam perveniet in æternum. Porro si vis centripeta sit reciprocè ut latus quadrato-quadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id est reciprocè ut $A^{\frac{11}{4}}$, (u) ideoque directè ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ seu ut $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ erit n æqualis $\frac{1}{4}$, & $\frac{180}{\sqrt{n}}$ *gr.* æqualis 360 *gr.* & propterea corpus de apside summâ discedens & subinde perpetuò descendens, perveniet ad apsidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo ascensu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad apsidem summam: & sic per vices in æternum.

Exempl. 3. Assumentes m & n pro quibusvis indicibus dignitatum altitudinis, & b, c pro numeris quibusvis datis, ponamus vim centripetam esse ut $\frac{bA^m + cA^n}{A\ cub.}$, id est, ut $\frac{b \text{ in } \overline{T-X}|^m + c \text{ in } \overline{T-X}|^n}{A\ cub.}$ seu (x) (per eandem methodum nostram serierum convergentium) ut

bT

(u) * *Ideoque directè ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$, seu ut $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$*, cum sit $A^3 = A^{\frac{12}{4}}$, & proindè est $\frac{A^3}{A^{\frac{11}{4}}} = A^{\frac{1}{4}}$, atquè ità $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}} = \frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$.

(x) * *Seu per eandem methodum.* Etenim dignitas $\overline{T-X}^m$, evoluta, est $T^m - mXT^{m-1}$ &c. adeóque $b \times \overline{T-X}^m = bT^m - mbXT^{m-1}$ &c. & similiter $c \times \overline{T-X}^n = cT^n - ncXT^{n-1}$ &c. undè $b \times \overline{T-X}^m + c \times \overline{T-X}^n = bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1}$ &c.

De Motu Corporum.

$$\frac{bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXXT^{n-2}\ \&c.}{A\ cub.}$$
& collatis numeratorum terminis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ad $bT^m + cT^n$, ut $-FF$ ad $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXT^{n-2}$ &c. Et sumendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit GG ad $bT^{m-1} + cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, & vicissim GG ad FF ut $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam *CV* seu T arithmeticè per unitatem, fit GG ad FF ut $b+c$ ad $mb+nc$, ideoque ut 1 ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde est G ad F, id est angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cum angulus *VCP* inter apsidem summam & apsidem imam in ellipsi immobili sit 180 *gr.* erit angulus *VCp* inter easdem apsides, in orbe quem corpus vi centripetâ quantitati $\frac{bA^m + cA^n}{A\ cub.}$ proportionali describit, æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et (y) eodem argumento si vis centripeta sit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A\ cub.}$, angulus

(y) * Et eodem argumento. Si vis centripeta sit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A^3}$, id est ut $b \times \overline{T-X}^m - c \times \overline{T-X}^n$, seu ut $\frac{bT^m - cT^n - mbXT^{m-1} + ncXT^{n-1}\ \&c.}{A^3}$ collatis terminis fiet RGG, hoc est TGG ad $bT^m - cT^n$, ut $-FF$ ad $-mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, adeóque GG ad $bT^{m-1} - cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1} - ncT^{n-1}$, & ponendo $T=1$, erit $GG:FF = b-c : mb-nc = 1 : \frac{mb-nc}{b-c}$, & $G:F = 1 : \sqrt{\frac{mb-nc}{b-c}}$.

gulus inter apsides invenietur graduum $180\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$. Nec secus resolvetur problema in casibus difficilioribus. Quantitas, cui vis centripeta proportionalis est, resolvi semper debet in series convergentes denominatorem habentes A *cub.* Dein pars data numeratoris qui ex illâ operatione provenit ad ipsius partem alteram non datam, & pars data numeratoris hujus RGG − RFF + TFF − FFX ad ipsius partem alteram non datam in eâdem ratione ponendæ sunt: Et quantitates superfluas delendo, scribendoque unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

LIBER PRIMUS. PROP. XLV. PROBL. XXXI.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta sit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri potest dignitas illa ex motu apsidum; & contra. Nimirum si motus totus angularis, quo corpus redit ad apsidem eandem, sit ad motum angularem revolutionis unius, seu graduum 360, ut numerus aliquis *m* ad numerum alium *n*, & altitudo nominetur A: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm}-3}$, cujus index est $\frac{nn}{mm}-3$. Id (z) quod per exempla secunda manifestum est. (a) Unde liquet vim illam in majore quam triplicatâ altitudinis ratione, in recessu à centro, decrescere

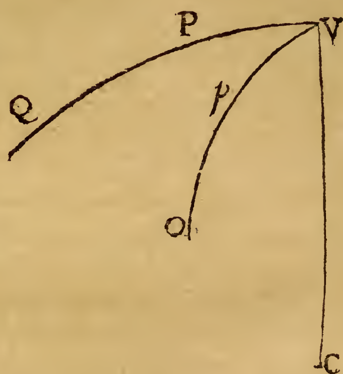
cere

(z) 452. * *Id quod per exempla secunda manifestum est.* Si in exemplo secundo loco indicis n, ad confusionem tollendam scribatur p, erit vis centripeta, ut A^{p-3}, & angulus confectus in descensu ab apside summâ ad apsidem imam æqualis angulo $\frac{180°}{\sqrt{p}}$, adeóque duplus ille angulus seu motus totus angularis quo corpus ab apside summâ redit ad eandem erit $\frac{360}{\sqrt{p}}$ in exemplo secundo. Est autem in casu corollarii hujus, motus totus angularis quo corpus redit ad apsidem eandem æqualis angulo $\frac{360\,m}{n}$, ergò $\frac{360}{\sqrt{p}}=\frac{360\,m}{n}$, & $\frac{1}{\sqrt{p}}=\frac{m}{n}$, & $\frac{1}{p}=\frac{mm}{nn}$, & $\frac{nn}{mm}=p$; quare $A^{p-3} = A^{\frac{nn}{mm}-3}$.

(a) 453. *Undè liquet vim illam.* Nam si vis esset ut $\frac{1}{A^{3+q}}$, seu ut A^{-3-q}, sitque + q quantitas positiva, esset $\frac{nn}{mm}-3 = -3-q$, & $\frac{nn}{mm}=-q$, hoc est, quadratum quantitatis $\frac{n}{m}$ negativum quod absurdum est: non potest igitur vis in majore quam in triplicatâ altitudinis ratione, seu in ratione $\frac{1}{A^{3}+q}$, in recessu à centro decrescere.

De Motu Corporum.

cere non posse: (b) Corpus tali vi revolvens deque apside discedens, si cœperit descendere nunquam perveniet ad apsidem imam seu altitudinem minimam, sed descendet usque ad centrum, describens curvam illam lineam de quâ egimus in corol. 3. prop. XLI. Sin cœperit illud, de apside discedens, vel minimum ascendere; ascendet in infinitum, neque unquam perveniet ad apsidem summam. Describet enim curvam illam lineam de quâ actum est in eodem corol. & in corol. VI. prop. XLIV. Sic (c) & ubi vis, in recessu à centro, decrescit in majore quam triplicatâ ratione altitudinis, corpus de apside discedens, perinde ut cœperit descendere vel ascendere, vel descendet ad centrum



(b) * *Corpus tali vi revolvens*; hoc est, vi quæ in recessu à centro decrescat in ratione altitudinis triplicatâ deque apside discedens &c. Sint enim ut in coroll. 3°. prop. 41. duæ curvæ V p O, V P Q, quas corpora duo de loco V, secundum directionem ad C V perpendicularem egressa, vi centripetâ ad C tendente, & in triplicatâ altitudinis ratione decrescente in recessu à centro describunt, & corpus in curva V p O, latum ad centrum semper accedat, corpus verò in curvâ VPQ, motum à centro semper recedat ut in eodem cor. 3°. prop. 41. manifestum est punctum V esse apsidem summam in curvâ V p O, & esse apsidem imam in curvâ V P Q; Quarè cum in curva VpO, corpus ad centrum semper accedat, nunquam pervenire potest ad apsidem imam, seu altitudinem minimam quæ nulla est, sed gyris infinitis descendit usque ad centrum; in curvâ verò V P Q de apside imâ descedens corpus ascendit in infinitum, nequè unquam pervenit ad apsidem summam quæ nulla est. Hæc demonstrari etiam possunt hâc ratione; Si fuerit vis ut $\frac{1}{A^3}$, seu ut A^{-3}, erit $\frac{nn}{mm} - 3 = -3$, & $\frac{nn}{mm} = 0 = p$ (452) & motus totus angularis ab apside ad eandem apsidem erit $\frac{360^o}{\sqrt{p}} = \frac{360}{0}$; motus verò angularis ab apside summâ ad imam, vel ab imâ ad summam erit $\frac{180^o}{0}$ quæ est quantitas infinita, undè liquet in nostrâ Hypothesi corpus ab apside imâ ad summam aut à summâ ad imam nunquam pervenire posse.

(c) * *Sic & ubi vis in recessu à centro.* Si vis fuerit ut $\frac{1}{A^{3+q}}$, & q, quantitas positiva, erit (453) $\frac{nn}{mm} = -q = p$, & (452) motus totus angularis ab apside ad apsidem eandem erit $\frac{360^o}{\sqrt{-q}}$, & ab apside unâ ad alteram erit $\frac{180^o}{\sqrt{-q}}$: quarè ob imagi-

trum usque vel ascendet in infinitum. At (d) si vis, in recessu à centro, vel decrescat in minore quam triplicatâ ratione altitudinis, vel crescat in altitudinis ratione quâcunque; corpus nunquam descendet ad centrum usque, sed ad apsidem imam aliquando perveniet: & (e) contra, si corpus de apside ad apsidem alternis vicibus descendens & ascendens nunquam appellat ad centrum; vis in recessu à centro aut augebitur, aut in minore quam triplicatâ altitudinis ratione decrescet: & quo citius corpus de apside ad apsidem redierit, eo longius ratio virium recedet à ratione illâ triplicatâ. Ut si corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de apside summâ ad apsidem summam alterno descensu & ascensu redierit; hoc est, si fuerit *m* ad *n* ut 8 vel 4 vel

ginariam quantitatem $\sqrt{-q}$, impossibile est ut corpus de apside summâ discedens, adeóque ad centrum accedens, ad apsidem imam unquam perveniat, & ut de apside imâ discedens ac proindè à centro recedens unquam perveniat ad apsidem summam.

(d) * *At si vis in recessu à centro.* Sit vis ut $\frac{1}{A^{3-q}}$, & q, quantitas positiva erit $\frac{nn}{mm} - 3 = -3 + q$, & $\frac{nn}{mm} = q = p$ (452). Undè motus totus angularis ab apside ad eandem erit $\frac{360^o}{\sqrt{p}} = \frac{360\,m}{n}$, motus angularis ab apside unâ ad alteram $= \frac{180}{\sqrt{p}} = \frac{180\,m}{n}$, quæ sunt quantitates reales & positivæ, quarè in hâc Hypothesi corpus ab apside ad apsidem eandem redire & ab apside summâ ad imam atque ab imâ ad summam pervenire poterit. Est autem $\frac{1}{A^{3-q}}$, altitudinis A dignitas, si fuerit q major quam 3, è contrà $\frac{1}{A^{3-q}}$ est dignitas quantitatis $\frac{1}{A}$, si fuerit q minor quam 3. Liquet igitur, si vis in recessu à centro vel decrescat in minore quam triplicatâ ratione altitudinis, (quod fit ubi q minor quam 3) vel crescat in altitudinis ratione quâcumque (quod fit ubi q, major quam 3) corpus nunquam descendere ad centrum usque, sed ad apsidem imam aliquandò pervenire.

(e) * *Et contra si corpus de apside ad apsidem &c.* Nam si vis in recessu à centro non augeatur, nec etiam minuatur in minore quam triplicatâ altitudinis ratione, necessariò decrescet vel in triplicatâ vel in majore quam triplicatâ altitudinis ratione, sed supra demonstratum est in his duobus casibus corpus non posse ab apside ad apsidem alternis vicibus descendere & ascendere, ergò si corpus de apside ad apsidem alternis vicibus descendens & ascendens nunquam appellat ad centrum, vis in recessu à centro augebitur, aut in minore quam triplicatâ altitudinis ratione decrescet, & quo citiùs corpus de apside ad apsidem redierit, eò longiùs ratio virium recedet à ratione illâ triplicatâ. Quo enim citiùs corpus de apside ad apsidem redierit, eò minor erit quantitas $\frac{360\,m}{n}$, aut quantitas $\frac{m}{n}$, adeoque eò major erit quantitas $\frac{n}{m}$, ejusque quadratum $\frac{nn}{mm} = p = q$, & hinc eò longiùs quantitas $\frac{1}{A^{3-q}}$ à quantitate $\frac{1}{A^3}$ recedet.

4 vel 2. vel 1 $\frac{1}{2}$ ad 1, ideoque $\frac{nn}{mm} - 3$ valeat $\frac{1}{64} - 3$ vel $\frac{1}{16} - 3$ vel $\frac{1}{4} - 3$ vel $\frac{4}{9} - 3$: erit vis ut $A^{\frac{1}{64} - 3}$ vel $A^{\frac{1}{16} - 3}$ vel $A^{\frac{1}{4} - 3}$ vel $A^{\frac{4}{9} - 3}$, id eſt, reciprocè ut $A^{3 - \frac{1}{64}}$ vel $A^{3 - \frac{1}{16}}$ vel $A^{3 - \frac{1}{4}}$ vel $A^{3 - \frac{4}{9}}$. Si corpus ſingulis revolutionibus redierit ad apſidem eandem immotam; erit m ad n ut 1 ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ æqualis A^{-2} ſeu $\frac{1}{AA}$; & propterea decrementum virium in ratione duplicatâ altitudinis, ut (f) in præcedentibus demonſtratum eſt. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel unâ tertiâ, vel unâ quartâ, ad apſidem eandem redierit; erit m ad n ut $\frac{3}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ æqualis $A^{\frac{16}{9} - 3}$ vel $A^{\frac{9}{4} - 3}$ vel $A^{9 - 3}$ vel $A^{16 - 3}$; & (g) propterea vis aut reciprocè ut $A^{\frac{11}{9}}$ vel $A^{\frac{3}{4}}$, aut directè ut A^{6} vel A^{13}. Denique ſi corpus pergendo ab apſide ſummâ ad apſidem ſummam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, ideoque apſis illa ſingulis corporis revolutionibus confecerit in conſequentia gradus tres; erit m ad n ut 363 *gr.* ad 360 *gr.* ſive ut 121 ad 120, (h) ideoque $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ erit

(f) * *Ut in præcedentibus demonſtratum eſt.* In hoc enim caſu corpus deſcribit ellipſim immotam circulo finitimam (per cor. 1. prop. XIII) intereadum æqualiter movetur in ellipſi ſimili & æquali circa umbilicum revolvente cum celeritate duplâ ejus quâ corpus idem in eâdem ellipſi mobili fertur (446).

(g) * *Et propterea vis aut reciprocè. Ut* $A^{\frac{11}{9}}$, *vel* $A^{\frac{3}{4}}$, *aut directè ut* A^{6}, *vel* A^{13}. Eſt enim $A^{\frac{16}{9} - 3} = A^{-\frac{11}{9}} = \frac{1}{A^{\frac{11}{9}}}$, & $A^{\frac{9}{4} - 3} = \frac{1}{A^{\frac{3}{4}}}$ & $A^{9 - 3} = A^{6}$ & $A^{16 - 3} = A^{13}$.

(h) * *Ideóque* $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ *erit æquale* $A^{-\frac{29523}{14641}}$. Erit enim in hâc hypotheſi $\frac{nn}{mm} = \frac{14400}{14641}$, & $\frac{nn}{mm} - 3 = \frac{14400}{14641} - 3 = -\frac{29523}{14641}$. Eſt autem $\frac{29523}{14641} = 2 + \frac{241}{14641} = 2 + \frac{4}{243}$, proximè; nam $241 \times 243 = 58563$, & $4 \times 14641 = 58564$; decreſcit igitur vis centripeta in ratione paulò majore quam duplicatâ, ſed quæ vicibus 59 $\frac{3}{4}$, propiùs ad duplicatam quam ad triplicatam accedit,

erit æquale $A^{-\frac{29523}{14641}}$; & propterea vis centripeta reciprocè ut $A^{\frac{29523}{14641}}$ seu reciprocè ut $A^{2\frac{4}{243}}$ proximè. Decrescit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicatâ, sed quæ vicibus $59\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam si corpus, vi centripetâ quæ sit reciprocè ut quadratum altitudinis, revolvatur in ellipsi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per exempla tertia) motus apsidum qui ex vi illâ extraneâ orietur: & contra. Ut si vis quâ corpus revolvitur in ellipsi sit ut $\frac{1}{AA}$, & vis extranea ablata ut cA, ideoque vis reliqua ut $\frac{A - cA^4}{A\ cub.}$; erit (in exemplis tertiis) b æqualis 1, m æqualis 1, & n æqualis 4, ideoque angulus revolutionis inter apsides æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. (i) Ponamus vim illam extraneam esse 357.45 partibus minorem quam vis altera quâ corpus revolvitur

dit, differentia enim inter 2, & $2 + \frac{4}{243}$, est $\frac{4}{243}$, differentia verò inter 3 & $2 + \frac{4}{243}$ est $1 - \frac{4}{243} = \frac{239}{243}$. Porrò $\frac{239}{243}$ est ad $\frac{4}{243}$ seu 239 ad 4 ut $59\frac{3}{4}$ ad 1.

(i) * *Ponamus esse* $c \times A$ ad $\frac{1}{AA}$, hoc est, ponendo A vel T = 1, c ad 1, ut 100 ad 35745, id est, ut 1 ad 357, 45, & erit $c = \frac{100}{35745}$, $1 - c = \frac{35645}{35745}$, $1 - 4c = \frac{35345}{35745}$; undè $\frac{1-c}{1-4c} = \frac{35645}{35345}$, & hinc $180 \times \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}} = 180 \times \sqrt{\frac{35645}{35345}}$ &c.

454. Scholium. Hermannus in scholio ad prop. 25. lib. 1. Phoronomiæ formulam invenit quâ ex datâ vi centripetâ motus apsidum determinatur, & contrà; hanc ipsam ex prius ostensis hic demonstrabimus. Iisdem igitur positis quæ in not. 449, sit vis centripeta in ellipseos mobilis loco quovis p, seu (451) vis $\frac{VFFA + VRGG - VRFF}{A^3} = \frac{y}{A^3} = \frac{y}{z^3}$, ponendo altitudinem $A = z$, & erit (450) $y = VFFz + VRGG - VRFF$; capiantur utrinque fluxiones & invenietur $dy = VFFdz$, & faciendo $Qdz = dy$, erit $Q = VFF$. Loco VFF, ipsius valor Q substituatur in superiori æquatione, & erit $y = Qz + \frac{QRGG - QRFF}{FF} = Qz - QR + \frac{QRGG}{FF}$

De Motu Corporum.

vitur in ellipſi, id eſt c eſſe $\frac{100}{35745}$, exiſtente A vel T æquali 1, & $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180\sqrt{\frac{35645}{35345}}$, ſeu 180. 7623, id eſt, 180 *gr.* 45 *m.* 44 *ſ.* Igitur corpus de apſide ſummâ diſcedens, motu angulari 180 *gr.* 45 *m.* 44 *ſ.* perveniet ad apſidem imam, & hoc motu duplicato ad apſidem ſummam redibit: ideoque apſis ſumma ſingulis revolutionibus progrediendo conficiet 1 *gr.* 31 *m.* 28 *ſec.* Apſis lunæ eſt duplo velocior circiter.

Hactenus de motu corporum in orbibus quorum plana per centrum virium tranſeunt. Supereſt ut motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam ſcriptores qui motum gravium tractant, conſiderare ſolent aſcenſus & deſcenſus ponderum, tam obliquos in planis quibuſcunque datis, quam perpendiculares: & pari jure motus corporum viribus quibuſcunque centra petentium, & planis excentricis innitentium hic conſiderandus venit. Plana autem ſupponimus eſſe politiſſima & abſolutè lubrica ne corpora retardent. Quinimo, in his demonſtrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quæque tangunt incumbendo, uſurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & orbitas movendo deſcribunt. Et eádem lege motus corporum in ſuperficiebus curvis peractos ſubinde determinamus.

SEC-

Jam cum orbis ponatur circulo quam maximè finitimus, erit $z = R = T$, & proindè $y = \frac{QTGG}{FF}$ & hinc $GG : FF = y : QT$, ac $G : F = \sqrt{y} : \sqrt{QT}$ quæ eſt formula generalis quæſita. Nam ſit exempli causâ, vis centripeta ut $\frac{bz^m + cz^n}{z^3}$ hoc eſt $y = bz^m + cz^n$, erit $dy = Qdz = mbz^{m-1}dz + ncz^{n-1}dz$; unde $Q = mbz^{m-1} + ncz^{n-1}$, atque itá per formulam inventam $GG : FF = bz^m + cz^n : Tmbz^{m-1} + Tncz^{n-1}$, & ponendo $z = T = 1$, $GG : FF = b + c : mb + nc$, ut in exemplis tertiis Newtonus invenit.

Sit nunc data ratio G ad F, nempe m ad n, & vis centripeta ſit ut dignitas aliqua non data altitudinis z, illius dignitatis index dicatur p, ſitque adeò vis centripeta ut z^p, & erit $\frac{y}{z^3} = z^p$, ac $y = z^{p+3}$, $dy = Qdz = p+3 \times z^{p+2}dz$, $Q = p+3 \times z^{p+2}$. Hinc $G^2 : F^2 = m^2 : n^2 = z^{p+3} : p+3 \times Tz^{p+2}$, hoc eſt, ponendo $z = T = 1$, $mm : nn = 1 : p+3$, atquè itâ $\frac{nn}{mm} = p+3$, & $\frac{nn}{mm} - 3 = p$, ut in cor. 1. repertum eſt.

PROP. XLVI. PROBL. XXXII.

SECTIO X.

De motu corporum in superficiebus datis, deque funipendulorum motu reciproco.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA XXXII.

Positâ cujuscunque generis vi centripetâ, datoque tum virium centro tum plano quocunque in quo corpus revolvitur, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, secundum rectam in plano illo datam egressi.

Sit S centrum virium, SC distantia minima centri hujus à plano dato, P corpus de loco P secundum rectam PZ egrediens, Q corpus idem in trajectoriâ suâ revolvens, & PQR trajectoria illa, in plano dato descripta, quam invenire oportet. Jungantur CQ, QS, & si in QS capiatur SV proportionalis vi centripetæ quâ corpus trahitur versus centrum S, & agatur VT quæ sit parallela CQ & occurrat SC in T: Vis SV resolvetur (per legum corol. 2.) in vires ST, TV; quarum ST trahendo corpus secundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera TV, agendo secundum positionem plani, trahit corpus directè versus punctum C in plano datum, ideoque efficit, ut corpus illud in hoc plano perinde moveatur, ac si vis ST tolleretur, & corpus vi solâ TV revolveretur circa (k) centrum C in spatio libero. Datâ autem vi centripetâ TV quâ corpus Q in spatio

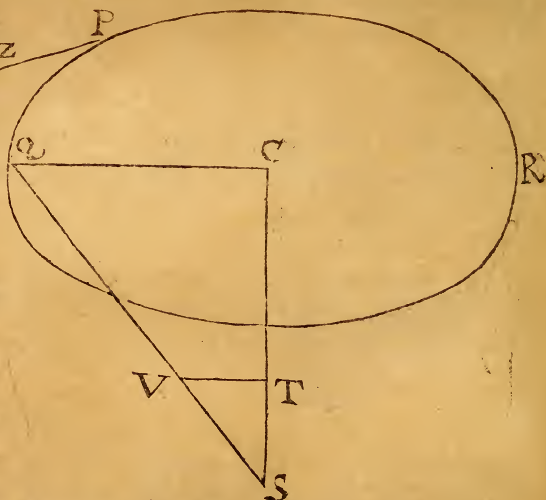
(k) * 455. *Circà centrum* C *in spatio libero.* Vis centripeta SV, ad S tendens in loco quovis Q, dicatur Q, & erit ob triangula SVT, SQC similia. SQ : QC

De Motu Corporum.

libero circa centrum datum *C* revolvitur, datur (per prop. XLII.) tum trajectoria *PQR*, quam corpus deſcribit, tum locus *Q*, in quo corpus ad datum quodvis tempus verſabitur, tum denique velocitas corporis in loco illo *Q*; & contra. *Q. E. I.*

PROPOSITIO XLVII. THEOREMA XV.

Poſito quod vis centripeta proportionalis ſit diſtantiæ corporis à centro; corpora omnia in planis quibuſcunque revolventia deſcribent ellipſes, & revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultrò citróque diſcurrendo, ſingulas eundi & redeundi periodos iiſdem temporibus abſolvent.



Nam, ſtantibus quæ in ſuperiore propoſitione, vis *SV*, quâ corpus *Q* in plano quovis *PQR* revolvens trahitur verſus centrum *S*, eſt ut diſtantia *SQ*; atque ideo ob proportionales *SV* & *SQ*, *TV* & *CQ*, vis *TV*, quâ corpus trahitur verſus punctum *C* in orbis plano datum, eſt ut diſtantia *CQ*. Vires igitur, quibus corpora in plano *PQR* verſantia trahuntur ver-

$QC = SV$ ſeu $Q : VT = \frac{Q \times QC}{SQ}$. Sed ob angulum QCS rectum $SQ^2 = QC^2 + SC^2$, ergò VT, ſeu vis ad C tendens in loco Q, ſive $\frac{Q \times QC}{SQ}$ erit æqualis $\frac{Q \times QC}{\sqrt{QC^2 + SC^2}}$. Cum igitur data ſit SC diſtantia minima centri S à plano QPC poſitione dato, ſi loco SQ in quantitate Q, ſcribatur $\sqrt{QC^2 + SC^2}$, obtinebitur valor vis ad C tendentis in loco Q ex ſolâ diſtantiâ QC & quantitatibus datis compoſitus. Exempli causâ, ſi vis SV, ad S tendens in loco Q ſit ut diſtantia SQ, erit VT, ſeu vis ad C tendens in eodem loco Q, ut $\frac{SQ \times QC}{SQ}$ hoc eſt, ut QC. Si vis SV fuerit ut $\frac{1}{SQ^2}$, erit VT, ut $\frac{QC}{SQ^3}$, hoc eſt, ut $\frac{QC}{\overline{QC^2 + SC^2} \times \sqrt{QC^2 + SC^2}}$, & ità de cæteris ſuppoſitionibus.

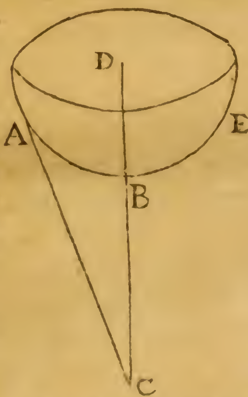
ſus punctum *C*, ſunt (l) pro ratione diſtantiarum æquales viribus quibus corpora undiquaque trahuntur verſus centrum *S*; & propterea corpora movebuntur iiſdem temporibus, in iiſdem figuris, in plano quovis *PQR* circa punctum *C*, atque in ſpatiis liberis circa centrum *S*; ideoque (per corol. 2. prop. x. & corol. 2. prop. XXXVIII) temporibus ſemper æqualibus, vel deſcribent ellipſes in plano illo circa centrum *C*, vel periodos movendi ultrò citròque in lineis rectis per centrum *C* in plano illo ductis, complebunt. *Q. E. D.*

Scholium.

His affines ſunt aſcenſus ac deſcenſus corporum in ſuperficiebus curvis. (m) Concipe lineas curvas in plano deſcribi, dein circum axes quoſvis datos per centrum virium tranſeuntes revolvi, & eâ revolutione ſuperficies curvas deſcribere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his ſuperficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa obliquè aſcendendo & deſcendendo currant ultrò citròque; peragentur eorum motus in planis per axem tranſeuntibus, atque ideo in lineis curvis, quarum revolutione curvæ illæ ſuperficies genitæ ſunt. Iſtis igitur in caſi-

(l) * *Sunt pro ratione diſtantiarum &c.* Hoc eſt *vires abſolutæ ad S & C tendentes ſunt æquales, ita ut ſi alicubi* fuerit PC=QS, vis in loco P ad C tendens æqualis erit vi in loco Q ad S tendenti. Nam vis quâ corpus in loco Q ad C trahitur, eſt ad vim quâ versùs S urgetur, ut QC ad QS, & vis in loco Q ad C tendens eſt etiam ad vim in loco P ad idem centrum C urgentem ut QC ad PC ſeu QS; quarè vis in loco Q ad S tendens æqualis eſt vi ad C tendenti in loco P; Corpora verò quæ moventur viribus centripetis quæ ſunt ut diſtantiæ, temporibus ſemper æqualibus ellipſes quaſvis, utut inæquales, deſcribent circà ſua centrà (per Prop. X). Si autem ellipſeos PQR quam corpus in plano deſcribit, latitudo in infinitum minuatur, deſcribet corpus rectam aliquam QCR, motu accelerato ad centrum C accedens, & motu retardato ab ipſo recedens uſque ad R, deinde rursùs ex loco R, ad centrum C recidens, & ità circà centrum C, ultrò citróque oſcillabitur.

(m) * *Concipe lineam curvam* AB in plano ACED deſcriptam circà axem datum DBC per centrum virium C tranſeuntem revolvi & eâ revolutione ſuperficiem curvam AEB deſcribi, tùm corpus aliquod A ità moveri, ut illius centrum in hâc ſuperficie perpetuò reperiatur. Si corpus illud oblique deſcendendo & aſcendendo per ABE, EBA currat ultrò citroque peragetur illius motus in plano ACED per axem CD tranſeunte, atque adeò in lineâ curvâ ABE, cùm (ex hyp.) nulla adſit vis quæ corpus à plano illo cogat deflectere; ſuperficies AEB perfectè terſa ac polita ſupponitur.



De Motu Corporum.

bus ſufficit motum in his lineis curvis conſiderare.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XVI.

Si rota globo extrinſecus ad angulos (n) *rectos inſiſtat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, (quodque cycloidem vel epicycloidem nominare licet) erit ad duplicatum ſinum verſum arcus dimidii qui globum ex eo tempore inter eundum tetigit; ut ſumma diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.*

PROPOSITIO XLIX. THEOREMA XVII.

Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinſecus inſiſtat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum ſinum verſum arcus dimidii qui globum toto hoc tempore inter eundum tetigit; ut differentia diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.

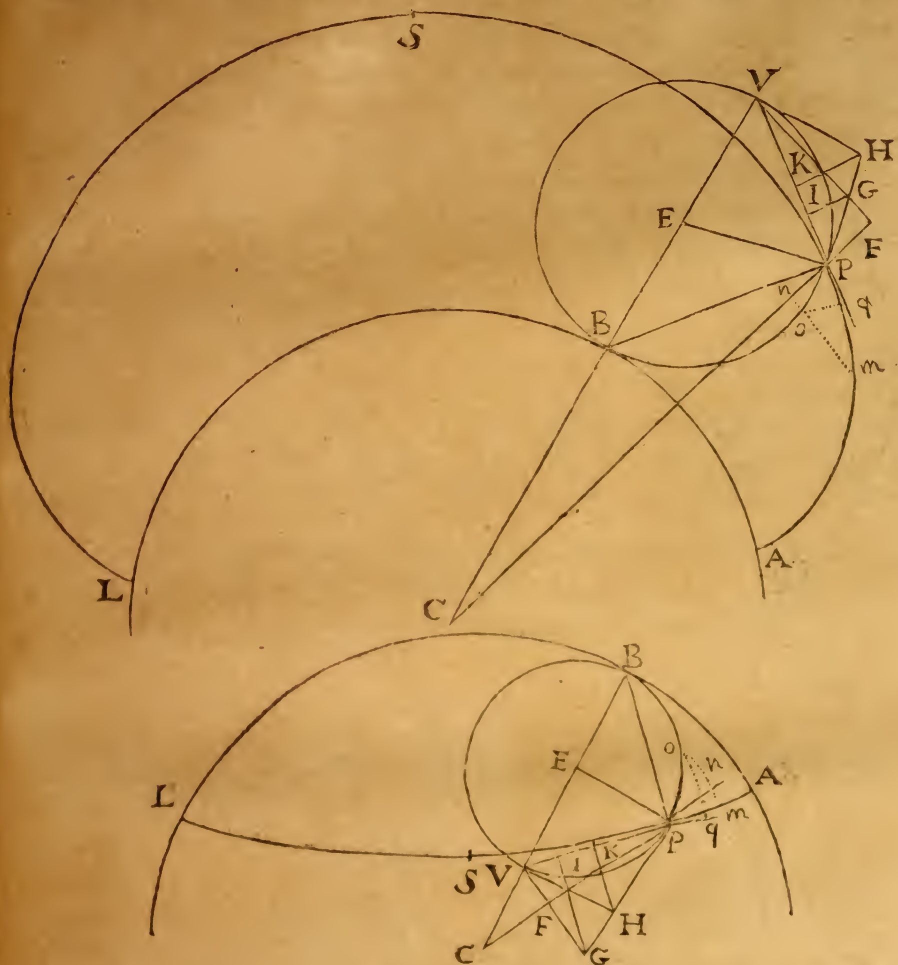
Sit ABL globus, C centrum ejus, BPV rota ei inſiſtens, E centrum rotæ, B punctum contactus, & P punctum datum in perimetro rotæ. Concipe hanc rotam pergere in circulo maximo ABL ab A per B verſus L, & inter eundum ita revolvi ut arcus AB, PB ſibi invicem ſemper æquentur, atque punctum illud P in perimetro rotæ datum interea deſcribere viam curvilineam AP. Sit autem AP via tota curvilinea deſcripta ex quo rota globum tetigit in A, & erit viæ hujus longitudo AP ad duplum ſinum verſum arcus $\frac{1}{2} PB$, ut $2\,CE$ (o) ad CB. Nam recta CE (ſi opus eſt producta) occurrat rotæ in V, junganturque CP, BP, EP, VP, & in CP productam demittatur normalis VF. Tangant PH, VH circulum in P & V concurrentes in H, ſecetque PH, ipſam VF in G, & ad VP demittantur normales GI, HK. Centro item C & intervallo quovis deſcribatur circulus nom ſecans rectam CP in n, rotæ peri-

(n) * *Ad angulos rectos*, id eſt, ità ut planum rotæ productum per centrum globi tranſeat, illudque proindè in duo hæmiſpheria dividat ac circulum maximum in ejus ſuperficie ſignet.

(o) * *Ut* $2\,CE$ *ad* CB. Hoc eſt, ob $2\,CE = 2\,CB + 2\,BE$, vel $2\,CE = 2\,CB - 2\,BE$, ut ſumma vel differentia diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.

metrum βP in o, & viam curvilineam AP in m; centroque V & intervallo Vo deſcribatur circulus ſecans VP productam in q.

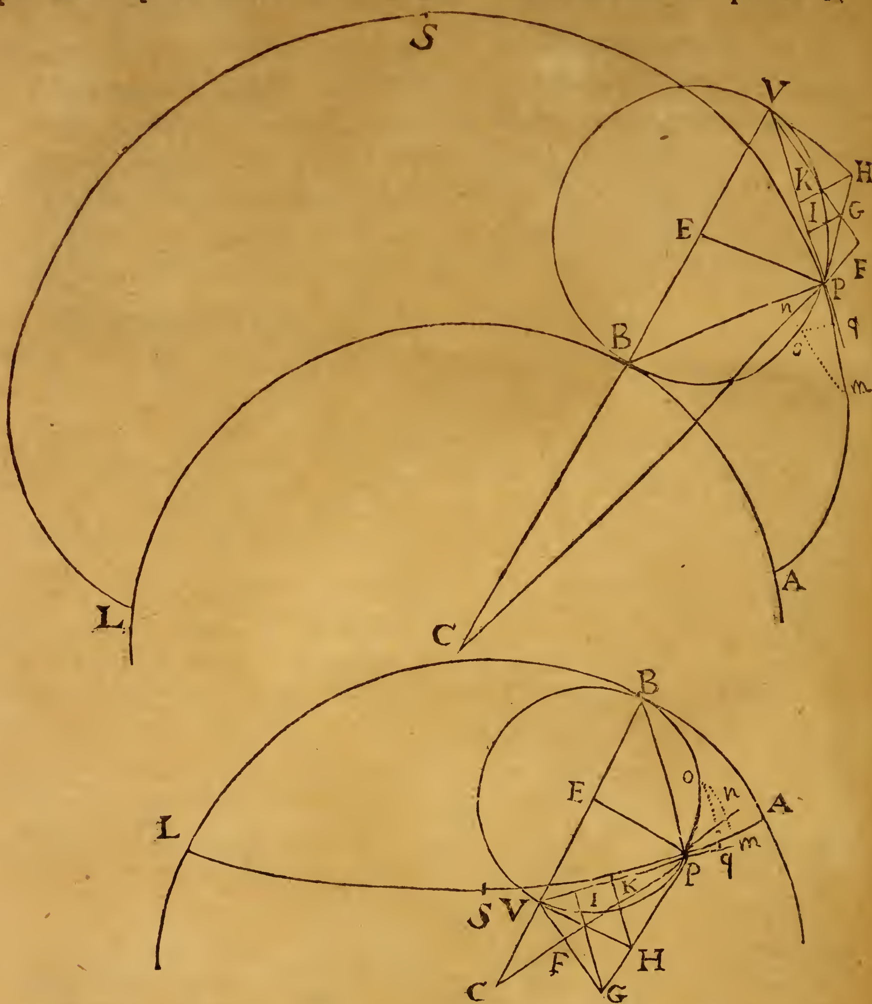
LIBER PRIMUS. PROP. XLIX. THEOR. XVII.



Quoniam rota eundo ſemper revolvitur circa punctum contactus B, (p) manifeſtum eſt quod recta BP perpendicularis eſt ad

(p) * *Manifeſtum eſt quod recta B P &c.* Nam evidens eſt in circuli B P V revolutione, centro B radio B P ſingulis tempuſculis deſcribi arcum circuli ſeu incrementum naſcens curvæ A P, ad quod proindè radius B P perpendicularis eſt, ſed ob angulum V P B in ſemicirculo rectum, linea V P in eum radium B P eſt perpendicularis, ergo linea VP eſt Tangens ejus arcus naſcentis ſeu incrementi curvæ A P, ideoque ipſius curvæ AP.

lineam illam curvam *AP* quam rotæ punctum *P* deſcribit, atque ideo quod recta *VP* tanget hanc curvam in puncto *P*.



Circuli *n o m* radius ſenſim auctus vel diminutus æquetur tandem diſtantiæ *CP*; &, ob (q) ſimilitudinem figuræ evaneſcen-

(q) * *Et ob ſimilitudinem figuræ evaneſcentis*. Hâc figurâ evaneſcente arcus P o, P q, conſiderari poſſunt tanquam lineæ rectæ, ſeu partes tangentium H P, V P productarum, & arcus m n, o q, tanquam rectæ lineis P n, P q, perpendiculares; Hinc verò anguli ad verticem oppoſiti n P o & G P F, O P m & G P I, erunt æquales, atquè adeò ob angulos o n P & G F P, o q P & G I P, rectos, proindèque æquales, figura evaneſcens P n o m q, ſimilis erit figuræ P F G V I.

tis *Pnomq* & figuræ *PFGVI*, ratio ultima lineolarum evanescentium *Pm*, *Pn*, *Po*, *Pq*, id (r) est, ratio mutationum momentanearum curvæ *AP*, rectæ *CP*, arcus circularis *BP*, ac rectæ *VP*, eadem erit quæ linearum *PV*, *PF*, *PG*, *PI* respectivè. Cum autem *VF* ad *CF* & *VH* ad *CV* perpendiculares sint, angulique (s) *HVG*, *VCF* propterea æquales; & (t) angulus *VHG* (ob angulos quadrilateri *HVEP* ad *V* & *P* rectos) angulo *CEP* æqualis est, similia erunt triangula *VHG*, *CEP*; & inde fiet ut *EP* ad *CE* ita *HG* ad *HV* (u) seu *HP* & ita (x) *KI* ad *KP*, & (y) compositè vel divisim ut *CB* ad *CE* ita *PI* ad *PK*, & duplicatis consequentibus ut *CB* ad 2*CE* ita (z) *PI* ad *PV*, atque ita *Pq* ad *Pm*. Est (a) igitur decrementum lineæ *VP*, id est, incrementum lineæ *BV*−*VP* ad incrementum lineæ curvæ *AP* in datâ ratione *CB* ad 2*CE*, & propterea (per corol. lem. IV.) longitudines *BV*−*VP* & *AP*, incrementis (b) illis

(r) * *Id est ratio mutationum momentanearum*, seu incrementorum vel decrementorum nascentium *curvæ AP*, quæ ex A m fit A P, *rectæ CP*, quæ ex C m fit C P *arcus circularis BP*, qui ex B o fit B P, *ac rectæ VP*, quæ ex V q, fit V P.

(s) * *Angulique HVG*, *VCF*, *propterea æquales*. Ob angulum V F C rectum, summa angulorum F C V, C V F æqualis est angulo recto C V H, quarè detracto communi angulo C V F, fit angulus F C V = F V H sive H V G.

(t) * *Et angulus VHG &c.* Tangentes H V, H P cum radiis E V, E P angulos rectos constituunt, adeóque quadrilateri H V E P, anguli duo reliqui V H P sive V H G & V E P, sunt simul æquales duobus rectis, quarè cum sint quoque anguli V E P, C E P simul duobus rectis æquales, liquet angulum C E P, æqualem esse angulo V H G, & in secunda figura cum anguli quadrilateri V H P E in V & P sint recti, reliqui anguli V H P, V E P æquales sunt duobus rectis, sed etiam VHP & VHG sunt æquales duobus rectis, ergo detracto communi V H P, V E P sive CEP est æqualis V H G.

(v) * *Ad HV*, *seu HP*. Nam circuli tangentes H V, H P sunt æquales.

(x) * *Et ità KI ad KP*. Etenim ob parallelas H K, G I, est H G : H P = K I : K P.

(y) * *Et compositè vel divisim*. Cum sit E P, seu B E : C E = K I : K P, si rota globo intrinsecus insistat, erit compositè B E + C E, seu C P : C E = K I + K P; seu P I : P K. Si verò rota globo extrinsecus insistat, erit divisim C E − B E, seu C B : C E = K P − K I, seu P I : P K.

(z) * *Ità P I ad PV*. Nam in triangulo P H V isoscele, est P K = K V, adeóque 2 P K = P V.

(a) * *Est igitur decrementum lineæ VP &c.* Dum arcus A m crescit fitque AP, recta Vq decrescit & fit V P; quarè est P m incrementum curvæ A m seu A P, & Pq decrementum rectæ V P. Cum autem sit B V circuli diameter constans, quantùm decrescit V P, tantùm crescit differentia B V − V P, undè decrementum lineæ VP, æquale est incremento lineæ B V − V P. *Est igitur incrementum lineæ BV*−*VP, ad incrementum lineæ curvæ AP &c.*

(b) * *Incrementis illis genitæ &c.* Cum punctum P est in A, punctum B est etiam in A, fitque V P = V B, adeóque B V − V P = o. Simul ergò crescere incipiunt lineæ B V − V P & A P; & quoniam in datâ ratione crescunt, erit semper BV−VP ad A P in datâ illâ ratione C B ad 2 C E,

genitæ, sunt in eâdem ratione. Sed, ([c]) existente BV radio, est VP cosinus anguli BVP seu $\frac{1}{2}$ BEP, ideoque $BV-VP$ sinus versûs est ejusdem anguli; & propterea in hâc rotâ, cujus radius est $\frac{1}{2}$ BV, erit $BV-VP$ duplus sinus versus arcus $\frac{1}{2}$ BP. Ergo AP est ad duplum sinum versum arcus $\frac{1}{2}$ BP ut 2 CE ad CB. *Q. E. D.*

Lineam autem AP in propositione priore cycloidem extra globum, alteram in posteriore cycloidem intra globum distinctionis gratiâ nominabimus.

Corol. 1. Hinc si ([d]) describatur cyclois integra ASL & bisecetur ea in S, erit longitudo partis PS ad longitudinem VP (quæ duplus est sinus anguli VBP, existente EB radio) ut 2CE ad CB, atque ideo in ratione datâ.

Corol. 2. Et ([e]) longitudo semiperimetri cycloidis AS æquabitur lineæ rectæ, quæ est ad rotæ diametrum BV ut 2CE ad CB.

(c) *Sed existente BV radio &c.* Ob angulum B P V rectum, est B V ad V P ut sinus totus ad sinum anguli V B P qui complementum est anguli B V P ad rectum. Quare existente BV radio, est V P cosinus anguli BVP æqualis dimidio angulo ad centrum B E P. Est autem cujusvis anguli sinus versus æqualis differentiæ inter radium & cosinum ejusdem anguli, ergò existente B V radio, erit B V − V P sinus versus anguli $\frac{1}{2}$ B E P; & quoniam in diversis circulis æqualium angulorum sinus omnes sunt ut circulorum radii, in hâc rotâ cujus radius est $\frac{1}{2}$ B V, erit B V − V P, duplus sinus versus arcûs $\frac{1}{2}$ B P,

(d) 457. *Hinc si describatur &c.* Ubi punctum P pervenit ad S, arcus B P semicirculo, arcus $\frac{1}{2}$ B P quadranti, & sinus versus arcûs $\frac{1}{2}$ B P radio, æquales fiunt. Quarè in hoc casu curva A S, est ad diametrum B V, ut 2 C E, ad C B; cumque in loco quovis P, sit etiam curva A P, ad duplum sinum versum $\frac{1}{2}$ B P, seu ad B V − V P (456) ut 2 C E ad C B, erit A S: B V : = A P : B V − V P, & hinc AS − AP, seu P S: B V − B V + V P, seu V P = A S: B V = 2 C E : C B.

(e) * *Et longitudo semiperimetri.* Patet per notam superiorem.

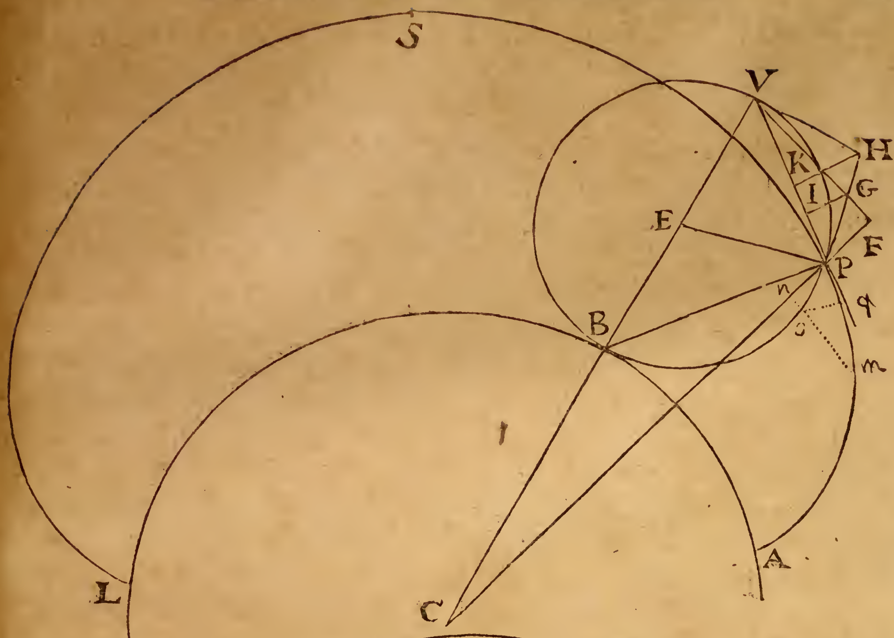
458. Coroll. 3. Recta C S cycloidi perpendicularis est, & recta C A eam tangit in A. Est enim B P ad cycloidem perpendicularis, & V P tangens ejus in P, at ubi punctum P pervenit in S, B P fit B S, seu B V, & ubi punctum B est in A, V P coincidit cum V B.

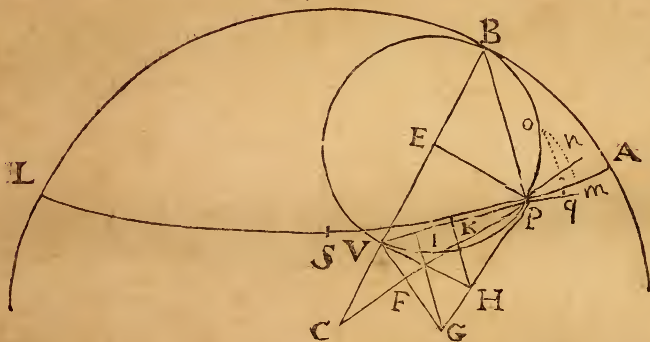
459. Coroll. 4. Si per punctum quodvis P agatur P V cycloidem tangens in P, & ad eam erigatur perpendiculum P B globo occurrens in B, jungaturque C B tangentem secans in V, erit B V rotæ diameter.

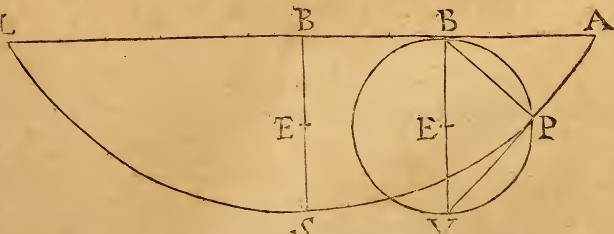
460. Coroll. 5. Ex generi cycloidis liquet arcum globi A B, æqualem esse arcui rotæ B P.

461. Coroll. 6. Si rotæ diameter V B æqualis constituatur semidiametro globi CB, cyclois intrà globum evadet linea recta per centrum globi C transiens. Nam in hoc casu C S = o, & 2 C E = C B; unde punctum cycloidis medium S, cum centro coincidit, & quia (457) A S : B V = 2 C E : C B, erit A S = B V = C B atque adeò est AS linea recta per centrum C transiens, nam si curva esset, major foret semidiametro C B.

LIBER PRIMUS. PROP. XLIX. THEOR. XVII.







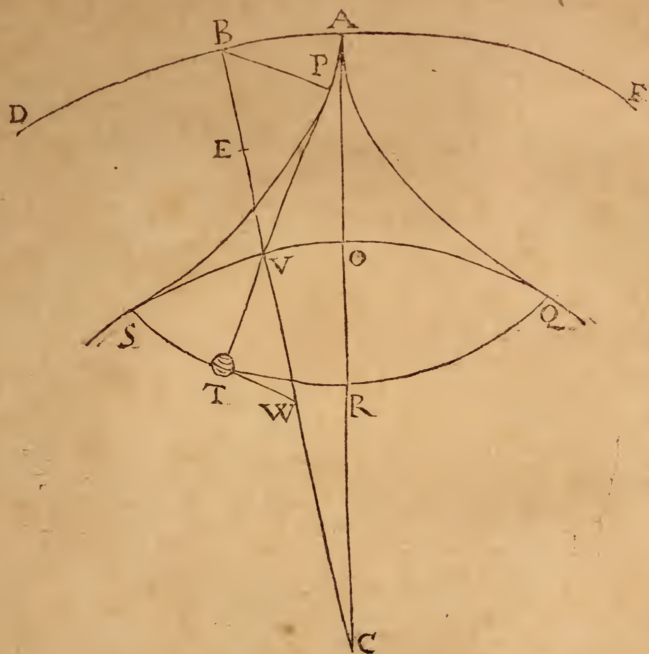
462. Coroll. 7. Si globi diameter augeatur in infinitum, mutabitur ejus superficies sphærica in planum, fietque A B L linea recta, & B E finitâ manente seu nullâ respectu infinitæ lineæ C B, erit C E = C B, adeóque cyclois tam intrà quam extrà globum abibit in cycloidem vulgarem, quæ describitur revolutione rotæ in lineâ rectâ progredientis, cumque sit semper (457) A P : B V − V P = 2 C E : C B = 2 : 1, erit A P = 2 × (B V − V P), sed BV−VP, est duplus sinus versus arcûs $\frac{1}{2}$ B P, existente B E radio (456). Ergò in cycloide vulgari A P æquatur quadruplicato sinui verso dimidii arcûs B P, inter planum A B L & punctum describens P intercepti; Hinc etiam erit A S = 4 B E = 2 B S = 2 B V; Est enim B E sinus versus quadrantis.

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XXXIII.

Facere ut corpus pendulum oſcilletur in cycloide datâ.

Intra globum *QVS*, centro *C* deſcriptum, detur cyclois *QRS* biſecta in *R* & punctis ſuis extremis *Q* & *S* ſuperficiei globi hinc inde occurrens. Agatur *CR* biſecans arcum *QS*



in *O*, & producatur ea ad *A*, ut ſit *CA* ad *CO* ut *CO* ad *CR*. Centro *C* intervallo *CA* deſcribatur globus exterior *DAF*, & intra hunc globum à rotâ, cujus diameter ſit *AO*, deſcribantur duæ ſemicycloides *AQ*, *AS*, quæ (f) globum in-

(f) * *Quæ globum interiorem tangant in Q & S, & globo exteriori occurrant in A.* Probandum ſemicycloides deſcriptas per motum rotæ (cujus diameter eſt AO) ex A proficiſcentis terminari ad ſuperficiem globi interioris in punctis extremis Q & S cycloidis QRS datæ. Producantur itaque lineæ CQ, CS ad F & D, eritque FQ = DS = AO, & ſuper Diametros FQ, DS intelligantur deſcriptæ rotæ quarum motu fiunt ſemicycloides, dicaturque *P* punctum rotæ ſemicy-

teriorem tangant in Q & S & globo exteriori occurrant in A. A puncto illo A, filo APT longitudinem AR æquante, pendeat corpus T, & ita intra semicycloides AQ, AS oscilletur, ut quoties pendulum digreditur à perpendiculo AR, filum parte sui superiore AP applicetur ad semicycloidem illam APS versus quam peragitur motus, & circum eam ceu obstaculum flectatur, parteque reliquâ PT cui semicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus T oscillabitur in cycloide datâ QRS. *Q. E. F.*

Occurrat enim filum PT tum cycloidi QRS in T, tum circulo QOS in V, agaturque CV; & ad fili partem rectam PT, è punctis extremis P ac T, erigantur perpendicula BP, TW, occurrentia rectæ CV in B & W. Patet, (g) ex constructione & genesi similium figurarum AS, SR, (h) perpendicula illa PB, TW abscindere de CV longitudines VB, VW rotarum

cycloides describens; Liquet arcûs OQ & AF, OS & AD esse proportionales radiis CO, CA sive (per const.) radiis CR, CO & divisim rotarum Diametris OR, AO, ideoque (per nat. circuli) semicircumferentiis rotarum super has Diametros descriptarum; Sed cum Q & S sint puncta extrema cycloidis datæ QRS & CO arcum QS bisecet, erunt arcus OQ & OS æquales semicircumferentiæ rotæ super Diametrum OR descriptæ (460) ergo etiam arcus AF & AD æquales erunt semicircumferentiæ rotæ super Diametrum AO descriptæ, sed arcus FP aut DP est semper æqualis arcui AF aut AD (460); erunt ergo arcus FP & DP semicirculi, & P cadet in extremitatibus Q & S Diametrorum FQ, DS, sed ubi P semicircumferentiam rotæ percurrit semicyclois est descripta, ergo semicycloides descriptæ per motum rotæ ex A proficiscentis terminantur in Q & S. Q.E.D.

(g) 463. *Patet ex constructione & genesi similium figurarum AS, SR;* Figuræ illæ dicuntur similes quia AO diameter rotæ quâ describuntur semicycloides AS, AQ est ad globi DAF radium AC ut diameter OR rotæ quâ describitur cyclois QRS ad globi QOS radium OC, (per constr.) unde manifestum quod cycloides AS, AQ, QR, quæ eodem modo describuntur ac determinantur sunt inter se similes.

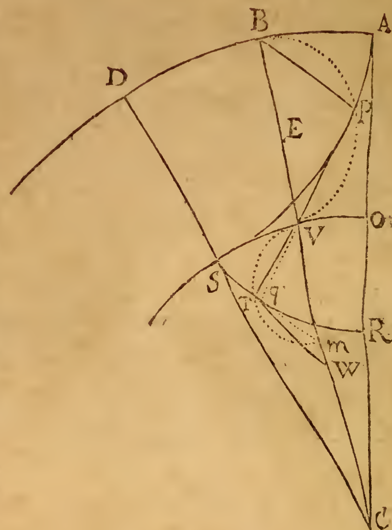
(h) * *Perpendicula illa &c.* 1°. Probandum quod *perpendiculum PB abscindat de CV longitudinem VB rotæ Diametro OA æqualem.* Fingatur rotam ita positam ut ejus punctum Cycloidem describens sit in P, liquet, ex constructione, eam hujus rotæ Diametrum quæ in hoc casu globo est perpendicularis & quæ, si producatur, transire debet per centrum C, utrinque terminari debere in superficie globorum; Jam verò (per Demonst. Prop. XLVIII. XLIX.) Tangens Cycloidis transit semper per unam extremitatem ejus Diametri rotæ quæ globo est perpendicularis & perpendiculum in Tangentem è puncto contactus erectum transit per alteram ejusdem Diametri extremitatem, ergo, cum sit (ex const.) filum PT Tangens Cycloidis in puncto P, & PB perpendiculum in illud, intersectiones V & B linearum PT & PB cum globis QOS & DAF erunt extremitates ejus Diametri rotæ quæ si producatur transit per centrum C, ergo ducta CV, per-

tarum diametris OA, OR æquales. Est (i) igitur TP ad VP (duplum sinum anguli VBP existente $\frac{1}{2}$ BV radio) ut

perpendiculum PB abscindet de CV longitudinem VB rotæ Diametro OA æqualem. Q. E. 1°. D.

2°. *Perpendiculum TW abscindit de CV longitudinem VW rotæ diametro OR æqualem.* Fingatur rota Cycloidem SRQ describens ita posita, ut ejus Diameter globo SOQ insistens sit in lineâ CV globumque tangat in V, dicatur m altera extremitas ejus Diametri, & dicatur q punctum illius rotæ Cycloidem describens: Arcus VS erit æqualis arcui Vq (460) utque totus arcus SO est æqualis arcui Vm, erit VO = qm, & qm est mensura dupli anguli CVq; Sit verò rota describens cycloidem APS posita sicut in priore casu, hoc est, ejus Diameter globo DAF insistens sit in productione lineæ CV, erit arcus BA æqualis arcui BP (460) & est BP mensura dupli anguli BVP; Est autem arcus VO sive qm ad BA sive BP, ut CO ad CA ideoque ut Diametri rotarum OR ad AO (ex const.), arcûs verò diversorum circulorum qui sunt inter se ut suorum circulorum Diametri, sunt similes ideoque ejusdem numeri graduum, ergo angulus CVq est æqualis angulo BVP quoniam arcus qui sunt mensura eorum dupli, sunt ejusdem numeri graduum, ideoque illi anguli CVq, BVP sunt per verticem oppositi & PVq est linea recta; itaque, filum PV productum ad T transit tàm per extremitatem V Diametri rotæ globo insistentis quàm per ejus rotæ punctum q Cycloidem describens; Ergo (per Dem. Prop. XLVIII. XLIX.) filum PT est perpendiculare in Tangentem Cycloidis in puncto illo q sive T, ideoque ex constructione linea TW erit ea ipsa Tangens, & (per Dem. Prop. XLVIII. XLIX.) transibit per extremitatem m Diametri rotæ quæ globo insistit, hoc est Diametri jacentis in linea CV, *ergo TW abscindet de CV longitudinem rotæ Diametro OR æqualem.* Q. E. 2°. D.

* *Idem aliter.* Ex puncto V ducatur ad semicycloidem SR perpendicularis Vq, & qm tangens in q radio CV occurrens in m, erit (459) Vm = OR. Descriptis rotis BPV, Vqm,



erit angulus BVP, æqualis arcui BP, ad diametrum BV, applicato seu $= \frac{BP}{BV}$, hoc est, ob arcum BA = BP (460) & BV = AO, angulus BVP $= \frac{BA}{AO}$. Simili ratione, cum sit arcus Vq æqualis arcui SV, & semirota Vqm æqualis arcui SO, erit arcus qm = VO, adeóque angulus qVm $= \frac{VO}{OR}$. Quare angulus BVP : qVm $= \frac{BA}{AO} : \frac{VO}{OR} = OR \times BA : AO \times VO$; sed BA : VO = CA : CO = AO : OR (per constr.) adeóque $OR \times BA = AO \times VO$; Ergò angulus BVP = qVm. Cum igitur anguli BVP, TVW ad verticem oppositi sint etiam æquales, perpendicularis Vq coincidit cum VT, tangens qm cum TW, & Vm cum VW, undè tandem est Vm = OR = VW.

(i) * *Est igitur &c.* Ob triangula VPB, VTW similia TV : VP = VW : VB, & componendo TP : VP = BW : BV.

BW ad *BV*, seu *AO*+*OR* ad *AO*, id est (cum sint *CA* ad *CO*, *CO* ad *CR* & divisim *AO* ad *OR* proportionales) ut *CA*+*CO* ad *CA*, vel, si bisecetur *BV* in *E*, ut 2*CE* ad *CB*. Proinde (per corol. 1. prop. XLIX.) longitudo partis rectæ fili *PT* æquatur semper cycloidis arcui *PS*, & filum totum *APT* æquatur semper cycloidis arcui dimidio *APS*, hoc est

B A P D F E V O S Q T W R C

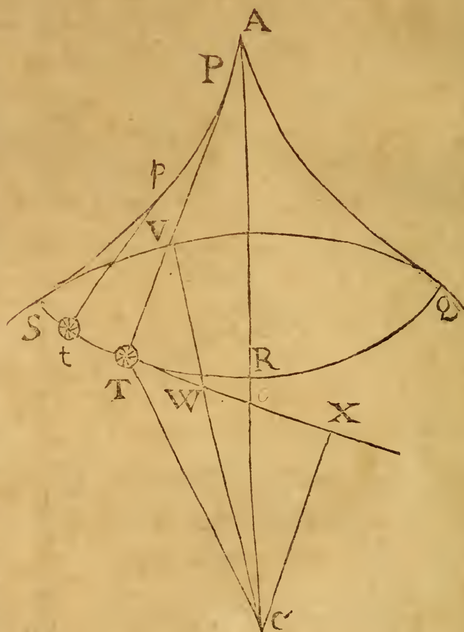
(per corol. 2. prop. XLIX.) longitudini *AR*. Et propterea vicissim si filum manet semper æquale longitudini *AR* movebitur punctum *T* in cycloide datâ *QRS*. *Q. E. D.*

Corol. Filum *AR* æquatur semicycloidi *AS*; ideoque ad globi exterioris semidiametrum *AC* eandem habet rationem quam similis illi semicyclois *SR* habet ad globi interioris semidiametrum *CO*.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO LI. THEOREMA XVIII.

Si vis centripeta tendens undique ad globi centrum C *ſit in locis ſingulis ut diſtantia loci cujuſque à centro, & hâc ſolâ vi agente corpus* T *oſcilletur (modo jam deſcripto) in perimetro cycloidis* QRS: *dico quod oſcillationum utcunque inæqualium æqualia erunt tempora.*



Nam in cycloidis tangentem *TW* infinitè productam cadat perpendiculum *CX* & jungatur *CT*. Quoniam vis centripeta quâ corpus *T* impellitur verſus *C* eſt ut diſtantia *CT*, atque hæc (per legum corol. 2.) reſolvitur in partes *CX*, *TX*, quarum *CX* impellendo corpus directè à *P* diſtendit filum *PT* & per ejus reſiſtentiam tota ceſſat, nullum alium edens effectum, pars autem altera *TX*, urgendo corpus tranſverſim ſeu verſus *X* directè accelerat motum ejus in cycloide; manifeſtum eſt quod corporis acceleratio, huic vi acceleratrici proportionalis, ſit ſingulis momentis ut longitudo *TX*, id (l) eſt, ob datas *CV*, *WV* iiſque proportionales *TX*, *TW*, ut longitudo *TW*, hoc eſt (per corol. 1. prop. XLIX.) ut longitudo arcus cycloidis *TR*. Pendulis igitur duobus *APT*, *Apt* de perpendiculo *AR* inæqualiter deductis & ſimul dimiſſis, accelerationes eorum ſemper erunt ut arcus deſcribendi *TR*, *tR*. Sunt (m) autem partes ſub

(l) * *Id eſt ob datas.* Ob triangula WXC, WTV ſimilia, eſt CW : WV = WX : TW, & componendo CV : WV = TX : TW; quarè ob datas CV, WV, data eſt ratio TX ad TW, id eſt TX eſt ut TW.

(m) 464. *Sunt autem* arcuum tR, TR partes ſub initio eodem tempuſculo deſcriptæ ut accelerationes, hoc eſt, ut toti arcus tR, TR ſub initio deſcribendi & propterea diviſim, partes arcuum

initio descriptæ ut accelerationes, hoc est, ut totæ sub initio describendæ, & proptçrea partes quæ manent describendæ & accelerationes subsequentes, his partibus proportionales, sunt etiam ut totæ; & sic deinceps. Sunt igitur accelerationes, atque ideo velocitates genitæ & partes his velocitatibus descriptæ partesque describendæ, semper ut totæ; & propterea partes describendæ datam servantes rationem ad invicem simul evanescent, id est, corpora duo oscillantia simul pervenient ad perpendiculum *AR*. Cumque vicissim ascensus perpendiculorum de loco infimo *R*, per eosdem arcus cycloidales motu retrogrado facti, retardentur in locis singulis à viribus iisdem à quibus descensus accelerabantur, patet velocitates ascensuum ac descensuum per eosdem arcus factorum æquales esse, atque ideo temporibus æqualibus fieri; & propterea, cum cycloidis partes duæ *RS* & *RQ* ad utrumque perpendiculi latus jacentes sint similes & æquales, pendula duo oscillationes suas tam totas quam dimidias iisdem temporibus semper peragent. *Q. E. D.*

Corol. Vis (n) quâ corpus *T* in loco quovis *T* acceleratur vel retardatur in cycloide, est ad totum corporis ejusdem pondus in loco

cuum t R, T R quæ manent describendæ & accelerationes subsequentes his partibus proportionales sunt etiam ut toti arcus t R, T R, & sic deinceps. Quoniam autem velocitates dato tempore genitæ sunt ut accelerationum summæ, quæ ob datam accelerationum rationem sunt in eâdem ratione datâ arcuum t R, T R, liquet accelerationes atque ideò velocitates genitas & partes his velocitatibus descriptas, partesque describendas semper esse ut sunt toti arcus t R, T R, & propterea si pars arcûs T R describenda evanescat, quod fit dum corpus pendulum T pervenit ad R, pars arcûs t R, simul evanescet, ob datam harum partium rationem. Undè corpora duo oscillantia t & T ex punctis t & T simul demissa, simul pervenient in R.

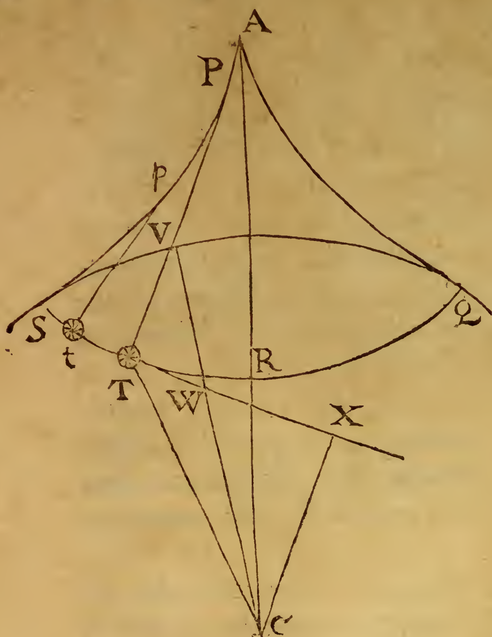
(n) * *Vis quâ corpus T* in loco quovis T acceleratur vel retardatur in cycloide, est ad vim quâ in loco altissimo S, vel Q acceleratur vel retardatur in cycloide, ut arcus T R, ad arcum S R, (ex demonstr. prop. 51.) sed vis quâ corpus in loco S vel Q acceleratur vel retardatur in cycloide, est vis tota quâ ad centrum C, perpendiculariter urgetur; radius enim C S cycloidem S R tangit in S, (458) adeóque directio vis in loco S in cycloide coincidit cum directione vis rectâ trahentis ad centrum C.

465. Coroll. 1. Si centro A radio A R circulus describatur, cycloidis SRQ arcus nascens in loco infimo R cum circuli illius arcu nascente coincidit. Quarè si longitudo penduli A R magna sit, eodem propè modo in exiguis circuli arcubus

DE MOTU CORPORUM.

loco altiſſimo S vel Q, ut cycloidis arcus TR ad ejuſdem arcum SR vel QR.

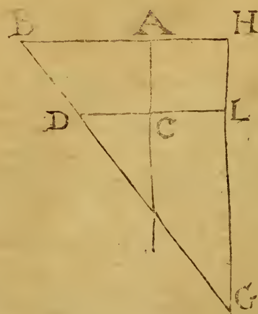
PRO.



cubus oſcillabitur corpus quo in cycloide, & quò major eſt longitudo penduli minorque circuli arcus in quem excurrit, eò major erit motuum in circulo & in cycloide conſonantia, atque hinc, non abludente experientiâ, oſcillationes in exiguis circuli arcubus ſunt ad ſenſum iſochronæ.

466. Coroll. 2. Ex his deducitur quænam ſit æquatio ad hanc Cycloidem intrà globum deſcriptam pertinens, ſive, invenietur æquatio exprimens rationem diſtantiæ cujuſvis puncti T à centro ad perpendiculum in Tangentem ex eo puncto ductam demiſſum: Dicatur enim globi radius CV, a, Diameter rotæ VW, $a-c$, erit diſtantia CR ſive CW, c; Ducatur ex puncto quovis T linea TC ad centrum quæ dicatur x, ducatur Tangens TX ex eo puncto T & ex centro demittatur in eam Tangentem perpendiculum CX, ſit TX $= z$ & CX $= p$. Erit ubique $pp = \frac{aacc - ccxx}{aa - cc}$; Nam ob ſimilia Triangula VTW, WCX eſt CW (c) : VW $(a-c)$ = CX (p) : TV $= \frac{p}{c} \times \overline{a-c}$ & CV (a) : WV $(a-c)$ = TX (z) : TW $= \frac{z}{a} \times \overline{a-c}$; eſt itaque TV^2 + TW^2 $= \frac{p^2}{c^2} \times \overline{a-c}^2 + \frac{z^2}{a^2} \times \overline{a-c}^2$. Sed TV^2 + TW^2 = VW^2 $= \overline{a-c}^2$, ergo $\frac{p^2}{c^2} \times \overline{a-c}^2 + \frac{z^2}{a^2} \times \overline{a-c}^2 = \overline{a-c}^2$ & dividendo utrumque membrum æquationis per $\overline{a-c}^2$ erit $\frac{p^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2}$ $\left(\text{ſive } \frac{a^2p^2 + c^2z^2}{a^2c^2}\right)$ $= 1$, & multiplicato utroque membro æq. per a^2c^2 eſt $a^2p^2 + c^2z^2 = a^2c^2$, ſed eſt $z^2 = x^2 - p^2$ (per conſt.) Ergo $a^2p^2 + c^2x^2 - c^2p^2 = a^2c^2$ & factâ tranſpoſitione $a^2p^2 - c^2p^2 = a^2c^2 - c^2x^2$, ideoque $p^2 = \frac{a^2c^2 - c^2x^2}{a^2 - c^2}$. Q. E. D.

Simili ratiocinio invenietur æquatio ad epicycloidem ſive cycloidem extra globum deſcriptam inverſis ſolummodo terminis & ſignis ut ſit $pp = \frac{c^2x^2 - a^2c^2}{c^2 - a^2}$.



467. Lemma. Ad punctum G tendat vis centripeta diſtantiæ ab illo puncto proportionalis quam in locis H, L exhibeant lineæ HB, LD rectæ GH perpendiculares, ſitque recta GDB locus punctorum B, D, capiatur HA ad HB ut vis centripeta conſtans ad vim variabilem in lo-

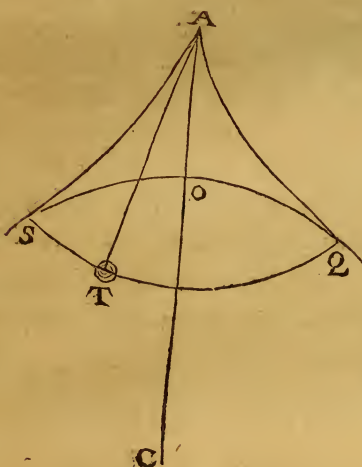
co

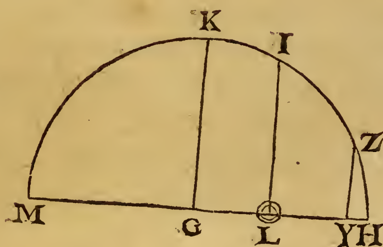
PROPOSITIO LII. PROBLEMA XXXIV.

LIBER PRIMUS. PROP. LII. PROBL. XXXIV.

Definire & velocitates pendulorum in locis singulis, & tempora quibus tum oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peraguntur.

Centro quovis G, intervallo GH cycloidis arcum RS æquan-





te, describe semicirculum HKM semidiametro GK bisectum. Et si vis centripeta, distantiis locorum à centro proportionalis, tendat ad centrum G, sitque ea in perimetro HIK æqualis vi centripetæ in perimetro globi QOS ad ipsius centrum tendenti; & (o) eodem tempore quo pendulum T dimittitur è loco

co dato H, & agatur AC rectæ HG parallela lineam L D secans in C, de loco H cadant corpora duo, quorum alterum vi constante H A, alterum vi variabili H B vel L D urgeatur, sintque illorum velocitates in eodem loco L, V, v, & erit V^2 ad v^2, ut area H A C L ad aream H B D L, (per prop. 39. & not. 408.) id est $V^2 : v^2 = HL \times HA : HL \times \frac{BH + DL}{2} = 2HA : BH + DL$. Et quoniam in centro G evanescit D L erit in illo centro $V^2 : v^2 = 2HA : BH$, & $V : v = \sqrt{2HA} : \sqrt{BH}$. Quarè datis in loco H viribus H A, H B, & velocitate in loco quovis L vel G vi constante acquisitâ, datur velocitas vi variabili in eodem loco acquisita.

(o) * *Et eodem tempore.* Id est, simul demittantur ex locis S & H corpora *T* & *L*.

loco ſupremo S, cadat corpus aliquod L ab H ad G: quoniam vires quibus corpora urgentur ſunt æquales ſub initio & ſpatiis deſcribendis TR, LG ſemper proportionales, atque ideo, ſi æquantur TR & LG, æquales in locis T & L; patet corpora illa deſcribere ſpatia ST, HL æqualia ſub initio, (p) ideoque ſubinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia ſpatia deſcribere. Quare (per prop. XXXVIII.) tempus quo corpus deſcribit arcum ST eſt ad tempus oſcillationis unius, ut arcus HI, tempus quo corpus H perveniet ad L, ad ſemiperipheriam HKM, tempus quo corpus H perveniet ad M. Et velocitas corporis penduli in loco T eſt ad velocitatem ipſius in loco infimo R, (hoc eſt, velocitas corporis H in loco L ad velocitatem ejus in loco G, ſeu (q) incrementum momentaneum lineæ HL ad incrementum momentaneum lineæ HG, arcubus HI, HK æquabili fluxu creſcentibus) ut ordinatim applicata LI ad radium GK, ſive ut (r) $\sqrt{SRq. - TRq.}$ ad SR. Unde (ſ) cum, in oſcillationibus inæqualibus, deſcribantur æqualibus temporibus

(p) * *Ideóque ſubindè pergere æqualiter urgeri & æqualia ſpatia* iiſdem nempe temporibus *deſcribere.*

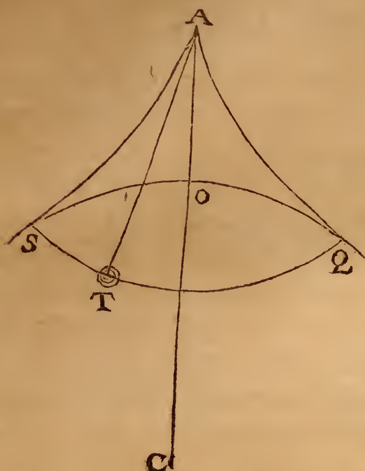
(q) * *Seu incrementum momentaneum &c.* Nam incrementa illa ſunt ſpatia eodem tempuſculo uniformiter deſcripta, quæ proindè ſunt ut velocitates in locis L & G, quibus deſcribuntur, arcus autem HI, HK, quæ tempora exhibent, creſcunt ut tempora, hoc eſt, æquabili fluxu.

(r) *Sivè ut* $\sqrt{SR^2 - TR^2}$ *ad* SR. Eſt enim, ex naturâ circuli $LI^2 = ML \times LH = GH^2 - GL^2 = SR^2 - TR^2$, adeóque $LI = \sqrt{SR^2 - TR^2}$, & $LI : GK = \sqrt{SR^2 - TR^2} : GK$, ſeu SR.

(ſ) 468. *Undè cum &c.* Datâ vi centripetâ in perimetro globi QOS vel in H datur tum velocitas quâ corpus hâc vi ſollicitatum deſcribit circulum HKM, tum tempus quo ſemiperipheriam HKM percurrit (201) hoc eſt, tempus unius oſcillationis integræ; & contrà, Dato tempore unius oſcillationis integræ, datur vis centripeta in H vel S (202). Porrò dato arcu ST, vel rectâ æquali HL, datur LI ſinus arcus HI, & hinc datur hic arcus, adeóque & ratio HI, ad HKM, id eſt, ratio temporis quo percurritur HL vel ST ad tempus datum oſcillationis integræ. Et contrà dato tempore quo deſcribitur HL vel ST, datur arcus HI, & hinc datur illius ſinus rectus LI ſinuſque verſus HL vel arcus ST. Datâ vi centripetâ in S vel H, datur velocitas corporis de loco S vel H in R vel G pervenientis (467); hinc verò datur velocitas corporis in loco quovis dato T vel L; cum (ex demonſtr.) velocitas in R vel G, ſit ad velocitatem in T vel L, ut GK ad LI, ſeu ut SR ad $\sqrt{SR^2 - TR^2}$. Dato tempore quo deſcribitur ST vel HL, datur arcus HI, & illius ſinus rectus LI, adeóque & velocitas in L & contrà.

Si

bus arcus totis oſcillationum arcubus proportionales; habentur, ex datis temporibus, & velocitates & arcus deſcripti in oſcilla-

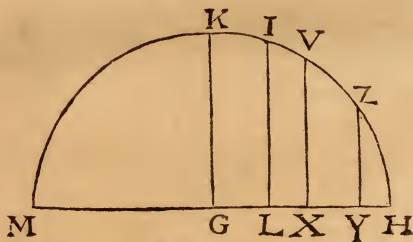




tionibus univerſis. Quæ erant primò invenienda.

Oſcillentur jam funipendula corpora in cycloidibus diverſis intra

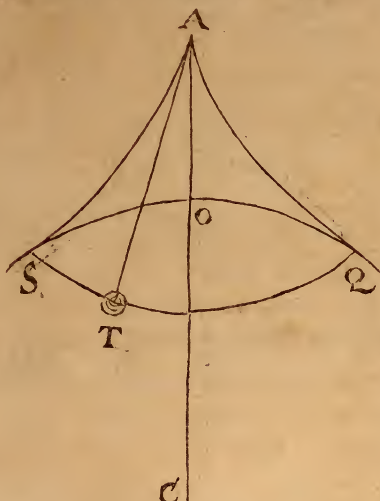
Si corpus non ex ſummo loco S, vel H, ſed ex alio quovis *t*, (vid. fig. prop. 51.) vel Y, demittatur, erit tempus quo ex loco t pervenit ad R, vel ex Y ad G, æquale tempori dato dimidiæ oſcillationis. Hinc dato arcu T t, vel rectâ æquali YL, dabitur & tempus quo deſcribitur & velocitas in T vel L, ac contrà. Nam cum ſint arcus ſeu ſpatia quævis æqualibus temporibus deſcripta in oſcillationibus inæqualibus, ut arcus vel ſpatia integris oſcillationibus percurſa (464), dato arcu T t, vel ſpatio YL, dabitur ſpatium HX, quod corpus de loco H demiſſum deſcribit eodem tempore quo aliud corpus percurrit T t vel YL; dato ſpatio H X, datur arcus H V & illius ſinus rectus X V, & hinc datur tempus quo deſcribitur H X & Y L, & velocitas in X; cumque ſit velocitas in

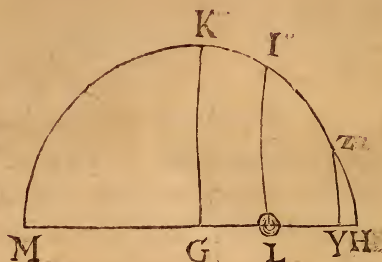


X', in corpore de loco H, cadente ad velocitatem in L, in corpore de loco Y cadente ut H G, ad Y G (464) dabitur velocitas in L, vel T; Et contrà.

DE MOTU CORPORUM.

intra globos diverſos, quorum (t) diverſæ ſunt etiam vires abſolutæ, deſcriptis: &, ſi vis abſoluta globi cujuſvis *QOS* dicatur V, vis acceleratrix quâ pendulum urgetur in circumferentiâ hujus globi, ubi incipit directè versùs centrum ejus moveri, erit ut diſtantia corporis penduli à centro illo & vis abſoluta globi conjunctim, hoc eſt, ut *CO* × V. Itaque (u) lineola *HY*, quæ ſit ut hæc vis acceleratrix *CO* × V, deſcribetur dato tempore; &, ſi (x) erigatur normalis *YZ* circumferen-





(t) 469. *Quorum diverſæ ſunt &c.* Ex centris C, c, per omne circumquaque ſpatium diffundi intelligantur vires centripetæ in ratione diſtantiarum à ſuis reſpectivè centris creſcentes, vires acceleratrices in locis datis æquè altis A, a, dicantur A, a; in aliis locis æquè altis D, d, dicantur V, u, & erit (ex hyp.) V : A = CD : CA = c d : c a = v : a, adeóque V : v = A : a, ſed evaneſcentibus diſtantiis, CD, c d, ſunt V, v, vires abſolutæ (per definitionem VI. Newt.) quarè vires abſolutæ ſunt in ratione virium acceleratricium in locis æquè altis. Jam verò vires acceleratrices in locis quibuſlibet O, o, dicantur B, b, erit (ex Dem.)

V : v = A : a

Et per hyp. C O : C A = B : A

C A vel c a : C o = a : b

Ergò ex æquo V × C O : v × C o = B : b, id eſt, vis acceleratrix in loco quovis O, eſt ut diſtantia à centro & vis abſoluta conjunctim.

(u) * *Itaque lineola naſcens HY, quæ ſit ut hæc vis acceleratrix CO × V, deſcribetur dato tempore.* Nam quadratum temporis quo deſcribitur naſcens HY, eſt ut $\frac{HY}{CO \times V}$ (per cor. V. lem. X.). Undè cum data ſit ratio H Y ad C O × V (ex hyp.), quadratum temporis adeóque & tempus ipſum quo deſcribitur H Y datum erit.

(x) * *Et ſi erigatur normalis &c.* Arcus H Z erit ad ſemiperipheriam H K M, ut tempus datum quo deſcribitur HY, ad tempus unius oſcillationis (prop. 38.) quod proindè erit ut ſemiperipheria H K M, ſeu ut radius G H directè, & arcus H Z inversè. Eſt autem arcus naſcens H Z æqualis chordæ H Z (per Lem. 7.) adeóque (ex naturâ circuli) H Z² = H Y × M H = 2 G H × H Y; Quarè cum ſit H Y ut

tiæ occurrens in Z, arcus naſcens HZ denotabit datum illud tempus. Eſt autem arcus hic naſcens HZ in ſubduplicatâ ratione rectanguli GHY, ideoque ut $\sqrt{GH \times CO \times V}$. Unde tempus oſcillationis integræ in cycloide QRS (cum ſit ut ſemiperipheria HKM, quæ oſcillationem illam integram denotat, directè; utque arcus HZ, qui datum tempus ſimiliter denotat, inversè) fiet ut GH directè & $\sqrt{GH \times CO \times V}$ inversè, hoc eſt, ob æquales GH & SR, ut $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$, ſive (per corol. prop. L.) ut $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Itaque oſcillationes in globis & cycloidibus omnibus, quibuſcunque cum viribus abſolutis factæ, ſunt in ratione quæ componitur ex ſubduplicatâ ratione longitudinis fili directè, & ſubduplicatâ ratione diſtantiæ inter punctum ſuſpenſionis & centrum globi inversè, & ſubduplicatâ ratione vis abſolutæ globi etiam inversè. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc etiam oſcillantium, cadentium & revolventium corporum tempora poſſunt inter ſe conferri. Nam ſi rotæ, quâ cyclois integra globum deſcribitur, diameter conſtituatur æqualis ſemidiametro globi cyclois (y) evadet linea recta per centrum globi tranſiens, & oſcillatio jam erit deſcenſus & ſubſequens aſcenſus in hâc rectâ. Unde datur tum tempus deſcenſus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad diſtantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem deſcribit. Eſt (z) enim hoc tempus (per caſum ſecundum) ad tempus ſemioſcillationis in cycloide quâvis QRS ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

Co-

$CO \times V$, erit HZ^2 ut $2GH \times CO \times V$, ſeu, ut $GH \times CO \times V$, & hinc tempus unius oſcillationis ut $\frac{GH}{\sqrt{GH \times CO \times V}} = \sqrt{\frac{GH}{CO \times V}} = \sqrt{\frac{SR}{CO \times V}} = \sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$ ob $GH = SR$, & $\frac{AR}{AC} = \frac{SR}{CO}$, (per cor. prop. 50.)

(y) * *Cyclois evadet linea recta* (461).

(z) * *Eſt enim hoc tempus &c.* Quoniam cycloide QRS in rectam mutatâ fit $AR = AC$, erit (per caſ. 2.) tum tempus deſcenſus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale (prop. 38.) per circuli quadrantem ut $\sqrt{\frac{1}{V}}$. Unde erit hoc

De Motu Corporum.

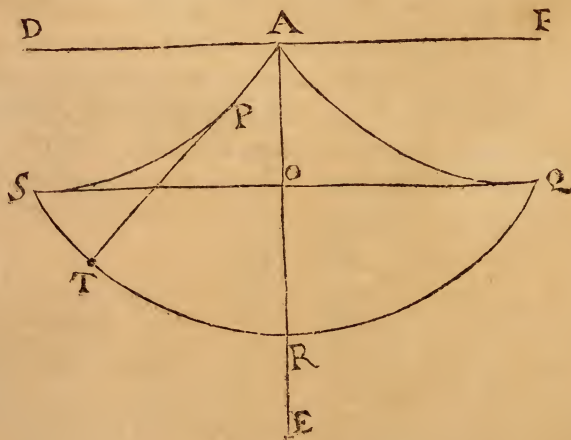
Corol. 2. Hinc etiam consectantur quæ *Wrennus* & *Hugenius* de cycloide vulgari adinvenerunt. Nam (a) si globi diameter augeatur in infinitum: mutabitur ejus superficies sphærica in planum, visque (b) centripeta aget uniformiter secundum lineas huic plano perpendiculares, & cyclois nostra abibit in cycloidem vulgi. Isto (c) autem in casu longitudo arcus cycloidis, inter planum illud & punctum describens, æqualis evadet quadruplicato sinui verso dimidii arcus rotæ inter idem inter planum & punctum describens; ut invenit *Wrennus*: Et (d) pendulum inter duas ejusmodi cycloides in simili & æquali cycloide temporibus

hoc tempus ad tempus semioscillationis in cycloide quâvis Q R S in rectam non mutatâ ut $\sqrt{\frac{1}{V}}$ ad $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$, hoc est, ob datam V, ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$. Quarè dato tempore unius oscillationis in cycloide quâvis Q R S circa centrum C, dabitur tempus descensus de loco quovis ad idem centrum, & tempus huic æquale per quadrantem circuli ad quamvis distantiam descripti.

(a) * *Nam si globi diameter augeatur* (462).

(b) * *Visque centripeta* distantiæ infinitæ (quæ proinde non mutatur) proportionalis non mutabitur, & quoniam centro in infinitum abeunte, radii qui antè erant ad superficiem sphæricam perpendiculares fiunt paralleli; vis centripeta aget uniformiter secundùm lineas huic superficiei in planum mutatæ perpendiculares.

(c) * *Isto autem in casu* (462).



(d) * *Et pendulum inter duas &c.* Erit enim in hoc casu diameter rotæ O R quâ describitur cyclois Q R S, æqualis diametro AO rotæ quâ describitur cyclois A P S (462.), quarè semicycloides S R, A S similes erunt & æquales.

ribus æqualibus oscillabitur, ut demonstravit *Hugenius*. Sed (e) & descensus gravium, tempore oscillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

Aptantur autem propositiones à nobis demonstratæ ad veram constitutionem terræ, quâtenus rotæ eundo in ejus circulis maximis describunt motu clavorum, perimetris suis infixorum, cycloides extra globum; & pendula inferius in fodinis & cavernis terræ suspensa, in cycloidibus intra globos oscillari debent, ut oscillationes omnes evadant isochronæ. Nam gravitas (ut in libro tertio docebitur) decrescit in progressu à superficie terræ, sursum quidem in duplicatâ ratione distantiarum à centro ejus, deorsum vero in ratione simplici.

PRO-

470. (e) * *Sed & descensus &c.* Erit in hoc casu tempus unius oscillationis ad tempus descensûs perpendicularis per diametrum rotæ A O vel O R, seu per dimidiam penduli longitudinem ut peripheria circuli ad ejus diametrum. Nam iisdem positis quæ (in prop. 52. & ejus cor. 2°.) erit tempus unius oscillationis æquale tempori semirevolutionis in circulo H K M (prop. 38.). Est autem (200.) tempus semirevolutionis in circulo HKM, ad tempus descensus uniformiter accelerati per dimidium radium H G, ut peripheria circuli ad diametrum. Quare cum sit $\frac{1}{2}$ H G $=\frac{1}{2}$ S R $=\frac{1}{2}$ A R $=$ O R (462.) erit tempus unius oscillationis ad tempus descensus perpendicularis per dimidiam penduli longitudinem ut circuli peripheria ad diametrum.

471. Corol. Dimidia penduli longitudo A O, est ad spatium A E descensu perpendiculari descriptum unius oscillationis tempore in duplicatâ ratione diametri ad peripheriam circuli. Sit enim tempus unius oscillationis t, diameter circuli ad peripheriam, ut d, ad p, & erit (469) tempus descensus perpendicularis per spatium A O $=\frac{dt}{p}$; sed (27) $\frac{ddtt}{pp}$: tt $=$ A O : A E, ergò A O : A E $=$ d d : p p. Hugenius cui pendulorum theoria debetur prop. 25. part. 4. horologii oscillatorii, longitudinem penduli singulas oscillationes uno minuto secundo absolventis invenit pedum Parif. 3. & linearum 8 $\frac{1}{2}$, hoc est, linearum $\frac{881}{2}$, & hinc dimidia penduli longitudo erat linearum $\frac{881}{4}=220.25$. Est autem diameter circuli ad peripheriam ut 113, ad 355, quam proximè, & proindè quadratum diametri ad quadratum peripheriæ ut 12769. ad 126025; quarè spatium uno minuto secundo descriptum à corpore gravi perpendiculariter cadente, est pedum Parif. 15 $\frac{1}{12}$, quam proximè.

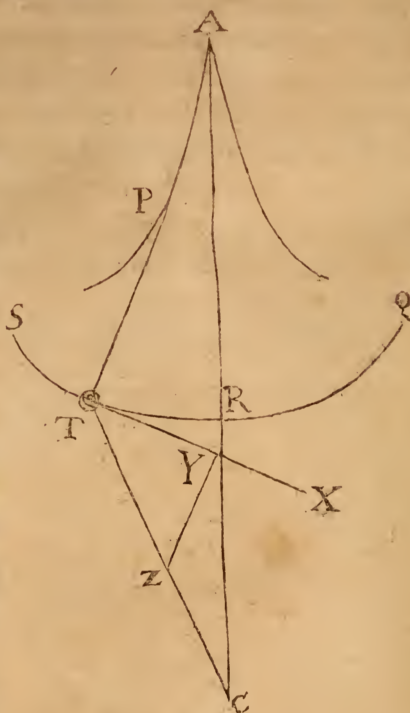
472. Coroll. Quoniam propè telluris superficiem gravium directio horizonti ad sensum perpendicularis est gravitasque constans, atque adeò V gravitas absoluta, & A C distantia à centro telluris datæ sunt, in pendulis in cycloidem vulgarem aut etiam in exiguos arcus circuli (465) excurrentibus, tempus unius oscillationis (per cas. 2. prop. 52.) erit ut $\sqrt{}$ A R, id est, in ratione subduplicatâ longitudinis penduli & proindè longitudo penduli in ratione duplicatâ temporis unius oscillationis.

473.

PROPOSITIO LIII. PROBLEMA XXXV.

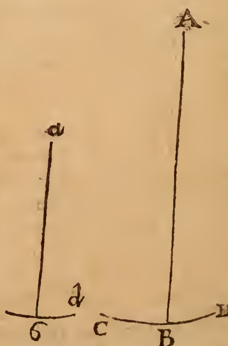
Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis oscillationes semper isochronas peragent.

Oscilletur corpus *T* in curvâ quâvis lineâ *STRQ*, cujus axis sit *AR* transiens per virium centrum *C*. Agatur *TX* quæ curvam illam in corporis loco T quovis contingat, inque hâc tangente *TX* capiatur *TY* æqualis arcui *TR*. Nam (f) longitudo arcus illius ex figurarum quadraturis, per methodos vulgares, innotescit. De puncto *Y* educatur recta *YZ* tangenti perpendicularis. Agatur *CT* perpendiculari illi occurrens in *Z*, & erit vis centripeta proportionalis rectæ *TZ*. *Q. E. I.*



Nam si vis, quâ corpus trahitur de *T* versus *C*, exponatur

473. Corol. Numeri oscillationum isochronarum à duobus pendulis A B, a b, eodem tempore confectarum sunt reciprocè ut tempora quibus singulæ oscillationes fiunt. Nam si pendulum a b, bis oscilletur eo tempore quo A B semel; a b, quatuor oscillationes absolvet, dum A B duas conficit, & ità porrò in aliis suppositionibus, ut patet. Quarè numeri oscillationum isochronarum eodem tempore à duobus pendulis confectarum sunt in ratione subduplicatâ longitudinum pendulorum inversè (472).

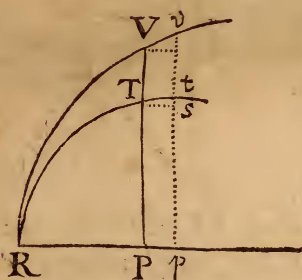


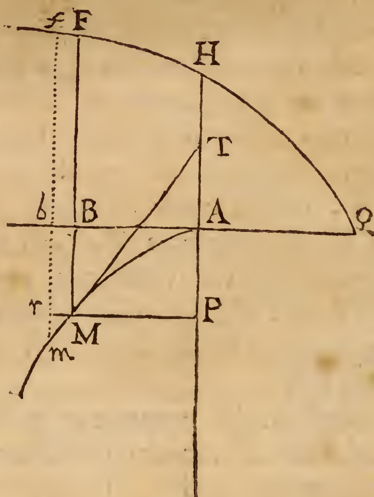
474. Coroll. Hinc si tempus unius oscillationis penduli A B, sit T, tempus unius oscillationis penduli a b, sit t, numeri oscillationum eodem tempore confectarum N, n, erit T : t = n : N (473), & T T : t t = A B : a b (472) ac propterea n n : N N = A B : a b. Datis igitur tribus harum proportionum terminis quartus datus est.

(f) 476. *Nam longitudo arcus &c.* Curvæ R T t sit axis R P, vertex R, ad axem ordinatim applicatæ T P, t p, infinitè propinquæ T s axi parallela & ordinatæ t p occur-

per rectam TZ captam ipsi proportionalem, resolvetur hæc in vires TY, YZ; quarum YZ trahendo corpus secundum longitudinem fili PT, motum ejus nil mutat, vis autem altera TY motum ejus in curvâ $STRQ$ directè accelerat vel directè retardat. (g) Proinde cum hæc sit ut via describenda TR, accelerationes corporis vel retardationes in oscillationum duarum (ma-

LIBER PRIMUS. PROP. LIII. PROBL. XXXV.





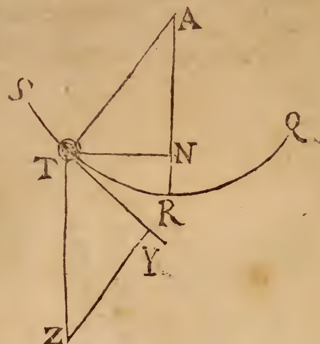
occurrens in s. Sit $RP=x$, $PT=y$, & erit $Pp=Ts=dx$, $ts=dy$, $Tt^2=dx^2+dy^2$, $Tt=\sqrt{dx^2+dy^2}$; quarè RT, fluens ipsius Tt, æqualis erit fluenti quantitatis $\sqrt{dx^2+dy^2}$. Ex æquatione ad curvam RT, quæratur valor ipsius dy per dx & alias quantitates, sitque $dy=Qdx$, Q vero quantitas quælibet constans aut variabilis, erit $\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{1+QQ}$. In perpendiculo PT, capiatur $PV=A\times\sqrt{1+QQ}$, sitque A quantitas data, & curva RV locus punctorum V, erit areæ RVP elementum $Pp\times PV=Adx\sqrt{1+QQ}$, undè $Tt=dx\sqrt{1+QQ}=\frac{Pp\times PV}{A}$, & capiendo utrinque fluentes $RT=$ areæ $\frac{RVP}{A}$, curvæ igitur RT rectificatio ad quadraturam figuræ RVP reducta est.

476. Idem alia methodo fieri potest. Sit curvæ hujus rectificandæ AMm, axis AP, & vertex A. Per punctum quodvis M agatur tangens MT axi occurrens in T, & MF axi parallela rectam AB axi normalem secans in B; capiatur semper AB ad MT sicut constans quævis A ad BF, & punctum F curvam FHQ perpetuò tangat, erit spatium curvilineum $BFHA$ æquale rectangulo sub arcu AM & constanti A comprehenso, adeóque arcus $AM=\frac{BFHA}{A}$. Nam ductâ mf priori MF parallelâ & infinitè propinquâ, demissoque ad axem AP perpendiculo MP, quod rectam mf, secat in r; erit ob triangula MPT, Mrm similia $Mr:Mm=MP$, vel $BA:MT=A:BF$ (per constr.) Ergò $BF\times Mr$, id est, elementum $BbfF=Mm\times A$, ac proindè spatium fluens $AHFB$ æquale fluenti $AM\times A$.

(g) * *Proindè &c.* Quæ sequuntur manifesta sunt (ex dem. prop. 51.)

DE MOTU CORPORUM.

(majoris & minoris) partibus proportionalibus describendis, erunt semper ut partes illæ, & propterea facient ut partes illæ simul describantur. Corpora autem quæ partes totis semper proportionales simul describunt, simul describent totas. *Q. E. D.* (h).



Corol. 1. Hinc si corpus *T*, filo rectilineo *AT* à centro *A* pendens, describat arcum circularem *STRQ*, & interea (i) urgeatur secundum lineas parallelas deorsum à vi aliquâ, quæ sit ad vim uniformem gravitatis, ut arcus *TR* ad ejus sinum *TN*: æqualia erunt oscillationum singularum tempora. Etenim ob parallelas *TZ*, *AR*, similia erunt triangula *ATN*, *ZTY*; & propterea *TZ* erit ad *AT* ut *TY* ad *TN*; hoc est, si gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam *AT*; vis *TZ*, quâ oscillationes evadent isochronæ, erit ad vim gravitatis *AT*, ut arcus *TR* ipsi *TY* æqualis ad arcûs illius sinum *TN*.

Corol. 2. Et propterea in horologiis, si vires à machinâ in pendulum ad motum conservandum impressæ ita cum vi gravitatis componi possint, ut vis tota deorsum semper sit ut linea quæ oritur applicando rectangulum sub arcu *TR* & radio *AR*

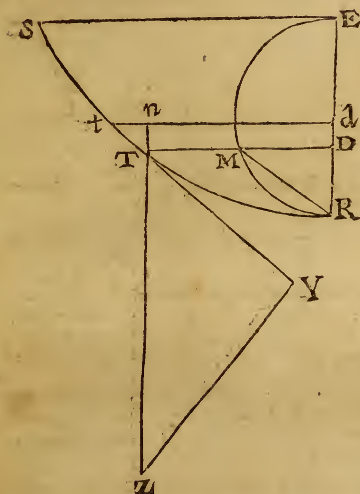
(h) 477. *Q. E. D.* Datâ vi centripetâ TZ quâ corpus in datâ curvâ SRQ oscillationes semper isochronas peragit, velocitates illius corporis in locis singulis & tempora quibus tum oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peraguntur eodem modo definiuntur ac in cas. 1°. prop. 52. Ductâ enim ex centro virium C rectâ quæ curvam tangat in puncto aliquo S, erit in hoc puncto TZ=TY, hoc est, vis centripeta in curvâ STR æqualis vi centripetæ ad C perpendiculariter tendenti in S; quarè manente constructione cas. 1. prop. 52. & supponendo vim centripetam in H, (vid. fig. ibid.) quâ describitur circulus HKM, æqualem vi centripetæ in S, tempus unius oscillationis & singulæ oscillationum partes, & velocitates in locis singulis invenientur prorsus (ut in not. 468.) iisdemque ratiociniis res omnis demonstrabitur.

(i) * *Intereà urgeatur secundum lineas parallelas &c.* Centro C figuræ superioris in infinitum abeunte.

A R ad sinum *T N*, oscillationes (k) omnes erunt isochronæ.

(k) * *Oscillationes omnes erunt isochronæ.* Cum enim vis tota T Z quâ oscillationes redduntur isochronæ sit (per cor. 1.) ad vim gravitatis A T seu A R, ut T R ad T N, erit $TZ = \frac{AR \times TR}{TN}$, adeóque vis tota T Z, ut $\frac{AR \times TR}{TN}$.

478. Ex demonstratis solvi potest hoc problema: Datâ lege vis centripetæ, invenire curvam tautochronam STR, in quâ nimirum, corpus oscillationes semper isochronas peragat.



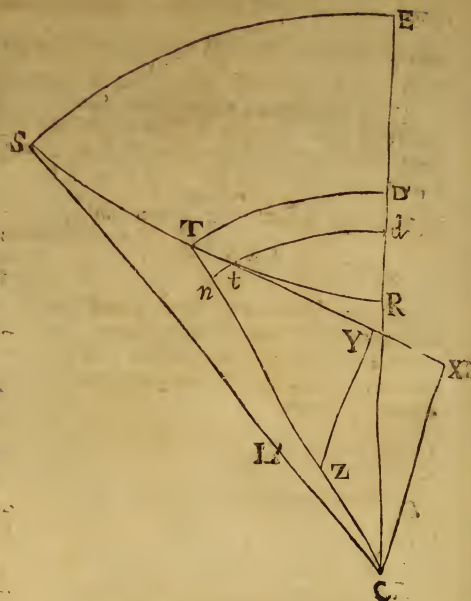
Casus 1us. Vis gravitatis directio T Z semper sit parallela axi E R curvæ STR, sint S E, t d, T D ad axem R E ordinatim applicatæ, punctum E datum, puncta D, d infinitè propinqua, tangens T Y æqualis arcui T R, Y Z ad T Y perpendicularis secet T Z in Z, & Z T producta secet t d in n. Dicantur $RE = a$, vis gravitatis in E vel $S = g$, in D vel $T = v$, pars lineæ verticalis per S ductæ determinata ad modum verticalis T Z, sit $= b$, $RD = x$, $DT = y$, $TR = TY = s$. Ob triangula Tnt, TYZ similia, Tn (dx) : Tt (ds) $=$ TY (s) : $TZ = \frac{sds}{dx}$; ob angulum Tnt rectum $ds^2 = dx^2 + dy^2$; & (per prop. 53.) $g : v = b : TZ \left(\frac{sds}{dx}\right)$, ideoque $sds = \frac{b}{g} v dx$, & sumptis fluentibus $\frac{1}{2} ss = \frac{b}{g}$ S. $v dx$; fluens autem S. $v dx$ ita sumi debet, ut evanescente x, ea fluens evanescat. Erit igitur $ss = \frac{2b}{g}$ S. vdx, $s = \sqrt{\frac{2b}{g}}$ S. vdx, & sumptis fluxionibus $ds = \frac{bvdx}{\sqrt{2bg \text{S.} vdx}}$, proindeque $ds^2 = \frac{bbvvdx^2}{2bg \text{S.} vdx} = dx^2 + dy^2$, & hinc $dx \sqrt{\frac{bvv - 2g \text{S.} vdx}{2g \text{S.} vdx}} = dy$ æquatio ad curvam tautochronam STR, in quâ datâ lege vis gravitatis exterminabitur v.

Exemplum. Sit gravitas constans, seu $v = g$, & erit $vdx = gdx$, S. $vdx = gx$, quæ evanescit, ubi $x = 0$. Quare æquatio ad curvam SR fiet $dx \sqrt{\frac{b - 2x}{2x}} = dy$. Quoniam vero $ss = \frac{2b}{g}$ S. $vdx = 2bx$, si ponatur $b = SR$, ut verticalis per S ducta curvam tangat in S, & loco s scribatur b, ac loco x scribatur a, erit $bb = 2ba$, & proinde $b = 2a$, atque $ss = 4ax$, hoc est, $SR = 2RE$, & $TR^2 = 4RE \times RD$; porrò si diametro RE describatur circulus EMR secans DT in M, erit $MR^2 = RE \times RD$, $4MR^2 = 4RE \times RD$, ideoque $TR^2 = 4MR^2$, & $TR = 2MR$, quæ est proprietas cycloidis vulgaris circulo genitore EMR descriptæ.

Casus 2. Tendat vis centripeta ad punctum datum C. Centro C, radiis CE, CD, Cd descripti sint arcus circulares ES, DT, dtn, curvæ SR occurrentes in S, T, t, & rectæ CT in n, sintque E punctum in axe CE datum, D, d puncta infinitè propinqua, tangentis TX per T ductæ pars TY æqualis arcui TR, & ZY, CX ad tangentem perpendiculares. Dicantur $CE=a$, $CR=c$, SL pars radii CS eodem modo determinata ac TZ pars radii CT sit $=b$, vis centripeta in E vel $S=g$, in D vel $T=v$, CD vel $CT=x$, TR vel $TY=s$, $CX=p$. Ob similitudinem triangulorum, Tnt, TYZ, TXC, est Tn (dx) : Tt $(ds) =$ TY (s) : TZ $= \frac{sds}{dx}$ & TC(x) : CX $(p) =$ Tt (ds) : tn $= \frac{pds}{x}$, ideoque ob angulum Tnt rectum $ds^2 = dx^2 + \frac{ppds^2}{xx}$, & proinde $ds^2 = \frac{xxdx^2}{xx-pp}$.

Verum per prop. 53. $g:v=b:$TZ $\left(\frac{sds}{dx}\right)$, unde $sds = \frac{b}{g}vdx$, & sumptis fluentibus $\frac{1}{2}ss = \frac{b}{g}$ S. vdx. Quoniam autem evanescente s, fit $x = c$, fluens S. vdx ita accipi debet, ut, positâ $x=c$, evanescat. Erit igitur $ss = \frac{2b}{g}$ S. vdx, $s = \sqrt{\frac{2b}{g}}$ S. vdx, & sumptis fluxionibus $ds = \frac{bvdx}{\sqrt{2bg\text{S. }vdx}}$, unde $ds^2 = \frac{bvvdx^2}{2g\text{S. }vdx} = \frac{xxdx^2}{xx-pp}$, atque adeo $\frac{bvv}{2g\text{S. }vdx} = \frac{x^2}{xx-pp}$ æquatio ad tautochronam STR, in quâ datâ lege vis centripetæ delebitur v.

Exemplum. Vis centripeta sit ut distantia à centro C, hoc est, $g:v=a:x$, adeoque $v = \frac{gx}{a}$, $vdx = \frac{gxdx}{a}$, S. $vdx = \frac{gxx}{2a} + Q$ (constantem) & quoniam positâ $x=c$, evanescit S. vdx, erit $Q = \frac{-gcc}{2a}$,



atque ita S. $vdx = \frac{gxx-gcc}{2a}$. Quarè erit $ss = \frac{2b}{g}$ S. $vdx = \frac{bxx-bcc}{a}$, & æquatio ad tautochronam evadet $\frac{bxx}{axx-acc} = \frac{xx}{xx-pp}$, seu $pp = \frac{bxx-axx+acc}{b}$.

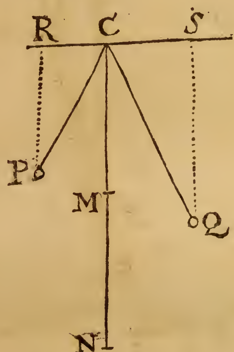
Jam si in hac æquatione ponatur $b=a$, erit $p=c$, & $ss=xx=cc$, ideoque tautochrona SR linea recta ad CR perpendicularis in R.

Si ponatur b major quam a, & $c=0$, erit $p=x\sqrt{\frac{b-a}{b}}$, adeoque p ad x in ratione datâ, cumque sit p seu CX sinus anguli CTX, existente radio x seu CT, erit angulus CTX constans, & proinde tautochrona SR spiralis logarithmica.

Si fuerit b minor quam a, & recta CS curvam SR tangat in S, erit $b=$SR; cumque sit $ss = \frac{bxx-bcc}{a}$, si ponatur $s=$SR$=b$, & proinde $x=a$ fiet $bb=$
baa

$\frac{baa-bcc}{a}$, & $b=\frac{aa-cc}{a}$. Jam si in æquatione ad curvam S R loco b scribatur $\frac{aa-cc}{a}$, erit $pp=\frac{aacc-ccxx}{aa-cc}$ æquatio ad cycloidem, quæ describitur rotatione circuli cujus diameter est R E seu $a-c$ super concavam peripheriam circuli centro C radio C E seu a descripti, ut liquet per n. 456.

Schol. In superioribus de pendulorum motu propositionibus corporis penduli gravitatem in centro ceu puncto coactam & filum gravitatis expers supposuimus, quæ pendulum simplex constituunt. Quamobrem ne demonstratæ oscillationum leges in experimentis valdè perturbentur, filum usurpandum est tenue cum globo exiguo & ex materiâ gravissimâ conflato. Si verò filum aut virga è quâ globus pendet gravis fuerit & globus major, pendulum non amplius simplex est, sed compositum, quod pluribus ponderibus inter se connexis instructum est.



Pendulum compositum C P Q, onustum quotcumque pondusculis P, Q, &c. quorum commune gravitatis centrum M circà punctum suspensionis C oscilletur. Recta C M per punctum suspensionis C & commune gravitatis centrum M ducta vocatur axis penduli compositi PCQ, recta verò RCS in puncto suspensionis C ad axem penduli C M perpendicularis dicitur axis oscillationis. Si in axe penduli compositi C M, capiatur C N æqualis longitudini penduli simplicis suas oscillationes in circulo eodem tempore quo pendulum compositum C P Q semper absolventis, pendulum illud simplex composito C P Q synchronum vel etiam isochronum dicitur, & punctum N centrum oscillationis penduli compositi C P Q appellatur. Porrò si singulorum pondusculorum P, Q &c. gravitas in punctis P, Q &c. collecta intelligatur, & lineæ P C, Q C &c. gravitatis expertes supponantur, sitque M summa pondusculorum omnium P, Q, &c. atque ex punctis P, Q &c. ad axem oscillationis R C S demittantur perpendicula P R, Q S &c. erit $CN=\frac{P\times PR^2+Q\times QS^2}{M\times MC}$ + &c. id est, si pondera singula penduli compositi ducantur in quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis, & summa productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum summam in distantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oscillationis, orietur longitudo penduli simplicis composito isochroni, sivè distantia inter axem & centrum oscillationis ipsius penduli compositi. Hoc pulcherrimum theorema quo linearum ac figurarum omnium oscillantium centrum oscillationis determinatur, primus in horologio oscillatorio invenit ac demonstravit Hugenius. Idem theorema suo quisque modo postea demonstrarunt fratres celeberrimi Jacobus & Joannes Bernoulli, ille in actis Lipsiensibus an. 1691. & commentariis Paris. an. 1703. Hinc verò in actis Lipsiensibus & commentariis Paris. an. 1714; quorum demonstrationes exposuit clariss. Wolfius in elementis Mechanices. Hermannus quoque lib. 1°. Phoron. cap. 5°. & initio tomi 3ⁱ. Acad. Petropol. duas ejusdem theorematis demonstrationes edidit.

Hugenius horologii oscillatorii parte 4ª. prop. 22. distantiam centri oscillationis à puncto suspensionis in sphærâ filo tenui suspensâ æqualem esse invenit longitudini fili cum radio sphæræ atque duabus quintis partibus tertiæ proportionalis ad lineam compositam ex radio sphæræ ac longitudine fili & radium ipsum, hoc est, si filum dicatur L, radius sphæræ R, distantia centri oscillationis à puncto suspensionis D, erit $D=L+R+\frac{2RR}{5(L+R)}$.

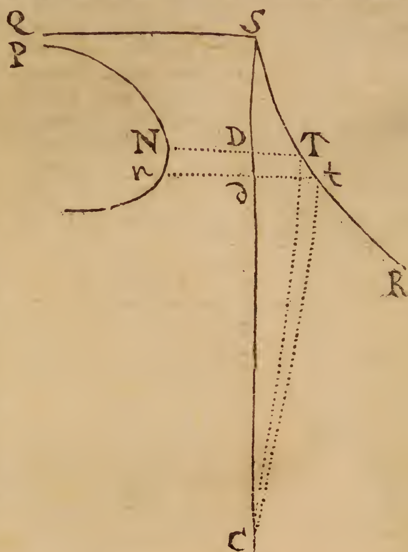
Sed hæc omnia indicare, non verò demonstrare nobis licet, cum his Propositionibus non utatur autor noster.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO LIV. PROBLEMA XXXVI.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora, quibus corpora vi quâlibet centripetâ in lineis quibuscunque curvis, in plano per centrum virium transeunte descriptis, descendent & ascendent.

Descendat corpus de loco quovis S, per lineam quamvis curvam $STtR$ in plano per virium centrum C transeunte datam. Jungatur CS & dividatur eadem in partes innumeras æquales, sitque Dd partium illarum aliqua. Centro C intervallis CD, Cd describantur circuli DT, dt, lineæ curvæ $STtR$ occurrentes in T & t. Et ex datâ tum lege vis centripetæ, tum altitudine CS de quâ corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in aliâ quâvis altitudine CT (per prop. XXXIX.) (1) Tempus autem, quo corpus describit lineolam Tt, est ut lineolæ hujus longitudo, id est, ut secans anguli tTC directè; & velocitas inversè. Tempori huic proportionalis sit ordinatim applicata DN ad rectam CS per punctum D perpendicularis, & ob datam Dd erit rectangulum Dd



(1) * *Tempus autem quo corpus &c.* Nam, T t, est spatium nascens velocitate uniformi descriptum, est autem tempus quo spatium aliquod æquabiliter describitur ut spatium illud directè & velocitas inversè (5). Porrò si centro T radio dato D d, æquali differentiæ rectarum T C, t C circulus describi intelligatur, erit T t secans anguli t T C, quarè ob datum radium D d erit semper T t ut secans anguli t T C, atque adeò tempus quo describitur T t erit ut illa secans directè & velocitas inversè. Sed datâ tangente curvæ S T R in puncto T datur anguli C T t secans; undè dabitur D N proportionalis tempori quo describitur T t.

$Dd\times DN$, hoc est area $DNnd$, eidem tempori proportionale. Ergo si PNn sit curva illa linea quam punctum N perpetuo tangit, ejusque asymptotos sit recta SQ rectæ CS perpendiculariter insistens: erit area $SQPND$ proportionalis tempori quo corpus descendendo descripsit lineam ST; proindeque ex inventâ illâ areâ dabitur tempus. *Q. E. I.*

PRO-

479. Exemplum. Centrum virium C, in infinitum abeat, ut sit vis centripeta constans, illiusque directio rectæ SDC semper parallela, & arcus DT, dt, in rectas lineas ad SD normales mutentur. Sit curva STR circuli quadrans cujus centrum O & radius OS ad SD perpendicularis; producantur perpendicula TD, OS ad F & V, & DF constans gravitatem exhibeat in loco D, punctum F perpetuò tanget rectam VF lineæ SD parallelam, eritque (408) velocitas in D vel $T=\sqrt{2SD\times FD}$. Ex puncto T ad SO demittatur perpendiculum TH rectam dt secans in m, sitque $SO=a$, $SV=FD=b$, $SD=TH=x$ & ob triangula TOH, tTm, similia, erit $HO(\sqrt{aa-xx})$: $TO(a)=Tm(dx):Tt=\frac{adx}{\sqrt{aa-xx}}$, velocitas in $T=\sqrt{2SD\times DF}=\sqrt{2bx}$. Quarè tempus per arcum nascentem $Tt=\frac{Tt}{\sqrt{2bx}}(5)=\frac{adx}{\sqrt{2aabx-2bx^3}}$ undè, $DN=\frac{a}{\sqrt{2baax-2bx^3}}$. (Si ND dicatur y, erit $yy=\frac{aa}{2baax-2bx^3}$ æquatio ad curvam PNn, in quâ si ponatur $x=0$ vel $x=a$ erit y infinita, & proindè rectæ OV, RX ad SD perpendiculares sunt hujus curvæ asymptoti.

Similiter si corpus de loco R ascendat in semicirculo RTS, sitque ejus velocitas in R illa quâ possit ad altitudinem verticalem e ascendere, dicanturque XV seu $RO=a$, $FX=x$, ideoque velocitas in $T=\sqrt{2be-2bx}$, & $Tt=\frac{adx}{\sqrt{aa-xx}}$; erit tempus per $Tt=\frac{adx}{\sqrt{2be-2bx\times aa-xx}}$ & $DN=y=\frac{a}{\sqrt{2be-2bx\times(aa-xx)}}$, ubi DN per unitatis quadratum, ut servetur homogeneitas, divisa intelligitur.

Scho-

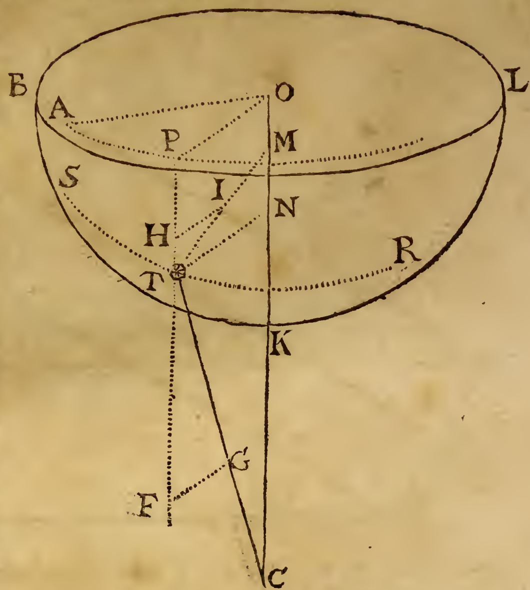
PROPOSITIO LV. THEOREMA XIX.

Si corpus movetur in superficie quâcunque curvâ, cujus axis per centrum virium transit, & à corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem describet.

Sit BKL superficies curva, T corpus in eâ revolvens, STR trajectoria, quam corpus in eâdem describit, S initium trajectoriæ, OMK axis superficiei curvæ, TN recta à corpore in axem perpendicularis, OP huic parallela & æqualis à puncto O, quod in axe datur, educta; AP (m) vestigium trajectoriæ à puncto P in lineæ volubilis OP plano AOP descriptum; A vestigii initium puncto S respondens; TC recta à corpore ad centrum ducta; TG pars ejus vi centripetæ quâ corpus urgetur in centrum C, pro-

Scholium. Si ex his tribus, vi centripetâ in singulis locis, curvâ in quâ corpus ascendit vel descendit, & tempore quo singuli curvæ arcus percurruntur, duo data fuerint, tertium dabitur. Sit enim (in superioribus figuris) D d $= dx$, T t $= ds$, t m $= dy$, velocitas in T $= c$, & erit $ds^2 = dx^2 + dy^2$, & (5) $cdt = ds$, ideoque $ccdt^2 = dx^2 + dy^2$. Quare si, datâ vi centripetâ, seu (per prop. 39.) æquatione inter c & x, detur etiam æquatio inter t & x vel y, dabitur æquatio inter x & y, hoc est, æquatio ad curvam STt, & vice versâ. Exempli causâ, positâ vi centripetâ constante & ad distantiam infinitam tendente, corpus ita descendat in curva STt, ut tempus per arcum quemvis ST proportionale sit altitudini correspondenti Sd, dicanturque Sd $= x$, DT $= y$, tempus per ST $= t$, velocitas in T $= c$; & erit dt ut dx, & c ut $\sqrt{x}$, ideoque cdt ut $dx\sqrt{x}$, & hinc si fuerit a quantitas constans, $cdt = dx\frac{\sqrt{x}}{a}$ & proinde $\frac{xdx^2}{a} = dx^2 + dy^2$, & hinc $(x-a)dx^2 = ady^2$. Ponatur $x - a = v$, & erit $dx = dv$, & $v^{\frac{1}{2}}dv = a^{\frac{1}{2}}dy$, sumptisque fluentibus $\frac{2}{3}v^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2}}y$, $\frac{4}{9}v^3 = ayy$, $v^3 = \frac{9}{4}ayy$, æquatio ad parabolam secundi generis, cujus est latus rectum $\frac{9a}{4}$, abscissa v, & ordinatim applicata y. Sed quoniam in illâ parabolâ, positâ $y = 0$, fit $v = 0$, adeoque $x - a = v = 0$, & $x = a$, patet corpus de altitudine a cadere debere antequam in parabola descendat, capiendamque esse SD $= v$, ut tempus per arcum ST sit proportionale altitudini $v + a$, seu x.

(m) * *AP vestigium &c.* Si corpus in superficie quâcunque curvâ moveatur, suoque motu curvam describat quæ in plano posita non sit, ad planum est referenda, idque fit si in superficie curvâ aliquod fingatur planum ad quod ex singulis curvæ descriptæ punctis erigantur perpendiculares, quarum extremitates aliam in plano lineam describent, hæc linea primæ vestigium seu linea projectionis dicitur.

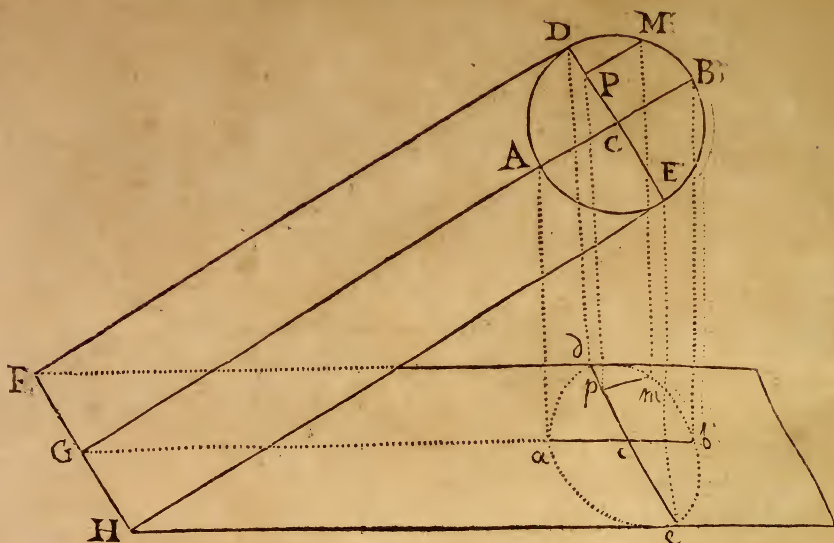


proportionalis; TM recta ad superficiem curvam perpendicularis; TI pars ejus vi pressionis, quâ corpus urget superficiem vicissimque urgetur versus M à superficie, proportionalis; PTF recta axi parallela per corpus transiens, & GF, IH rectæ à punctis G & I in parallelam illam $PHTF$ perpendiculariter demissæ. Dico jam, quod area AOP, radio OP ab initio motus descripta, sit tempori proportionalis. Nam vis TG (per legum corol. 2.) resolvitur in vires TF, FG; & vis TI in vires TH, HI: Vires autem TF, TH agendo secundum lineam PF plano AOP perpendicularem mutant solummodo motum corporis quâtenus huic plano perpendicularem. Ideoque motus ejus quâtenus secundum positionem plani factus; hoc est, motus puncti P, quo trajectoriæ vestigium AP in hoc plano describitur, idem est ac si vires TF, TH tollerentur, & corpus solis viribus FG, HI agitaretur; hoc est, idem ac si corpus in plano AOP, vi (n) centripetâ ad centrum O tendente & summam virium FG & HI æquante, describeret curvam AP. Sed vi tali describitur area AOP (per prop. 1.) tempori proportionalis. *Q. E. D.*

Corol. Eodem argumento si corpus, à viribus agitatum ad centra duo vel plura in eâdem quâvis rectâ CO datâ tendentibus, describeret in spatio libero lineam quamcunque curvam ST; foret area AOP tempori semper proportionalis.

(n) * *Vi centripetâ ad centrum O &c.* Nam curva superficies BSKL genita supponitur revolutione curvæ lineæ BSK circa axem suum OC, undè sequitur lineas omnes PO, HI, TM, FG, PF, CO esse in eodem plano, atque ideò vim centripetam agentem in plano illo ad centrum O juxtà lineam PO dirigi.

De Motu Corporum.

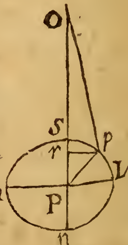


480. Lem. Si linea recta A B projiciatur in planum F H e b d, projectio est linea recta a b, quæ est ad lineam A B, ut cosinus anguli inclinationis B G b, ad sinum totum. Nam si ex punctis A, B, demittantur ad planum F H e b d, perpendicula duo A a, B b, patet planum a A B b, esse ad planum F H e b d normale, adeoque perpendicula omnia ex singulis lineæ A B punctis demissa, cadere in lineam rectam a b, quæ est communis intersectio planorum F H e b d, a A B b. Q. E. 1um. Porrò productis B A, b a ut sibi occurrant in G, ob parallelas A a, B b, erit a b ad A B, ut G b ad G B, id est, ut sinus anguli G B b sive Cosinus anguli inclinationis B G b, ad sinum totum. Q. E. 2um.

481. Coroll. Si linea projicienda, plano in quod projicitur parallela fuerit projectio erit linea recta lineæ projiciendæ æqualis & parallela; Nam in hoc casu angulus inclinationis nullus est, & ejus cosinus fit radius. Hinc si linea E D, ad rectam A B perpendicularis, fuerit plano F H e b d, parallela, projectio illius e d, erit ipsi E D æqualis.

482. Lem. Iisdem positis, si in plano D F H E B A, centro C, radio C D, describatur circulus D A E B, illius in planum F H e b d projectio d a e b, erit ellipsis cujus major axis d e æqualis erit diametro circuli D E, & ad minorem axem a b, rationem habebit sinûs totius ad cosinum anguli B G b, inclinationis planorum. Agatur enim P M ordinatim ad diametrum circuli D E, & projiciatur in rectam P m, erit $dp = DP$, & $pe = PE$ (481.) atque p m ad P M, ut sinus anguli P M m, seu anguli A B b, ad sinum totum (480) hoc est, ut a b, ad A B seu d e, adeoque $pm^2 : PM^2 = ab^2 : de^2$, sed ex naturâ circuli $PM^2 = DP \times PE = dp \times pe$, Ergo $pm^2 : dp \times pe = ab^2 : de^2$. Est igitur a e b d, ellipsis. Cætera patent per Lemma superius & ejus coroll.

483. Lem. Sint ellipseos datæ L S m n axes L m, S n, centrum P, O punctum in axe n S producto datum, p punctum perimetri non datum. Datâ areâ trianguli OpP, dabitur perpendiculum p r, ex puncto p, ad trianguli basim datam P O demissum & hinc ex naturâ ellipseos dabitur r P, atque ob angulum rectum ad r, dabitur P p, & indè punctum p in perimetro cum angulo O P p, & positione rectæ O p.



484.

484. Lem. Superficies curva B A T K L, deſcribatur revolutione curvæ B A K circà axem ſuum immobilem O C, & ſingula curvæ illius puncta B, A circulos B Q L, ATD deſcribent; cum curva B A K pervenit ad ſitum F T K, & punctum A ad T, agantur recta G T H curvam F T K tangens in T & axem ſecans in G, ac recta v T t circulum A T D tangens in eodem puncto T, ſitque G T H, in plano curvæ O F K, & v T t, in plano circuli A T D. Manifeſtum eſt planum quod ſuperficiem curvam B A T K L tangit in T, convenire cum plano in quo ſunt rectæ G T H, v T t; & ſi fuerit O centrum circuli B F Q L, & ducatur radius O F tangenti G T occurrens in H, angulum G H O fore æqualem angulo inclinationis plani circuli B Q L O, ad planum quod ſuperficiem curvam tangit in T; Ducto autem circuli A T D radio T N, fore angulum G T N, æqualem angulo inclinationis G H O.

485. Coroll. 1. Iiſdem poſitis, ſi centro T, radio quam minimo T t, circellus in ſuperficie curvâ B A T L deſcribatur, circellus ille evaneſcens erit in plano ſuperficiem curvam tangente in T, adeóque angulus inclinationis plani BOLQ, ad planum circelli evaneſcentis productum, æqualis erit angulo G T N, (484).

486. Coroll. 2. Si circellus radio T t deſcriptus projiciatur in planum B O L Q, illius projectio l s m n, erit ellipſis (482) cujus axis major l m æqualis eſt & parallelus circelli diametro v T t, quæ pars eſt evaneſcens circuli A T D, axis minor s n pars radii O F, & l m erit ad s n ut T G ad T N. Eſt enim circuli peripheria A T D adeóque & pars illius v T t, plano B F L O parallela; Quarè (481) diametri v T t projectio m l, erit linea parallela & æqualis ipſi v t; erit quoque l m, ad radium O P F normalis, ob v t ad T N perpendicularem, proindeque axis minor ellipſeos s n erit pars radii O F; Eſt autem (482) l m ad s n, ut ſinus totus ad coſinum anguli inclinationis planorum GHO, ſeu GTN, (484) hoc eſt, ut T G ad T N, ob angulum T N G rectum.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO LVI. PROBLEMA XXXVII.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, datisque tum lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum superficie curvâ cujus axis per centrum illud transit; invenienda est trajectoria quam corpus in eâdem superficie describet, de loco dato, datâ cum velocitate, versus plagam in superficie illâ datam egressum.

Stantibus quæ in superiore propositione constructa sunt, exeat corpus *T* de loco dato *S* secundum rectam positione datam in trajectoriam inveniendam *STR*, cujus vestigium in plano *BDO* sit *AP*. Et ex datâ corporis velocitate in altitudine *SC*, (°) dabitur ejus velocitas in aliâ quâvis altitudine *TC*. Eâ cum velocitate dato tempore quam minimo describat corpus trajectoriæ suæ particulam *Tt*, sitque *Pp* vestigium ejus in plano *AOP* descriptum. Jungatur *Op*, & circelli centro *T* intervallo *Tt* in superficie curva descripti vestigium in plano *AOP* sit ellipsis *pQ*. Et ob

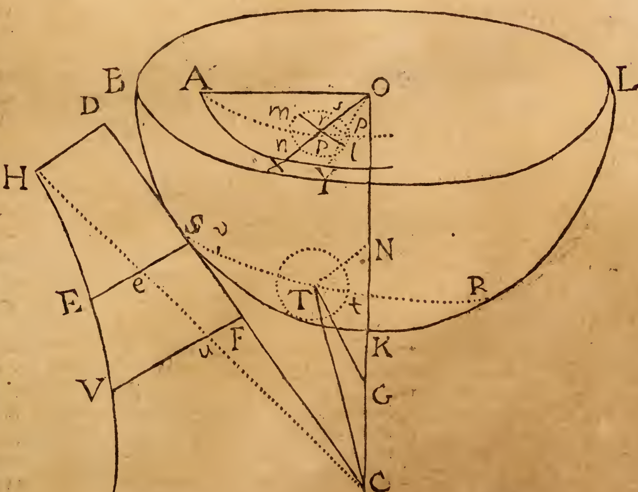
(°) * *Dabitur ejus velocitas in aliâ &c.* Nam (per prop. 40.) velocitas corporis in altitudine TC, æqualis est velocitati quam corpus haberet ad eandem altitudinem in lineâ rectâ SC, si de loco S, rectâ fuisset versus C projectum cum eâdem velocitate quâ trajectoriam STR incipit describere in S; sed datâ in loco S velocitate corporis per lineam SC versus centrum C projecti, datur illius velocitas in alio quovis loco lineæ SC, (per cor. 2. prop. 39.). Ergo ex datâ corporis velocitate in altitudine SC, dabitur ejus velocitas in aliâ quâvis altitudine TC.

(p) ob datum magnitudine circellum Tt, datamque ejus ab axe CO distantiam TN vel PO, dabitur ellipsis illa pQ specie & magnitudine, ut & positione ad rectam PO. Cumque (q) area POp sit tempori proportionalis, atque ideo ex dato tempore detur, dabitur angulus POp. Et inde dabitur ellipseos & rectæ Op intersectio communis p, unà cum angulo OPp in quo trajectoriæ vestigium APp secat lineam OP. (r) Inde verò (conferendo prop. XLI. cum corol. suo 2.) ratio determinandi curvam APp facile apparet. Tum ex singulis vestigiis punctis P, erigendo ad planum AOP perpendicula PT superficiei curvæ occurrentia in T, dabuntur singula trajectoriæ puncta T. *Q. E. I.*

(p) * *Et ob datum magnitudine circellum &c.* Nam datis velocitate & tempore quibus uniformiter describitur spatium nascens T t, datur spatium illud T t, seu radius circelli (5). Præterea datâ altitudine T C, datur tum planum ad axem C O perpendiculare in quo circelli centrum positum est, tum angulus inclinationis plani quod in puncto T curvam superficiem B S T D tangit (484) ad planum B O D P, adeòque datur angulus inclinationis plani in quo est circellus nascens ad planum B O D P (485), undè (482. 486.) ellipsis P p q, in quam circellus projicitur dabitur specie & magnitudine ut & positione ad rectam P O.

(q) * *Cumque area P O p, sit tempori* quo describitur *proportionalis* (prop. 55.) eodemque tempore quo circelli radius T t describatur, ex hoc tempore dato datur, atque adeò dabitur angulus P O p, & indè dabitur ellipseos & rectæ O p intersectio communis p, unà cum angulo O P p (483).

(r) 487. *Indè verò &c.* Sit D locus in rectâ C S productâ, de quo corpus vi centripetâ ad C tendente cadendo acquirit in loco S velocitatem cum quâ trajectoriam S T R incipit describere. In linea C S, capiatur C F = C T, & per puncta F, S, D, erigantur ad C D perpendicula F V, S E, D H vi centripetæ in illis locis proportionalia, sitque H E V linea quam punctum V perpetuò tangit. Per punctum T, agatur T G, quæ curvam cujus revolutione describitur superficies B S T K L, tangat in T; sitque eadem T G in curvæ illius plano, & producta, axi O C occurrat in G; velocitates in locis S, & T, seu F, erunt ut $\sqrt{DHES}$, & $\sqrt{DHVF}$. (Per 1am. partem



prop. 39.) Et quoniam area P O p, ſeu $\frac{PO \times pr}{2}$ eſt ut tempus quo deſcribitur T t ſive P l, erit P l, ut $PO \times pr \sqrt{DHVF}$ hoc eſt, ſpatium uniformiter deſcriptum ut velocitas & tempus conjunctim (5). Quarè ſi detur quantitas B erit $Pl = B \times PO \times pr \times \sqrt{DHVF}$. Eſt autem P l ſemiaxis tranſverſus ellipſeos ad P s ſemiaxem conjugatum ut T G ad T N ſeu P O (486) quarè erit $Ps = \frac{B \times PO^2 \times pr \times \sqrt{DHVF}}{TG}$; ſed ex naturâ ellipſeos $Pl^2 : Ps^2 (= TG^2 : PO^2) = pr^2 : nr \times rs$ ſeu $Ps^2 - Pr^2$, atque adeò $PO^2 \times pr^2 = TG^2 \times Ps^2 - TG^2 \times Pr^2$; & hinc $Pr^2 = Ps^2 - \frac{PO^2 \times pr^2}{TG^2} = \frac{B^2 \times PO^4 \times pr^2 \times DHVF - PO^2 \times pr^2}{TG^2}$, proindèque $Pr = \frac{PO \times pr \times \sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}{TG}$, & $pr = \frac{TG \times Pr}{PO \sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$. Quarè $\frac{PO \times pr}{2} = POp = \frac{TG \times Pr}{2\sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$. Centro O & radio O A, deſcribatur circuli arcus A X Y, & producantur O P, O p, ut arcui huic occurrant in X & Y, erit $PO : OX$ ſeu $AO = pr : XY = \frac{AO \times pr}{PO}$, & hinc area O X Y $\left(\text{ſive } \frac{AO \times XY}{2}\right) = \frac{AO^2 \times pr}{2PO} = \frac{AO^2 \times TG \times Pr}{2PO^2 \sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$. Itaque ſi in recta d c, ad AO perpendiculari capiantur $db = \frac{TG}{2\sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$ & $dc = \frac{AO^2 \times TG}{2PO^2 \sqrt{B^2 \times PO^2 \times DHVF - 1}}$, & deſcribantur lineæ curvæ a b z, a c x, quas puncta b, c, perpetuò tangunt, deque puncto A, ad lineam A O, erigatur perpendiculum A a, ponendo $dO = PO$, patet fore areas A a b d, A a c d, areis A P O, A X O, æquales &c., (ut in prop. 41.)

488. Quantitas conſtans B, quam in ſuperioribus æquationibus uſurpavimus, facilè determinatur. Nam datâ directione corporis trajectoriam S T R, (vid. fig. not. 487.) deſcribere incipientis, datur illius projectio A Q, quæ ut patet, eſt tangens veſtigii A P p in A, quâ veſtigium A P p incipit deſcribi; projecto in tan-

gentem A Q spatio quod corpus in S dato tempore describeret secundum directionem suam in S, sit O Q perpendiculum ex centro O, in tangentem A Q, demissum, velocitas in S ad velocitatem in A ut O Q, ad C quantitatem datam, & ductâ O f, sit area A O f descripta eodem tempusculo quo area nascens O P p & arcus nascentes T t, S v trajectoriæ S T R describuntur, & quoniam velocitates uniformes sunt ut spatia eodem tempore percursa, erit S v : A f = Q O : C, & demisso ex puncto f, ad A O perpendiculo f h, erit etiam A f : f h = A O : Q O. Unde ex æquo, S v : f h = A O : C, sed (ex dem. 487.) Tt = Pl = $B \times PO \times pr \times \sqrt{DHVF}$, adeoque in loco S, $Sv = B \times AO \times fh \times \sqrt{DHES}$, ergo $Sv : fh = B \times AO \times \sqrt{DHES} : 1 = AO : C$, proindèque $B = \frac{1}{C\sqrt{DHES}}$, & $B^2 = \frac{1}{CC \times DHES}$. Quo valore in superioribus æquationibus (487) substituto, invenitur $POp = \frac{C \times TG \times Pr \times \sqrt{DHES}}{2\sqrt{PO^2 \times DHVF - CC \times DHES}}$ & $OXY = \frac{C \times AO^2 \times TG \times Pr \times \sqrt{DHES}}{2PO^2 \times \sqrt{PO^2 \times DHVF - CC \times DHES}}$.

Harum formularum ope, nullâ ampliùs habitâ ratione circelli ejusque projectionis ellipseos, describi potest vestigium A P p, & ex dato tempore inveniri locus P, (ut in prop. 41). Cum autem trajectoria S T R, sit linea duplicis curvaturæ ad promovendam difficilem theoriam motuum in superficiebus curvis quam hic aperuit Newtonus non parum adjumenti conferre poterit tractatus quem de lineis duplicis curvaturæ an. 1731. Parisiis edidit Clarissimus Geometra D. Clairaut. Horum motuum in conoide parabolico, cono, & cylindro exempla dabimus.

489. Exemplum 1. Sit (vid fig. not. 487). curva B S K parabola cujus latus rectum $= l$, dicatur A O $= r$, K C $= a$, D C $= b$, T N, seu P O $= x$, & proindè P r $= dx$, erit ex naturâ parabolæ, $NK = \frac{x^2}{l}$, $NG = \frac{2x^2}{l}$, adeóque $TG^2 = \frac{4x^4 + llxx}{ll}$, & $TG = \frac{x\sqrt{4xx + ll}}{l}$; quarè si in superioribus formulis (488) ponatur $C \times \sqrt{DHES} = pp$, erit $POp = \frac{p^2 x dx \sqrt{4xx + ll}}{2l\sqrt{x^2 \times DHVF - p^4}}$, & $OXY = \frac{p^2 r^2 dx \sqrt{4xx + ll}}{2lxx\sqrt{x^2 \times DHVF - p^4}}$. Sit vis centripeta ut distantia à centro C directè, hoc est, in loco quovis T, vel F sit ut T C seu F C, & curva H E V in rectam H e v C mutabitur, & positâ D H $= q$, erit D C (b) : F C seu T C $=$ D H (q) : F u $= \frac{q \times TC}{b}$. Quarè cum sit area D H u F $=$ D H C $-$ F u C $= \frac{1}{2}qb - \frac{1}{2}FC \times Fu$, erit $DHuF = \frac{qbb - q \times TC^2}{2b}$. Est autem $TC^2 = TN^2 + NC^2 = xx + \overline{\frac{xx}{l} + a}^2 = \frac{x^4 + llxx + 2alxx + llaa}{ll}$. Ergò area DHuF $= \frac{qllbb - qx^4 - qllx^2 - 2qalx^2 - qlla^2}{2bll}$; Si itaque hic valor loco D H V F, in superioribus æquationibus substituatur, erit

DE MOTU CORPORUM.

erit $OPp = \frac{p^2 x dx \sqrt{4bxx + bll}}{\sqrt{2qllbbx^2 - 2qx^6 - 2qllx^4 - 4qalx^4 - 2qla^2x^2 - 4bl^2p^4}}$

& $OXY = \frac{p^2 r^2 dx \sqrt{4bxx + bll}}{x\sqrt{2ql^2bx^2 - 2qx^6 - 2ql^2x^4 - 4qalx^4 - 2ql^2a^2x^2 - 4bl^2p^4}}$.

Si igitur ordinatæ d b, d c, dicantur y, z, æquationes ad curvas a b, a c, (vid. fig. 2. not. 487.) erunt

$$yy = \frac{4bp^4x^4 + bp^4llxx}{2ql^2b^2x^2 - 2qx^6 - 2qllx^4 - 4qalx^4 - 2qlla^2x^2 - 4bl^2p^4}$$

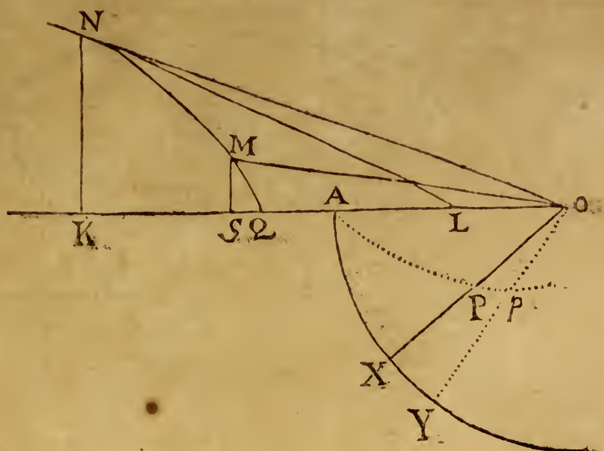
$$\& \ zz = \frac{4bp^4r^4xx + bp^4r^4ll}{2qllbbx^4 - 2qx^8 - 2qllx^6 - 4qalx^6 - 2ql^2a^2x^4 - 4bl^2p^4x^2}.$$

490. Exemplum 2. Sit A T G L, superficies coni recti cujus vertex G, axis G O, basis A X L O, & corpus de loco A egressum moveatur in trajectoriâ ATR, vis centripeta constans sit & juxta directionem axi O G parallelam semper agat, illamque in locis D, A, F, seu T, exponant rectæ D Q, A E, F V æquales & ad rectam D F axi parallelam perpendiculares, erit punctum V in lineâ rectâ H E V, ipsi D F parallelâ. Sit D locus de quo corpus cadere debet ut habeat in loco A velocitatem cum quâ trajectoriam A T R incipit describere, & ex puncto T, ducatur T G, superficiem conicam tangens in T, & T N = O P ad axem G O perpendicularis. Sit $HD = a$, $DA = b$, $OG = e$, $AG = f$, $AO = r$, $PO = TN = x$, $pr = dx$, erit (ex naturâ coni) $AO\,(r) : AG\,(f) = TN\,(x) : TG\,\left(\frac{fx}{r}\right)$. Et $AO\,(r) : OG\,(e) = TN\,(x) : NG\,\left(\frac{ex}{r}\right)$. Undè $ON = OG - GN = \frac{er - ex}{r}$, & $DF = DA + ON = \frac{rb + er - ex}{r} = \frac{hr - ex}{r}$ ponendo $b + e = h$. Quarè area DHEA $= ab$, & $DHVF = \frac{rha - aex}{r}$. Et hinc per formulas (488) $OPp = \frac{Cfxdx\sqrt{ab}}{2r\sqrt{haxx - qx^3 - CCab}}$, ponendo $\frac{ae}{r} = q$, & $OXY = \frac{Crfdx\sqrt{ab}}{2x\sqrt{haxx - qx^3 - CCab}}$, undè facilè inveniuntur æquationes ad curvas AB, A C, ut in exemplo 1°.

491.

491. Exemplum 3um. Tendat vis centripeta ad coni verticem G, & in triplicatâ ratione diſtantiarum ab illo puncto G decreſcat, ſitque H E V curva ad quam terminantur perpendicula D H, A E, F V vim centripetam in locis ſingulis D, A, F, vel T, exhibentia, cætera verò maneant ut in exemplo ſuperiori. Quoniam $TG = \frac{fx}{r}$ erit vis centripeta in loco T vel F ut $\frac{r^3}{f^3 x^3}$, adeóque ſi fuerit n quantitas data, vis centripetâ ſupponi poterit $= \frac{n^4}{x^3}$. Sit $DG = m$, & erit (431) area $DHVF = \frac{n^4(mm-xx)}{mmxx} = \frac{kkmm-kkxx}{xx}$, ponendo $\frac{n^4}{mm} = kk$. Quarè ſi dicatur area $DHEA = pp$, erit $POp = \frac{Cpfxdx}{2r\sqrt{kkmm-kkxx-llpp}} = \frac{qxdx}{\sqrt{hh-xx}}$ ponendo $kkmm-CCpp = kkhh$, & $\frac{Cpf}{2rk} = q$. Similiter invenietur $OXY = \frac{rrqdx}{x\sqrt{hh-xx}}$. Quoniam autem creſcentibus areis A P O, A X O, decreſcit P O, ſeu x, ſcribendum eſt $OPp = \frac{-qxdx}{\sqrt{hh-xx}}$ & $OXY = \frac{-rrqdx}{x\sqrt{hh-xx}}$. Fiat $\sqrt{hh-xx} = z$, & erit $hh-xx = zz$ & $-xdx = zdz$, & $POp = qdz$, ſumptiſque fluentibus & additâ conſtanti Q, erit $APO = qz + Q = q\sqrt{hh-xx} + Q$. Porrò area A P O evaneſcit ubi P O, ſeu $x = AO = r$, quarè $0 = q\sqrt{hh-rr} + Q$, & hinc $Q = -q\sqrt{hh-rr}$, proindeque $APO = q\sqrt{hh-xx} - q\sqrt{hh-rr}$. Ex dato igitur tempore quo corpus deſcribit AT, geometricè invenitur longitudo lineæ P O. Ponatur nunc $x = \frac{hh}{y}$ & erit $-dx = \frac{hhdy}{yy}$, $hh-xx = \frac{hhyy-h^4}{y^2}$, $\sqrt{hh-xx} = \frac{h\sqrt{y^2-h^2}}{y}$ atque adeò $OXY = \frac{-rrqdx}{x\sqrt{hh-xx}} = \frac{rrqdy}{h\sqrt{y^2-h^2}}$. Sit $\frac{rrq}{hh} = \frac{1}{2}s$, & erit $OXY = \frac{1}{2}\frac{shdv}{\sqrt{yy-hh}}$. Unde habetur conſtructio ſequens.

DE MOTU CORPORUM.



Centro O; ſemiaxe tranſverſo OAQ $= h$, ſemiaxe conjugato $= s$, deſcribatur hyperbola QMN, ex illius perimetri puncto quovis N, demittatur ad axem OQ, perpendiculum NK, & abſciſſa OK dicatur y, ductâque rectâ NL, quæ hyperbolam tangat in N, & axi occurrat in L, erit (ex conic.) OK (y) : OQ (h) $=$ OQ (h) : OL $= \frac{hh}{y} = x$, & ſector hyperbolicus ONQ $=$ S. $\frac{1}{2}\frac{shdy}{\sqrt{hy-hh}}$ (427) atque adeò AXO $=$ ONQ $+ Q$ conſtante. Si ponatur x, ſeu $\frac{hh}{y} =$ OA $= r$, hoc eſt $y = \frac{hh}{r}$ evaneſcet area AXO, quare ſi capiatur OS $= \frac{hh}{r}$ & ad axem erigatur perpendiculum SM, hyperbolæ occurrens in M, jungaturque OM, erit $o =$ OMQ $+ Q$, & $Q = -$ OMQ, undè AXO $=$ ONQ $-$ OMQ $=$ ONM. Sumatur itaque ſector circuli OAX $=$ ſectori hyperbolico ONM, & in radio OX capiatur OP $=$ OL, erit P punctum in veſtigio ſeu curvâ APp. Hinc ſi ex dato tempore quæratur locus T (vid. fig. ſuper.) in trajectoriâ TR, inveniatur primum longitudo OP, ſeu OL, tum agatur LN tangens hyperbolam in puncto aliquo N; Deindè capiatur ſector circularis AXO $=$ ſectori hyperbolico ONM, & in radio OX, capiatur OP $=$ OL, ac tandem ex puncto P, erigatur ad planum AOP (vid. fig. ſuper.) perpendiculum PT, quòd ſuperficiei conicæ occurret in loco quæſito T.

Exempl. 4. Moveatur corpus de loco A per trajectoriam ATR, in ſuperficie concavâ cylindri recti AKGL, in quo ſit baſeos centrum O, manifeſtum eſt veſtigium trajectoriæ ATR, coincidere cum baſeos peripheriâ circulari APL, quam proindè punctum P, æquabili velocitate deſcribet (per prop. 56.) Sit vis centripeta conſtans & per lineas lateri cylindri AK parallelas ſemper agat, dicanturque HD $= a$, DA $= b$, AF $=$ PT $= y$, mt $= dy$, arcus AP $= x$, Pp $=$ Tm $= dx$, Tt $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$, erit area DHEA $= ab$, area DHVF $= ab + ay$, velocitas in F vel T $= \sqrt{ab + ay}$, undè tempuſculum quo deſcribitur naſcens Tt vel Pp erit $= \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{ab + ay}}$. Et ſit data velocitas quâ punctum P deſcribit circulum APL dicaturque c erit tempuſculum quo deſcribitur Pp $= \frac{\text{Pp}}{c} = \frac{dx}{c}$; quarè $\frac{dx}{c} = \frac{\sqrt{dx^2}}{}$

$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{ab + ay}}$, & $\frac{dx^2}{cc} = \frac{dx^2 + dy^2}{ab + ay}$, & $abdx^2 + aydx^2 - ccdx^2 = ccdy^2$, & $dx = \frac{cdy}{\sqrt{ab - cc + ay}} = \frac{cdy}{\sqrt{aq + ay}}$, ponendo $ab - cc = aq$. fiat jam $\sqrt{q + y} = z$, $q + y = zz$, $dy = 2zdz$, $\sqrt{aq + ay} = z\sqrt{a}$ erit $dx = \frac{2czdz}{z\sqrt{a}} = \frac{2c}{\sqrt{a}} \times dz$, & sumptis fluentibus additâ constanti Q, erit $x = \frac{2cz}{\sqrt{a}} + Q = \frac{2c\sqrt{q + y}}{\sqrt{a}} + Q$. Ponatur $y = o$, erit etiam $x = o$, adeòque $o = \frac{2c\sqrt{q}}{a} + Q$, & $Q = -\sqrt{\frac{4ccq}{a}}$, undè $x = \sqrt{\frac{4ccq + 4ccy}{a}} - \sqrt{\frac{4ccq}{a}}$. Sit $\frac{4cc}{a} = p$, & $\frac{4ccq}{a} = nn$, erit $x = \sqrt{nn + py} - n$, $xx + 2nx = py$, $y = \frac{xx + 2nx}{p}$. Concessâ igitur quadraturâ circuli facilè invenitur trajectoriæ ATR punctum quodvis T capiendo perpendiculum PT ad arcum AP, ut est AP$+ 2n$ ad p. Ex tempore autem dato datur arcus AP. Si corporis de loco A egredientis velocitas eadem sit ac velocitas puncti P in plano baseos APLO revolventis erit $cc = ab$, & quoniam supposuimus $ab - cc = aq$, esset $q = o$, & proindè $nn = \frac{4ccq}{a} = o$, atque hinc $y = \frac{xx}{q}$, seu $p : x = x : y$. Sive scribendo loco p ejus valorem $\frac{4cc}{a}$, in quo loco cc ponatur ab, erit $4b : x = x : y$, hoc est, 4DA ad arcum AP ut is AP ad PT.

De Motu Corporum.

SECTIO XI.

De motu corporum viribus centripetis se mutuo petentium.

Hactenus exposui motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum naturâ. Attractiones enim fieri solent ad corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones semper mutuæ sunt & æquales, per legem tertiam: adeo ut neque attrahens possit quiescere neque attractum, si duo sint corpora, sed (ſ) ambo (per legum corollarium quartum) quasi attractione mutuâ, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & si plura sint corpora, quæ vel ab unico attrahantur, & idem attrahant, vel omnia se mutuo attrahant; hæc ita inter se moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quiescat, vel uniformiter moveatur in directum. Quâ de causâ jam pergo motum exponere corporum se mutuo trahentium, considerando vires centripetas tanquam attractiones, quamvis fortasse, si physicè loquamur, verius dicantur impulsus. In mathematicis enim jam versamur; & propterea, missis disputationibus physicis, familiari utimur sermone, quo possimus à lectoribus mathematicis facilius intelligi.

PROPOSITIO LVII. THEOREMA XX.

Corpora (t) *duo se invicem trahentia describunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum se mutuò, figuras similes.*

Sunt (u) enim distantiæ corporum à communi gravitatis centro

(ſ) * *Sed ambo (per leg. corol. 4.) quasi attractione mutuâ* vel ad se invicem rectâ lineâ ferantur, vel, si ambo vi impressâ obliquè projiciuntur, *circum gravitatis centrum commune quiescens aut uniformiter progrediens revolvantur.*

(t) * *Corpora duo.* Si corpora duo S, P se invicem trahentia revolvantur circà commune gravitatis centrum C, pergendo de S ad T & de P ad Q, similes sunt hæ figuræ quatuor, nimirum PQC, STC, quas corpora S & T circa commune gravitatis centrum C describunt, tum figura PQT quam corpus P describit circa corpus S spectatum tanquam immotum, & figura πTQ, quam S circà P similiter spectatum describit.

(u) * *Sunt enim distantiæ corporum à communi gravitatis centro* QC, CT *reciprocè proportionales corporibus datis* P, S

(60)

tro reciprocè proportionales corporibus, atque ideo in datâ ratione ad invicem, & componendo in datâ ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ distantiæ circum terminum suum communem æquali motu angulari, propterea quod in directum semper jacentes non mutant inclinationem ad se mutuò. Lineæ autem rectæ, quæ sunt in datâ ratione ad invicem, & æquali

(60) *atque ideò in datâ ratione ad invicem, & componendo*, Q C est ad Q T in datâ ratione corporis S ad summam corporum S + P. *Feruntur autem distantiæ* Q C, T C, *circa centrum C terminum suum communem æquali motu angulari*, id est, angulus Q C P est semper æqualis angulo T C S proptereà quod distantiæ QC, TC in directum semper jacent (60). Quarè (112) duæ figuræ P Q C, S T C similes sunt. Quod erat primum.

Agatur per T recta Tp lineæ S P æqualis & parallela, & si corpus S tanquam immotum spectetur, motus corporis P quod in Q pervenit idem erit respectu corporis S seu T, ac si corpus P de loco p translatum esset in locum Q, eritque Q T ad T p seu S P, ut Q C ad C P, & angulus Q T p = Q C P unde figura P Q circà punctum S ut immotum spectatum à corpore P descripta erit similis figuræ P Q C ideoque & figuræ S T C, simili ratiocinio ostendetur figuram π T Q circa punctum P immotum à corpore S descriptam, esse similem figuræ S T C ideoque & figuræ P Q C. Quod erat alterum.

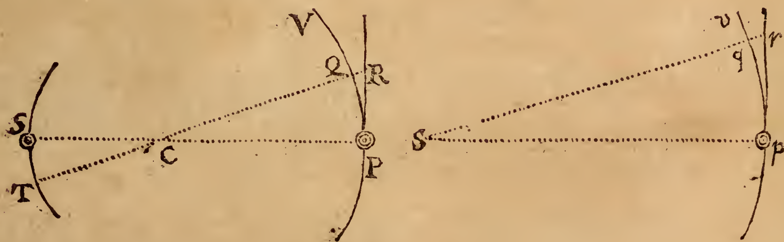
Quod forte facilius adhuc intelligetur, si ponamus in corpore S spectatorem qui se & lineam S P tanquam immota habeat, in hâc enim hypothesi, ubi corpus S pervenerit in locum T, linea S P, quæ tanquam immota spectatur erit T p ipsi S P æqualis & parallela & spectator in T locatus motum corporis P videbit sub angulo Q T p = Q C P, & ad distantiam T Q. Cum igitur sit semper Q C ad C P, ut Q T ad S P, seu T p, & angulus Q C P, æqualis angulo Q T p, figura p Q T, similis erit figuræ P Q C, adeóque & figuræ S T C. Pariter si per Q agatur Q π æqualis & parallela P S liquet figuram π T Q quam S circa P spectatum tanquam immotum describit esse similem & æqualem figuræ p Q T quam corpus P, circa S, spectatum tanquam immotum describit. Patet etiam harum omnium figurarum partes similes eodem tempore describi, ideoque etiam totas figuras æqualibus temporibus percurri.

De Motu Corporum. æquali motu angulari circum terminos ſuos feruntur, figuras circum eoſdem terminos in planis, quæ unà cum his terminis vel quieſcunt, vel (a) motu quovis non angulari moventur, deſcribunt omninò ſimiles. Proinde ſimiles ſunt figuræ, quæ his diſtantiis circumactis deſcribuntur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LVIII. THEOREMA XXI.

Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuo trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod figuris, quas corpora ſic mota deſcribunt circum ſe mutuò, poteſt figura ſimilis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iiſdem deſcribi.

Revolvantur corpora S, P circa commune gravitatis centrum C, pergendo de S ad T, deque P ad Q. A dato puncto s ipſis SP, TQ æquales & parallelæ ducantur



ſemper sp, sq; & curva pqv, quam punctum p revolvendo circum punctum immotum s deſcribit, (b) erit ſimilis & æqualis curvis, quas corpora S, P deſcribunt circum ſe mutuò: proindeque (per theor. xx.) ſimilis curvis ST & PQV, quas eadem corpora deſcribunt circum commune gravitatis centrum C: idque quia proportiones linearum SC, CP, & SP vel sp ad invicem dantur.

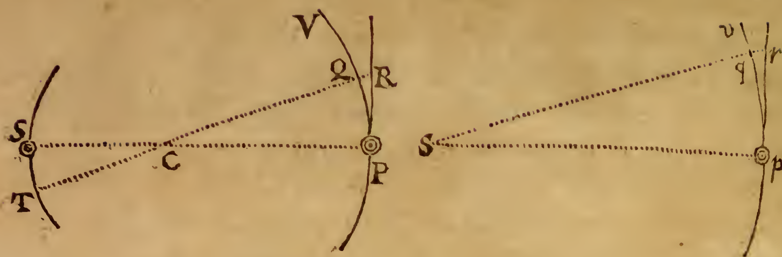
Caſ.

(a) * *Motu quovis non angulari.* Vide Legum coroll. 5. & 6.

(b) * *Erit ſimilis & æqualis curvis*, ut patet ex demonſtratione propoſitionis ſuperioris.

Cas. 1. Commune illud gravitatis centrum *C*, per legum corollarium quartum, vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo, quod id quiescit, inque *s* & *p* locentur corpora duo, immobile in *s*, mobile in *p*, corporibus *S* & *P* similia & æqualia. Dein tangant rectæ *PR* & *pr* curvas *PQ* & *pq* in *P* & *p*, & producantur *CQ* & *sq* ad *R* & *r*. Et ob similitudinem figurarum *CPRQ*, *sprq* erit *RQ* ad *rq* ut *CP* ad *sp*, ideoque in datâ ratione. Proinde si vis, quâ corpus *P* versus corpus *S*, atque ideo versus centrum intermedium *C* attrahitur, esset ad vim, quâ corpus *p* versus centrum *s* attrahitur, in eâdem illâ ratione datâ; hæ vires æqualibus temporibus attraherent semper corpora de tangentibus *PR*, *pr* ad arcus *PQ*, *pq* per intervalla ipsis proportionalia *RQ*, *rq*, ideoque vis posterior efficeret, ut corpus *p* gyraretur in curvâ *pqv*, quæ similis esset curvæ *PQV*, in quâ vis prior efficit, ut corpus *P* gyretur; & revolutiones iisdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non sunt ad invicem in ratione *CP* ad *sp*, sed (ob similitudinem & æqualitatem corporum *S* & *s*, *P* & *p*, & æqualitatem distantiarum *SP*, *sp*) sibi mutuò æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus: & propterea, ut corpus posterius *p* trahatur per intervallum majus *rq*, requiritur tempus majus, (c) idque in subduplicatâ ratione intervallorum; propterea quod (per lemma decimum) spatia ipso motus initio descripta sunt in duplicatâ ratione temporum. Ponatur igitur veloci-

(c) *Idque in subduplicatâ ratione intervallorum.* Nascentibus arcubus Pq, PQ tempora quibus describuntur intervalla rq, RQ sunt in subduplicatâ ratione eorumdem intervallorum, per Lem. X. Quarè si velocitates uniformes quibus similes arcus nascentes pq, PQ æqualibus viribus centripetis describuntur, dicantur V, v, tempora T, t, erit $T^2 : t^2 = rq : RQ = sp : CP = pq : PQ$, est verò (5) $V : v = \frac{pq}{T} : \frac{PQ}{t}$ sive ut $\frac{T^2}{T} : \frac{t^2}{t}$, adeóque $V : v = T : t = \sqrt{sp} : \sqrt{CP}$. Itaque corpora P, p, viribus æqualibus semper attracta, circum centra quiescentia C, s, nascentes figuras similes PQ, pq, adeóque & figuras quasvis similes PQV, pqu, describent temporibus & velocitatibus quæ erunt in subduplicatâ ratione distantiarum similium CP, sp. Est autem (ex Dem.) figura pqu, similis & æqualis figuræ quam corpus P, circum corpus mobile S, (spectatum tanquam immotum, ut in propositione superiori exposuimus) describit eodem tempore, quo circà centrum C, describit figuram similem PQV.



locitas corporis p esse ad velocitatem corporis P in subduplicatâ ratione distantiæ sp ad distantiam CP, eo ut temporibus, quæ sint in eâdem subduplicatâ ratione, describantur arcus pq, PQ, qui sunt in ratione integrâ: Et corpora P, p viribus æqualibus semper attracta describent circum centra quiescentia C & s figuras similes PQV, pqv, quarum posterior pqv similis est & æqualis figuræ, quam corpus P circum corpus mobile S describit. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, unà cum spatio in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter in directum; & (per legum corollarium sextum) motus omnes in hoc spatio peragentur ut prius, ideoque corpora describent circum se mutuo figuras easdem ac prius, & propterea figuræ pqv similes & æquales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc corpora duo viribus distantiæ suæ proportionalibus se mutuo trahentia, describunt (per prop. x.) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, ellipses concentricas; & vice versâ, si tales figuræ describuntur, sunt vires (d) distantiæ proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo, viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus, describunt (per prop. XI. XII. XIII.) &

(d) * *Distantiæ proportionales.* Cum enim (ex Dem.) corpus p, circà s, & corpora duo P, S, circà commune gravitatis centrum C, & circum se mutuò figuras similes vi centripetâ æquali describant, sitque (per prop. X.) figura pqv ellipsis cujus centrum S, liquet veritas corollarii.

& circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, sectiones conicas umbilicum habentes in centro, circum quod figuræ describuntur. Et vice versâ, si tales figuræ describuntur, vires centripetæ sunt quadrato distantiæ reciprocè proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad se mutuò ductis, (e) describunt areas temporibus proportionales.

PROPOSITIO LIX. THEOREMA XXII.

Corporum duorum S *&* P, *circa commune gravitatis centrum* C *revolventium, tempus periodicum esse ad tempus periodicum corporis alterutrius* P, *circa alterum immotum* S *gyrantis, & figuris, quæ corpora circum se mutuo describunt, figuram similem & æqualem describentis, in subduplicatâ ratione corporis alterius* S, *ad summam corporum* S+P.

Namque, ex demonstratione superioris propositionis, tempora, quibus arcus quivis similes PQ & pq describuntur, sunt in subduplicatâ ratione distantiarum CP & SP vel sp, hoc est, in subduplicatâ ratione corporis S ad summam corporum $S+P$. Et componendo, summæ temporum quibus arcus omnes similes PQ & pq describuntur, hoc est, tempora tota, quibus figuræ totæ similes describuntur, sunt in eâdem subduplicatâ ratione. *Q. E. D.*

PRO-

(e) * *Describunt areas temporibus proportionales.* Nam tempora quibus describuntur areæ quævis similes s p q, C P Q, & s p u, C P V, sunt semper in datâ ratione, nimirum, subduplicatâ distantiarum similium s p, C P (ex Dem.) & proindè tempus quo describitur area s p q, est ad tempus quo describitur area s p u, ut tempus quo describitur area C P Q, ad tempus quo describitur area C P V; sed (per prop. 1.) tempora quibus describuntur areæ s p q, s p u, sunt areis illis adeòque & areis similibus C P Q, C P V proportionalia, ergò areæ C P Q, C P V sunt ut tempora quibus describuntur; & quoniam areæ quas corpora S, P circum centrum gravitatis describunt similes sunt areis quas iisdem temporibus describunt circum se mutuò, erunt quoque areæ illæ proportionales temporibus quibus describuntur.

PROPOSITIO LX. THEOREMA XXIII.

Si corpora duo S & P, viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus, se mutuò trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod ellipseos, quam corpus alterutrum P hoc motu circa alterum S describit, axis principalis erit ad axem principalem ellipseos, quam corpus idem P circa alterum quiescens S eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum S + P ad primum duorum mediè proportionalium inter hanc summam & corpus illud alterum S.

(f) Nam si descriptæ ellipses essent sibi invicem æquales, tempora periodica (per theorema superius) forent in subduplicatâ ratione corporis S ad summam corporum $S+P$. Minuatur in hâc ratione tempus periodicum in ellipsi posteriore, & tempora periodica evadent æqualia; ellipseos autem axis principalis (per prop. XV.) minuetur in ratione, cujus hæc est sesquiplicatâ, id est in ratione, cujus ratio S ad $S+P$ est triplicatâ; ideoque erit ad axem principalem ellipseos alterius, ut primum duorum mediè proportionalium inter $S+P$ & S ad $S+P$. Et inversè, axis principalis ellipseos circa corpus mobile descriptæ erit ad axem principalem descriptæ circa immobile, ut $S+P$ ad primum duorum mediè proportionalium inter $S+P$ & S. *Q. E. D.*

PRO-

(f) *Nam si descriptæ ellipses &c.* Axis principalis ellipsium æqualium, quas corpora S, P circum se mutuò describunt (ut ad prop. 57. exposuimus) æqualis est axi principali ellipseos, pqu, quam corpus p vel P, circà corpus s vel S, reverâ immotum describit (ut in prop. 58). Hic axis dicatur A tempus periodicum quod in ellipsibus quatuor quas corpora S, P circum C & circum se mutuò describunt (ut in prop. 57.) idem est, dicatur t, tempus periodicum in ellipsi pqu, quam corpus p, vel P, circà corpus S, vel s, reverâ immotum (ut in prop. 58.) describit dicatur T, sitque X axis principalis ellipseos quam corpus idem P, vel p, circà alterum S vel s reverâ immotum (ut in prop. 58.) describere posset tempore periodico t, erit (per prop. 59.) $T^2 : t^2 = S+P : S$. & (per prop. 15.) $T^2 : t^2 = A^3 : X^3$, quarè $A^3 : X^3 = S+P : S$. Jam si capiantur duæ quantitates B, C mediæ proportionales inter $S+P$ & S, erit $S+P$ ad S in ratione triplicatâ $S+P$, ad B, hoc est $S+P : S = \overline{S+P}^3 : B^3$, ac proindè $A^3 : X^3 = \overline{S+P}^3 : B^3$, ideoque $A : X = S+P : B$. Q. E. D.

PROPOSITIO LXI. THEOREMA XXIV.

Si corpora duo viribus quibusvis se mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita, quomodocunque moveantur, motus eorum perinde se habebunt, ac si non traherent se mutuò, sed utrumque à corpore tertio in communi gravitatis centro constituto viribus iisdem traheretur: Et virium trahentium eadem erit lex respectu distantiæ corporum à centro illo communi atque respectu distantiæ totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora se mutuo trahunt, tendendo ad corpora, (g) tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium; ideoque eædem sunt, ac si à corpore intermedio manarent. *Q. E. D.*

Et quoniam datur ratio distantiæ corporis utriusvis à centro illo communi ad distantiam inter corpora, dabitur ratio cujusvis potestatis distantiæ unius ad eandem potestatem distantiæ alterius; ut ratio quantitatis cujusvis, quæ ex unâ distantiâ & quantitatibus datis utcunque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex alterâ distantiâ, & quantitatibus totidem datis, datamque illam distantiarum rationem ad priores habentibus similiter derivatur. Proinde si vis, quâ corpus unum ab altero trahitur, sit directè vel inversè ut distantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus distantiæ potestas; vel denique ut quantitas quævis ex hâc distantiâ & quantitatibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, quâ corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directè itidem vel inversè ut corporis attracti distantia à centro illo communi, vel ut eadem distantiæ hujus potestas, vel denique ut quantitas ex hâc distantiâ & analogis quantitatibus datis similiter derivata. (h) Hoc est, vis trahentis eadem erit lex respectu distantiæ utriusque. *Q. E. D.*

PRO-

(g) * *Tendunt ad commune gravitatis centrum*, est enim communis intersectio omnium rectarum quæ corpora revolventia jungunt, & secundum quas, vires quibus corpora se mutuò trahunt, diriguntur.

(h) * *Hoc est vis trahentis eadem erit lex &c.* Sit (in fig. prop. 58.) $TQ = x$, $CQ = y$, & x ad y in ratione datâ a ad b, seu $x = \frac{ay}{b}$, vis quâ corpora S, P

in

PROPOSITIO LXII. PROBLEMA XXXVIII.

Corporum duorum, quæ viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus se mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare motus.

Corpora (per theorema novissimum) perinde movebuntur, ac si à corpore tertio in communi gravitatis centro constituto traherentur; & centrum illud ipso motus initio quiescet per hypothesin; & propterea (per legum corol. 4.) semper quiescet. Determinandi sunt igitur motus corporum (per prop. xxv.) perinde ac si à viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum se mutuò trahentium. *Q. E. I.*

PROPOSITIO LXIII. PROBLEMA XXXIX.

Corporum duorum quæ viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus se mutuo trahunt, deque locis datis, secundum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.

(i) Ex datis corporum motibus sub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus spatii, quod unà cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii. Motus autem subsequentes (per legum corollarium quintum, & theorema novissi-

in locis T, Q se mutuò trahunt sit ut x^m, erit $x^m = \frac{a^m y^m}{b^m}$, adeóque eadem vis etiam ut y^m, ob datam rationem a^m, ad b^m, cumque vis quâ corpora se mutuò trahunt æqualis sit vi quâ ad commune gravitatis centrum C urgentur, erit quoque vis ad C tendens ut y^m. Sit nunc vis quâ corpora se mutuò trahunt ut $cx^n + ex^m$, & c, e quantitates datæ, erit $cx^n + ex^m = \frac{ca^n y^n}{b^n} + \frac{ea^m y^m}{b^m}$, ideóque vis ad C tendens ut $\frac{ca^n y^n}{b^n} + \frac{ea^m y^m}{b^m}$.

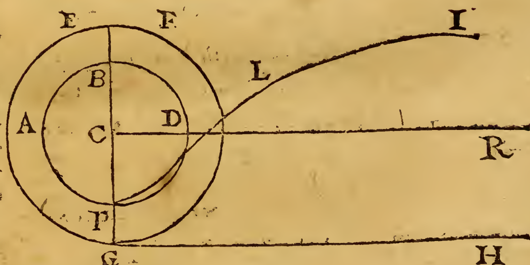
(i) * *Ex datis corporum motibus absolutis sub initio, datur uniformis motus absolutus centri communis gravitatis (67, 68, 69) & hinc datur motus spatii quod unà cum hoc centro & eâdem cum illo celeritate moveretur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii.*

vissimum) perinde fiunt in hoc spatio, ac si spatium ipsum unà cum communi illo gravitatis centro quiesceret, & corpora non traherent se mutuo, sed à corpore tertio sito in centro illo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc spatio mobili, de loco dato secundum datam rectam, datâ cum velocitate exeuntis, & vi centripetâ ad centrum illud tendente correpti, (k) determinandus est motus per problema nonum & vicesimum sextum: & (l) habebitur simul motus corporis alterius circum idem centrum. (m) Cum hoc motu componendus est uniformis ille systematis spatii & corporum in eo gyrantium motus progressivus supra inventus, & habebitur motus absolutus corporum in spatio immobili. *Q. E. I.*

(k) * *Determinandus est motus per probl. 9.* si corpora projiciantur secundùm directionem quæ cum eorum distantia non coincidat, & *per probl. 26.* si coincidat directio projectionis cum distantiâ corporum.

(l) * *Et habebitur simul motus corporis alterius* è regione, si ex corpore cujus locus inventus est, per centrum gravitatis commune duorum, agatur recta quæ ità determinetur ut sit corpus cujus locus quæritur ad corpus aliud ut distantia data hujus à centro gravitatis communi ad eam rectam, in extremo hujus rectæ erit locus corporis quæsitus (60).

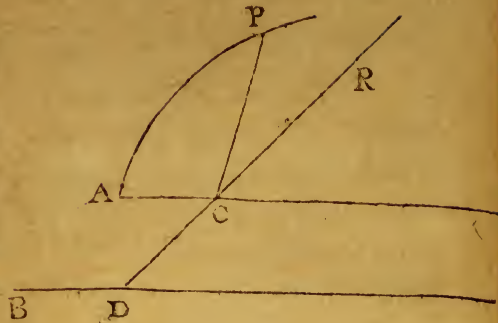
(m) 493. *Cum hoc motu componendus est &c.* In hypothesi hujus problematis, corpora duo circà commune gravitatis centrum ceu umbilicum sectiones conicas describunt (per cor. 2. prop. 58.) & satis est (ex notâ superiori) unius corporis motum determinare. Itaque, exempli gratia, corpus P circulum P A B D uniformiter describat intereà dum circuli centrum C, cum ipsius circuli plano æquabiliter movetur per rectam C R diametro P B perpendicularem, sitque semper circuli planum mobile in plano hujus schematis immoto. In linea C P capiatur C G ad C P in ratione velocitatis centri C per lineam C R progredientis, ad velocitatem corporis P in circuli peripheriâ revolventis, rota G E F centro C & radio C G descripta super regulam G H ad G C normalem progrediatur revolvendo circà axem suum, & punctum P in plano circuli G E F immotum describet intereà trochoidem P L I quæ erit trajectoria quam corpus P motu absoluto describit; (ut patet ex prop 31. & not. 367). Hâc enim ratione centrum C percurret spatium C R = G H = semiperipheria rotæ G E F, eodem tempore quo punctum P revolvetur per totam semiperipheriam P A B; erit que proindè velocitas centri C per lineam C R ad velocitatem puncti vel corporis P in peripheriâ circuli P A B ut semirota ad semicirculum, hoc est, ut radius C G ad radium C P. Hinc si velocitas centri C æqualis sit ve-



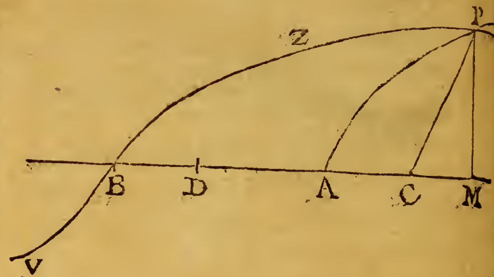
locitati corporis P in circulo suo revolventis, trochois P L I erit cyclois vulgaris; si velocitas centri C major extiterit, erit P L I trochois oblongata, si velocitas centri C minor, erit P L I trochois decurtata.

De Motu Corporum.

Sit nunc AP sectio quævis conica cujus vertex A, umbilicus seu virium & gravitatis commune centrum C, axis transversus AC, centrum C uniformiter moveatur in rectâ DR positione datâ, & cum illo planum curvæ APC, ità transferatur in plano hujus schematis immoto, ut axis AC, rectæ BD, positione datæ sit semper parallelus. Dum corpus P in curvâ AP revolvens est in vertice A, sit C in D & A in B, ex datâ velocitate uniformi centri C in lineâ DR, dabitur spatium DC quod centrum illud C dato tempore describit, nec non positio curvæ AP. capiatur (per prop. 30. vel 31. ejusve scholium) area APC rectæ datæ DC seu tempori proportionalis & obtinebitur locus absolutus corporis P, hoc est, punctum trajectoriæ quam corpus P in plano hujus schematis immoto describit.



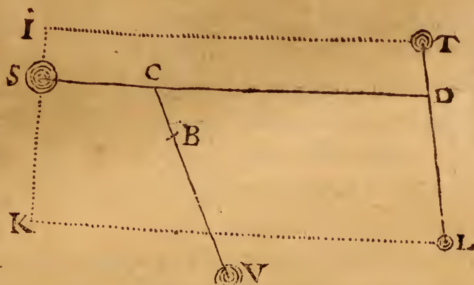
Sit AP parabola, & umbilicus C, cum plano APC uniformi motu progrediatur in axe BC, dum corpus P est in vertice parabolæ A, sit umbilicus C in D & vertex A in B, & trajectoria BZP, quam corpus P, in plano hujus chartæ immoto describit erit parabola secundi generis quæ cubica dici solet. Nam sit AC, seu BD $= p$, & proindè parabolæ AP, latus rectum $= 4p$ (per theor. 2um. de parabola). PM ad axem AB ordinatim applicatâ $= y$, BM $= x$, erit (ex naturâ Parabolæ, per theor. 1um. de Parabolâ) $AM = \frac{yy}{4p}$, adeóque $BA = DC = x - \frac{yy}{4p} = \frac{4px - yy}{4p}$, CM (sive AM − AC) $= \frac{yy - 4pp}{4p}$. Porrò (ex Archimede prop. 17. de quadr. Parab. quæ est theor. 4um. de parabolâ) area $APM = \frac{2}{3} AM \times PM = \frac{2y^3}{12p}$; area trianguli $CPM = \frac{1}{2} CM \times PM = \frac{y^3 - 4ppy}{8p}$; undè area $APC = APM - CPM = \frac{y^3 + 12ppy}{24p}$. Est autem area APC, tempori quo describitur proportionalis, seu ut linea DC vel $BA = \frac{4px - yy}{4p}$, quaré si fuerit $\frac{a}{b}$ quantitas constans, erit $\frac{y^3 + 12ppy}{24p} = \frac{4apx - ayy}{24p}$, hoc est $y^3 + ayy + 12ppy = 4apx$, æquatio ad parabolam cubicam BZP, quæ crura habet contraria BZ, BV in infinitum progredientia.



PRO-

PROPOSITIO LXIV. PROBLEMA XL.

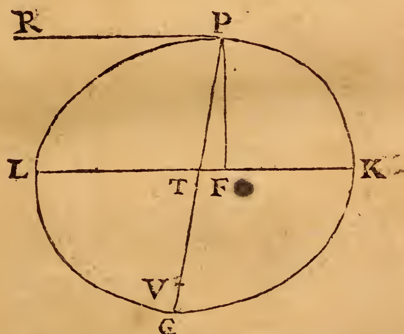
Viribus quibus corpora se mutuo trahunt crescentibus in simplici ratione distantiarum à centris: requiruntur motus plurium corporum inter se.



Ponantur primo corpora duo *T* & *L* commune habentia gravitatis centrum *D*. Describent hæc (per corollarium primum theorematis 21.) ellipses centra habentes in *D*, quarum magnitudo (n) ex problemate v. innotescit.

Trahat jam corpus tertium *S* priora duo *T* & *L* viribus acceleratricibus *ST*, *SL*, & ab ipsis vicissim trahatur. Vis *ST*, (per legum corol. 2.) resolvitur in vires *SD*, *DT*; & vis *SL* in vires *SD*, *DL*. Vires (o) autem *DT*, *DL*, quæ sunt

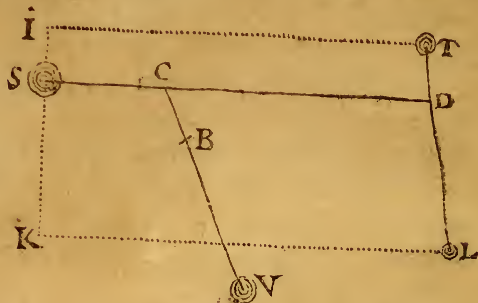
(n) 494. *Ex problemate* 5. *innotescit.* Si enim corpus aliquod de loco dato P exeat cum datâ velocitate & secundum datam directionem PR ut ellipsim PLGK, circà centrum T datum describat, recta PR positione datâ ellipsim tanget in P, ideòque diameter LK, ipsi PR parallela (prop. 32. Lib 1. conic. Appoll. sive Lem. IV. de Conic. & Theor. I. de Ell.) dabitur positione. Prætereà, si ex puncto P ad diametrum LK demittatur perpendiculum PF, erit vis centripeta data quâ corpus versus T urgetur secundum directionem PT ad partem vis illius quæ juxtà directionem PF, agit, ut PT ad PF, proindeque pars illa vis centripetæ dabitur. Datâ autem vi centripetâ juxtà directionem PF urgente, datâque corporis de loco P exeuntis velocitate in lineâ PR, ad PF perpendiculari, dabitur radius circuli ellipsim osculantis in P, quam corpus P cum hâc velocitate atque vi centripetâ potest describere (199.) & hinc dabitur altera diameter conjugata LK, & ellipsis describi poterit (vide Probl. de Ellipsi p. 130).



(o) * *Vires autem DT, DL, quæ sunt ut ipsarum summa TL &c.* Est enim DT ad TL in ratione datâ corporis L ad summam corporum T+L, & DL ad TL, in ratione datâ corporis T ad summam corporum T+L (69); quarè vires DT, DL, in quâcumque positione corporum T & L, sunt ut TL.

De Motu Corporum.

sunt ut ipsarum summa TL, atque ideo ut vires acceleratrices quibus corpora T & L se mutuo trahunt, additæ his viribus corporum T & L, prior priori & posterior posteriori, componunt vires distantiis DT ac DL proportionales, ut prius, sed viribus prioribus majores; ideoque (per corol. 1. prop. x. & corol. 1. & 8. prop. iv.) efficiunt ut corpora illa describant ellipses ut prius, sed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices SD & SD, (p) actionibus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & secundum lineas TI, LK, ipsi DS parallelas, nil mutant situs eorum ad invicem, sed faciunt ut ipsa æqualiter accedant ad lineam IK; quam ductam concipe per medium corporis S, & lineæ DS perpendicularem. Impedietur autem iste ad lineam IK accessus (q) faciendo ut systema corporum T & L ex unâ parte, & corpus S ex alterâ, justis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum C. (r) Tali motu corpus S, eo quod summa virium motricium $SD \times T$ & $SD \times L$, distantiæ CS proportionalium, tendit versus centrum C, describit ellipsin circa idem C;



(p) * *Actionibus motricibus* $SD \times T$, *&* $SD \times L$ (per def. 8. & not. 12.) *quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter* ob æqualem vim acceleratricem SD, ut fit in corporibus gravibus, quæ licet massis inæqualia, vi tamen gravitatis acceleratrice, cadendo æqualiter accelerantur.

(q) * *Faciendo ut systema corporum* T, *&* L, (seu D centrum gravitatis commune ipsorum) *ex unâ parte, & corpus S ex alterâ, justis cum velocitatibus* in dato plano secundum directiones parallelas & contrarias impressis *gyrentur circa C commune gravitatis centrum trium corporum.*

(r) * *Tali motu corpus S &c.* Corpus S à corporibus T & L trahitur viribus quæ sunt inter se ut $ST \times T$ & $SL \times L$ (ex hyp.) & per resolutionem virium corpus S a corporibus T & L versus D & C juxtà directionem SD seu SC trahitur viribus quæ sunt inter se ut $SD \times T$ & $SD \times L$, hoc est, vi quæ est ut $SD \times \overline{T+L}$, adeóque ut SD, ob datam corporum summam $T+L$, & ut CS, ob datam rationem SD ad CS, (61). Corpus idem S juxtà directiones oppositas ipsis DT, DL parallelas, trahitur viribus quæ sunt inter se ut $DT \times T$ & $DL \times L$, hoc est, viribus æqualibus (60) quæ proinde nullam

T; & punctum *D*, ob proportionales *CS*, *CD*, describet ellipsin consimilem è regione. Corpora autem *T* & *L* viribus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, prius priore, posterius posteriore, æqualiter & secundum lineas parallelas *TI* & *LK*, ut dictum est, attracta, pergent (per legum corollarium quintum & sextum) circa centrum mobile *D* ellipses suas describere, ut prius. *Q. E. I.*

Addatur jam corpus quartum *V*, & (ſ) simili argumento concludetur hoc & punctum *C* ellipses circa omnium commune centrum gravitatis *B* describere; manentibus motibus priorum corporum *T*, *L* & *S* circa centra *D* & *C*, sed acceleratis. Et eâdem methodo corpora plura adjungere licebit. *Q. E. I.*

(t) Hæc ita se habent, etsi corpora *T* & *L* trahunt se mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam quibus trahunt corpora reliqua pro ratione distantiarum. Sunto mutuæ omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut distantiæ ductæ in corpora trahentia, & (u) ex præcedentibus facilè deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis ellipses varias, circa omnium commune gravitatis centrum *B*, in plano immobili describunt. *Q. E. I.*

P R O-

lam mutationem producunt. Quarè cum systema corporum T & L, seu ipsorum commune centrum gravitatis D, versus S seu C trahatur quoque vi quæ est ut SD, ac proindè ut CD (61), patet quod corpus S, ex unâ parte, & punctum D ex alterâ describant circum C ellipses consimiles, si justis cum velocitatibus, ut suprà dictum est, projiciantur.

(ſ) * *Simili argumento*, considerando corpora T & L tanquam corpus unicum in centro D positum, *concludetur* &c.

(t) * *Hæc ità se habent.* Nam propositionis demonstratio non supponit vires acceleratrices quibus corpora T & L ad distantiam datam trahunt corpus S, esse æquales viribus acceleratricibus quibus se mutuò ad eandem distantiam trahunt. Undè manet demonstratio, etsi corpus S a corpore v. gr. T ad distantiam datam trahatur majori vel minori vi acceleratrice quam corpus L ad eandem distantiam.

(u) * *Et ex præcedentibus facilè deducetur.* Vis enim seu actio acceleratrix, quâ corpus T versus D trahitur, est (ex Dem. & Hyp.) ut $TL \times L + TD \times S$, hoc est, ut $TD \times \overline{S + T + L}$, ob $TL \times L = TD \times \overline{T + L}$ (60); & vis acceleratrix quâ punctum D versùs C trahitur, est (ex Dem. & Hyp.) ut $SD \times S$, hoc est ut $CS \times S + CD \times S$; sed (61) $CS \times S = CD \times \overline{T + L}$, adeóque vis acceleratrix quâ punctum D versùs C trahitur, est ut $CD \times \overline{T + L + S}$. Quarè vis acceleratrix quâ corpus T versùs D trahitur, est

De Motu Corporum.

PROPOSITIO LXV. THEOREMA XXV.

Corpora plura, quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum ab eorundem centris, moveri posse inter se in ellipsibus; & radiis ad umbilicos ductis areas describere temporibus proportionales quam proximè.

In propositione superiore demonstratus est casus ubi motus plures peraguntur in ellipsibus accuratè. Quo magis recedit lex virium a lege ibi positâ, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri potest, ut corpora, secundum legem hic positam se mutuo trahentia, moveantur in ellipsibus accuratè, nisi servando certam proportionem distantiarum ab invicem. In sequentibus autem casibus non multùm ab ellipsibus errabitur.

Cas. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo distantias revolvi, tendantque ad singula vires absolutæ proportionales iisdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per legum corol. quartum) vel quiescit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva esse, ut corpus maximum nunquam distet sensibiliter ab hoc centro: & maximum illud vel quiescet, vel movebitur uniformiter in directum, sine errore sensibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in ellipsibus, atque radiis ad idem ductis describent areas temporibus proportionales; (y) nisi quâtenus errores inducuntur, vel per errorem maximi

ad vim acceleratricem quâ punctum D trahitur versùs C, ut TD ad CD, hoc est ut distantiæ à punctis ad quæ illæ vires diriguntur. Corpus igitur T ad punctum D, & punctum D ad C trahuntur viribus absolutis æqualibus, hoc est, eodem modo ad sua respectivè centra D & C trahuntur quo traherentur, si circà idem virium centrum ad distantias TD, DC revolverentur, sed in hoc casu æqualibus temporibus periodicis ellipses suas describerent (per cor. 2. prop. X.) ergò & in illo casu corpus T circà D & punctum D circà C, æqualibus temporibus periodicis suas ellipses describunt. Idem eodem modo demonstratur, cùm plura sunt corpora revolventia.

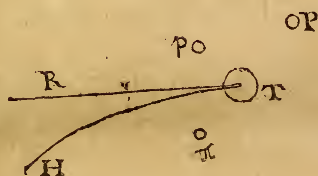
(y) * *Nisi quatenus errores inducuntur &c.* Nam si corpus maximum à communi illo gravitatis centro non erraret, nullaque esset actio minorum corporum in se mutuò, quodlibet exiguum corpus revolveretur in ellipsi circà maximum, atque radiis ad idem ductis describeret areas temporibus proportionales (per cor. 2. & 3. prop. 58.)

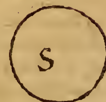
ximi à communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in se mutuo. Diminui autem possunt corpora minora, usque donec error iste, & (z) actiones mutuæ sint datis quibusvis minores; atque ideo donec orbes cum ellipsibus quadrent, & areæ respondeant temporibus, sine errore, qui non sit minor quovis dato. *Q. E. O.* LIBER PRIMUS. PROP. LXV. THEOR. XXV.

Cas. 2. (a) Fingamus jam systema corporum minorum modo jam descripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum se mutuò revolventium corporum systema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longè maximi & ad magnam distantiam siti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora secundum lineas parallelas urgentur, non mutant situs corporum ad invicem, sed ut systema totum, servatis partium motibus inter se, simul transferatur, efficiunt: manifestum est quod, ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorsus orietur mutatio motus attractorum inter se, nisi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem: secundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones

(z) * *Et actiones mutuæ sint datis quibusvis minores* respectu actionis corporis maximi in corpora minora; nam cum corporis vis attractiva absoluta hic supponatur materiæ proportionalis, diminutâ corporis massâ, vis attractiva in eâdem ratione minuitur.

(a) * *Fingamus jam corporum minorum*, P, p, π, *modo jam descripto circà maximum* T *revolventium systema progredi uniformiter in directum*, seu totius systematis commune gravitatis centrum T, progredi uniformiter per rectam TR, & *intereà vi corporis alterius longè maximi* S, & *ad magnam distantiam siti, urgeri ad latus* secundum rectas PS, ps, πS, TS, atque à rectâ TR retrahi & in curvam TH cogi &c.





De Motu Corporum.

nes omnes acceleratrices in corpus maximum esse inter se reciprocè ut quadrata distantiarum; & augendo corporis maximi distantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum differentiæ respectu earum longitudinis & inclinationes ad invicem minores sint, quam datæ quævis; perseverabunt motus partium systematis inter se sine erroribus, qui non sint quibusvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem distantiam, systema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur idem hâc attractione ad modum corporis unius; hoc est, (b) centro suo gravitatis describet circa corpus maximum sectionem aliquam conicam (*viz.* (c) Hyperbolam vel parabolam attractione languidâ, ellipsin fortiore) & radio ad maximum ducto describet areas temporibus proportionales, sine ullis erroribus, nisi quas partium distantiæ, perexiguæ sane & pro lubitu minuendæ, valeant efficere. *Q. E. O.*

Simili argumento pergere licet ad casus magis compositos in infinitum.

Corol. 1. (d) In casu secundo, quo propiùs accedit corpus omnium maximum ad systema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium systematis inter se; propterea quod linearum à corpore maximo ad has ductarum jam major est inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maximè autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium systematis, versus corpus omnium maximum, (e) non sint ad invicem reciprocè ut quadra-

(b) * *Hoc est, centro suo gravitatis*, in quo totum systema gravium P, p, π, T, unitum ac contractum intelligitur (71).

(c) * *Hyperbolam vel parabolam attratione languidâ, ellipsim* vel circulum *fortiore*; manente enim velocitate corporis circà centrum virium S projecti, & circulum vel ellipsim describentis minui debet illius ad centrum S attractio, ut ad eandem distantiam possit Parabolam describere, & magis adhuc decrescere illam attractionem oportet, ut describat Hyperbolam (per cor. 7. prop. 16. & Dem. prop. 17).

(d) * *In casu* 2°. *quo propiùs accedit corpus omnium maximum ad systema duorum vel plurium corporum, eò magis* recedit à casu ubi perturbatio est nulla, nempè quandò corpus S infinitè distat, ergò eò *magis turbabuntur motus partium systematis inter se*.

(e) * *Non sint ad invicem reciprocè &c.* Exempli causâ; Si corpora P, p, diversis legibus traherentur, P, v. gr. in ratione reciprocâ quadrati distantiæ suæ à corpore maximo S; p verò in ratione cubi distantiæ.

* Pre-

ta distantiarum à corpore illo maximo; (f) præsertim si proportionis hujus inæqualitas major sit quam inæqualitas proportionis distantiarum à corpore maximo. Nam si vis acceleratrix, æqualiter & secundum lineas parallelas agendo, perturbat motus inter se, necesse est, ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque sit, vel minor pro majore, vel minore inæqualitate. Excessus impulsuum majorum, agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, necessariò mutabunt situm eorum inter se. Et hæc perturbatio, addita perturbationi, quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde si systematis hujus partes in ellipsibus, vel circulis sine perturbatione insigni moveantur; manifestum est, quod eædem à viribus acceleratricibus, ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur nisi levissimè, aut urgentur æqualiter, & secundum lineas parallelas quamproximè.

PROPOSITIO LXVI. THEOREMA XXVI.

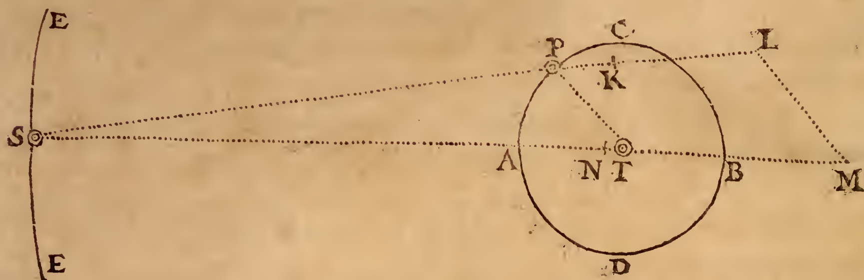
Si corpora tria, quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum, se mutuo trahant; & attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint inter se reciprocè ut quadrata distantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipsum ductis, describet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam ellipseos umbilicum in concursu radiorum habentis magis accedentem, si corpus maximum his attractionibus agitetur, quam si maximum illud vel à minoribus non attractum quiescat, vel multò minus vel multò magis attractum, aut multò minus aut multò magis agitetur.

Liquet ferè ex demonstratione corollarii secundi propositionis præ-

(f) * *Præsertim si proportionis hujus inæqualitas &c.* Exempli causâ, si inæqualitas attractionum acceleratricum in corporibus P, p, major sit inæqualitate distantiarum SP, Sp; Nam si illæ inæqualitates attractionum & distantiarum essent in datâ ratione, evanescente distantiarum SP, Sp differentiâ, quando corpus maximum S longissimè distat, evanesceret quoque attractionum acceleratricum inæqualitas.

præcedentis; ſed argumento magis diſtincto & latius cogente ſic evincitur.

Caſ. 1. Revolvantur corpora minora *P* & *S* in eodem plano circa maximum *T*, quorum *P* deſcribat orbem interiorem *PAB*, & *S* exteriorem *ESE*. Sit *SK* mediocris diſtantia corporum P & *S*; & corporis *P* verſus *S* attractio acceleratrix, in mediocri illâ diſtantiâ, exponatur per eandem. In duplicatâ ratione *SK* ad *SP* capiatur *SL* ad *SK*, & (g) erit *SL* attractio acceleratrix corporis *P* verſus *S* in diſtantiâ quâvis *SP*. Junge *PT*, eique parallelam age *LM* occurrentem *ST* in *M*;



& attractio *SL* reſolvetur (per legum corol. 2.) in attractiones *SM*, *LM*. Et ſic urgebitur corpus *P* vi acceleratrice triplici. Vis una tendit ad *T*, & oritur à mutuâ attractione corporum *T* & *P*. Hâc vi ſolâ corpus *P* circum corpus *T*, ſive immotum, ſive hâc attractione agitatum, deſcribere deberet & areas, radio *PT*, temporibus proportionales, & ellipſin cui umbilicus eſt in centro corporis *T*. Patet hoc per prop. XI. & corollaria 2. & 3. theor. XXI. Vis altera eſt attractionis *LM*, quæ quoniam tendit à *P* ad *T*, ſuperaddita vi priori coincidet cum ipſâ, & ſic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales deſcribantur per corol. 3. theor. XXI. At (h) quoniam non eſt quadrato diſtantiæ *PT* recipro-

(g) * *Et erit SL attractio acceleratrix &c.* Eſt enim (ex Hyp.) ut SP^2 ad SK^2 ità attractio acceleratrix in K (quam exhibet linea SK) ad attractionem acceleratricem in P, quam proindè exhibebit linea SL.

(h) 495. *At quoniam non eſt quadrato diſtantiæ PT reciprocè proportionalis*; Eſt enim (ex conſtr.) $SK^2 : SP^2 = SL : SK$, adeóque $SK^3 : SP^3 = SL \times SK : SK \times SP = SL : SP$. Sed ob triangula MLS, TPS ſimi-

cè proportionalis, componet eâ cum vi priore vim ab hâc proportione aberrantem, idque eo magis, quo major est proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum (per prop. XI. & per corol. 2. theor. XXI.) vis, quâ ellipsis circa umbilicum *T* describitur, tendere debeat ad umbilicum illum, & esse quadrato distantiæ *PT* reciprocè proportionalis; vis illa composita, aberrando ab hâc proportione, faciet ut orbis *PAB* aberret à formâ ellipseos umbilicum habentis in *T*; idque eo magis, quo major est aberratio ab hâc proportione; atque ideo etiam quo major est proportio vis secundæ *LM* ad vim viribus primam, cæteris paribus. Jam vero vis tertia *SM*, trahendo corpus *P* secundum lineam ipsi *ST* parallelam, componet cum prioribus vim, quæ non amplius dirigitur à *P* in *T*; quæque ab hâc determinatione tanto magis aberrat, quanto major est proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus: atque ideo quæ faciet ut corpus *P*, radio *TP*, areas non amplius temporibus proportionales describat; atque ut aberratio ab hâc proportionalitate tanto major sit, quanto major est proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis vero *PAB* aberrationem à formâ ellipticâ præfatâ hæc vis tertia duplici de causâ adaugebit, tum quod non dirigatur à *P* ad T, (i) tum etiam quod non sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ *PT*. Quibus intellectis, manifestum est, quod areæ temporibus tum maximè fiunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, fit minima; & quod orbis *PAB* tum maximè accedit ad præfatam formam ellipticam, ubi vis tam secunda quam tertia, sed præcipuè vis tertia fit minima, vi primâ manente.

Exponatur corporis *T* attractio acceleratrix versus *S* per lineam

similia SL:SP = LM:PT; ergò LM:PT = $SK^3:SP^3$, & proindè vis LM est ut $\frac{SK^3 \times PT}{SP^3}$, seu datâ SK, ut $\frac{PT}{SP^3}$; undè crescente distantiâ PT crescit vis LM.

(i) 496. *Tum etiam quod non sit reciprocè proportionalis &c.* Nam PT est ad ST ut vis LM est ad vim SM, sed (495) vis LM est ut $\frac{SK^3 \times PT}{SP^3}$, & proindè vis SM est ut $\frac{SK^3 \times ST}{SP^3}$. Quarè vis SM, datis SK & ST, est ut $\frac{1}{SP^3}$.

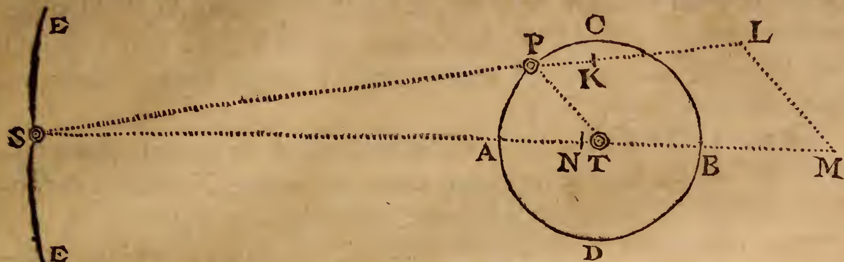
DE MOTU CORPORUM.

neam *SN*; & ſi attractiones acceleratrices *SM*, *SN* æquales eſſent; hæ, trahendo corpora *T* & *P* æqualiter & ſecundum lineas parallelas, nil mutarent ſitum eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter ſe (per legum corol. VI.) ac ſi hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione ſi attractio *SN* minor eſſet attractione *SM*, tolleret ipſa attractionis *SM* partem *SN*, & maneret pars ſola *MN*, quâ temporum & arearum proportionalitas & orbitæ forma illa elliptica perturbaretur. Et ſimiliter ſi attractio *SN* major eſſet attractione *SM*, oriretur ex differentiâ ſolâ *MN* perturbatio proportionalitatis & orbitæ. Sic per attractionem *SN* reducitur ſemper attractio tertia ſuperior *SM* ad attractionem *MN*, attractione primâ & ſecundâ manentibus prorſus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & orbita *PAB* ad formam præfatam ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio *MN* vel nulla eſt, vel quam fieri poſſit minima; hoc eſt, ubi corporum *P* & *T* attractiones acceleratrices, factæ verſus corpus *S*, accedunt quantùm fieri poteſt ad æqualitatem; id eſt, ubi attractio *SN* non eſt nulla, neque minor minimâ attractionum omnium *SM*, ſed inter attractionum omnium *SM* maximam & minimam quaſi mediocris; hoc eſt, non multo major neque multo minor attractione *SK*. *Q. E. D.*

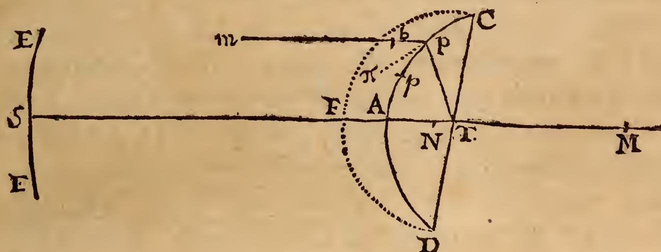
Caſ. 2. (k) Revolvantur jam corpora minora *P*, *S* circa maximum *T* in planis diverſis; & vis *LM*, agendo ſecundum lineam *PT* in plano orbitæ *PAB* ſitam, eundem habebit effectum ac prius, neque corpus *P* de plano orbitæ ſuæ deturbabit.

(k) 497. *Caſ.* 2. Planum TESE cum hujus ſchematis plano congruere ſupponatur, orbitæ verò PAB planum alterâ ſui parte, v. gr. CAD ſuprà planum TESE eminere, & altera parte DBC infrà planum TESE deprimi intelligatur, linea recta DC communis planorum TESE & PAB interſectio, linea nodorum dicitur, & illius extrema puncta D & C nodi appellantur. Nodi vel puncta quævis D, C dicuntur eſſe in quadraturis ſeu aſpectum quadratum obtinere reſpectu corporis S, dum ſunt in lineâ rectâ ad ST in puncto T perpendiculari, quod in hoc caſu corpus S & punctum C vel D ſub angulo recto de loco T videantur. Si ſuper lineâ ST erectum intelligatur planum plano TESE verticale, ſintque puncta A & B in illo plano verticali, A quidem inter corpora S & T; B verò ultrà T, punctum A dicitur eſſe in conjunctione, & punctum B in oppoſitione reſpectu corporum S & T; & loca A & B, communi nomine ſyzigiæ vocantur. Motus in longitudinem eſt quo cor-

bit. (l) At vis altera *NM*, agendo secundum lineam quæ ipsi *ST* parallela est (atque ideo, quando corpus *S* versatur ex-



tra lineam nodorum, inclinatur ad planum orbitæ *PAB*) præter perturbationem motus in longitudinem jam ante expositam, indu-



corpus revolvens P à puncto suæ orbitæ dato, v. gr. à puncto C recedit per CPADB: motus in latitudinem est is quo corpus revolvens P ad planum immotum TESE accedit vel ab eo recedit. Si corporum revolventium P & S motus inter se conferantur, & utrumque in eandem plagam feratur, v. gr. ab Occidente in Orientem, motus in consequentia fieri dicitur; si verò alterum in unam plagam, alterum in alteram moveatur, motus unius in consequentia alterius vocatur in antecedentia, v. gr. motus ab Oriente in Occidentem, in antecedentia fieri dicetur.

(l) * *At vis altera NM &c.* Si orbitæ PAB (vid. fig. Newt.) pars ACB suprà planum TESE elevata, pars verò altera ADB infrà ipsum depressa intelligatur, ita ut linea nodorum AB coincidat cum lineâ TS sitque proindè corpus S in lineâ nodorum productâ, vis NM ut potè quæ in corpus P agit secundùm lineam ipsi TS parallelam, jacebit in plano orbitæ PAB, & motum corporis P in latitudinem non perturbabit, hoc est, non efficiet ut corpus P ad planum TESE magis accedat aut ab eo recedat. Verùm si corpus S versatur extrà lineam nodorum, vis NM inducet perturbationem motûs in latitudinem. Sit enim CADT pars orbitæ quam corpus P exclusâ vi NM describeret suprà planum TESE seu CFD eminens, sit CD linea nodorum, Pm recta æqualis & parallela NM, p locus ad quem corpus P exclusâ vi NM tempusculo minimo perveniret, b locus in lineâ Pm ad quem corpus idem P, solâ vi NM, eodem tempusculo traheretur; corpus illud P duabus viribus impulsum, quarum altera agit secundum directionem Pp in plano CAD altera secundum directionem Pm ad planum CAD inclinatam, motu composito describet lineam Pπ quæ non est in plano CAD.

De Motu Corporum.

inducet perturbationem motus in latitudinem, trahendo corpus P de plano suæ orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum P & T ad invicem situ, erit ut vis illa generans *MN*, ideoque minima evadet ubi *MN* est minima, hoc est (uti jam exposui) ubi attractio *SN* non est multo major, neque multo minor attractione *SK*. *Q. E. D.*

Corol. 1. (n) Ex his facilè colligitur, quod, si corpora plura minora *P*, *S*, *R*, &c. revolvantur circa maximum *T*, motus corporis intimi *P* minimè perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum *T* pariter à cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitatur, atque à cætera se mutuo.

Corol. 2. In systemate vero trium corporum *T*, *P*, *S*, si attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint ad invicem reciprocè ut quadrata distantiarum; corpus *P*, radio *PT*, aream circa corpus *T* velocius describet prope conjunctionem *A* & oppositionem *B*, quam prope quadraturas *C*, *D*. Namque vis omnis qua corpus *P* urgetur & corpus *T* non urgetur, quæque non agit secundum lineam *PT* accelerat vel retardat descriptionem areæ, perinde ut ipsa in consequentia vel in antecedentia dirigitur. (o) Talis est vis *NM*. Hæc in transitu corporis *P* à *C* ad *A* tendit in consequentia, motumque accele-

(n) * *Corollarium primum* patet ex demonstratis cum duo tantum sint corpora minora P, S; addatur enim tertium corpus R, eodem modo demonstrabitur motum corporis intimi P minimè perturbari attractione ipsius R, ubi corpus maximum T pariter attrahitur à corpore illo R, ac corpus P, & ità de pluribus corporibus ratiocinari licet. Quarè ex demonstratis *facilè colligitur quod si &c.*

(o) 498. *Talis est vis NM.* Si supponamus orbem CADB (vid. fig. Newt.) esse circulo finitimum, & distantiam SD maximam respectu radii PT, erit ferè SC = SK = ST = SN, & proinde NM = TM. Porrò corpore P in quadraturis C, D versante, est SC = SP = SK; quarè cum sit (per constr. prop. 66.) SL : SK = SK² : SP², erit in quadraturis SL = SK = SC, & LM coincidet cum CT seu PT, adeóque evanescet TM seu NM. Nulla igitur erit virium SM, SN, in quadraturis differentia, & ideò corpus P reliquis viribus ad centrum T tendentibus agitatum, radio vectore areas ibi describet temporibus proportionales. At ubi corpus P extrà quadraturas est in hemipheriâ CAD, vis SM major est vi SN & corpus P virium differentiâ NM trahitur secundùm directionem ipsi TS parallelam. Sit Pm æqualis & parallela ipsi NM, & demisso ex m in radium TP productum perpendiculo mn, vis Pm, seu NM, in duas vires Pn, nm resolvitur, quarum altera Pn trahendo secundùm directionem radii TP, corporis P motum in longitudinem nihil mutat, nec æquabilem arearum descriptionem turbat; altera verò NM, trahendo secundum directionem nm, radio TP perpendicularem, hoc est, secundum directionem tangentis in P, motum in longitudinem accelerat in primo qua-

rat; dein usque ad *D* in antecedentia, & motum retardat; tum in consequentia usque ad *B*, & ultimo in antecedentia transeundo à *B* ad *C*.

Corol. 3. Et eodem argumento patet quod corpus *P*, cæteris paribus, velocius movetur in conjunctione & oppositione quam in quadraturis. *Co-*

quadrante CA retardat in secundo quadrante AD.

In alterâ hemiperipheriâ DBC, vis SM minor est vi SN, quoniam corpus P à corpore S longius distat quam corpus T, unde si vires perturbantes ad solum corpus P referantur, virium SM, SN differentia NM negativa seu ablatitia erit, aut quod idem est, contrariâ directione aget; Fingatur enim corpora T & P urgeri ambo vi SN ubique æquali & sibi parallela, pergent moveri inter se quasi omnino abesset illa vis per Cor. 6. Legum motûs, tum trahatur corpus P vi NM secundum directionem oppositam vi SN, ex eâ actione mutabuntur motus corporum T & P inter se, sed etiam ex eâ actione vis SN quæ trahere corpus P fingebatur, reducetur ad vim SM quæ est vis reverâ agens dum vis SN agit in T, ergo si æstimentur motus corporum T & P inter se, quasi corpus P in hemiperipheriâ DBC urgeretur virium differentia NM in contrariam partem agente, obtinebuntur veræ mutationes motuum corporum T & P inter se, ex actionibus SN & SM ortæ, ideoque in posterum considerabitur corpus P in hemipeiipheriâ DBC quasi urgeretur vi NM secundum directionem Pm ipsi NM parallelam à P. versùs m agente; atque ideo, si vi Pm in duas vires, ut in alterâ hemipeiipheriâ factum est, resolvatur, manifestum erit motum in longitudinem in quadrante DB accelerari & in quadrante BC retardari.

DE MOTU CORPORUM.

Corol. 4. Orbita corporis *P*, cæteris paribus, curvior est in quadraturis quam in conjunctione & oppositione. Nam corpora velociora minus deflectunt à recto tramite. Et (p) præterea vis *KL*, vel *NM*, in conjunctione & opositione contraria est vi, quâ corpus *T* trahit corpus *P*; ideoque vim illam minuit; corpus autem *P* minus deflectet à recto tramite ubi minus urgetur in corpus *T*.

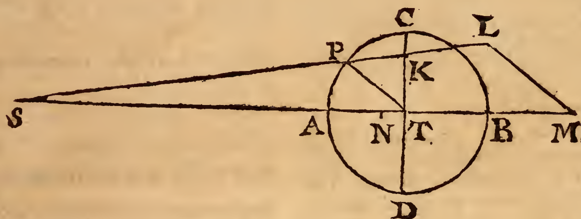
Corol. 5. (q) Unde corpus *P*, cæteris paribus, longius recedet à corpore *T* in quadraturis, quam in conjunctione & oppositione. Hæc ita se habent excluso motu excentricitatis. Nam si orbita corporis *P* excentrica sit, excentricitas ejus (ut mox in hujus corol 9. ostendetur) evadet maxima ubi apsides sunt in syzygiis; indeque fieri potest ut corpus *P*, ad apsidem summam appellens, absit longius à corpore *T* in syzygiis quam in quadraturis.

Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis *T*, quâ corpus *P* retinetur in orbe suo, augetur in quadraturis per additio-

(p) 499. *Et præterea vis KL &c.* Iisdem positis quæ in notâ superiori, rectæ SL, SM sunt fere parallelæ, ac proindè TM = PL & LM = PT quam proximè; quarè coincidente P cum A & K cum T, fit LM = AT = PK, & NM seu TM = PL = AT + KL, & NM − LM = KL, hoc est, vis tota perturbans quâ corpus P in conjunctione A à corpore T versus S retrahitur, est ut KL quam proximè; vi enim LM trahitur P versus T & vi NM à corpore T versus S retrahitur. Idem eodem modo demonstratur, corpore P in oppositione B posito.

(q) * *Undè corpus P &c.* Nam cum orbita corporis P curvior sit in quadraturis C vel D quam in syzigiis A & B (per cor. 4.) necesse est, cæteris paribus, ut in syzigiis A & B depressior sit quam in quadraturis C & D ad instar ellipseos cujus sit centrum T axis major C D axis minor A B. Hæc ità se habent, si, exclusis viribus perturbantibus, orbita corporis P fuerit circulus cujus centrum T.

ditionem vis *LM*, ac diminuitur in ſyzygiis per ablationem vis *KL*, & (r) ob magnitudinem vis *KL*, magis diminuitur quam augetur; eſt autem vis illa vi centripeta (per corol. 2. prop. IV.) in ratione compoſitâ ex ratione ſimplici radii *TP* directè & ratione duplicatâ temporis periodici inverſè: patet hanc rationem compoſitam diminui per actionem vis *KL*; ideoque tempus periodicum, ſi maneat orbis radius *TP*, augeri, idque in ſubduplicatâ ratione, quâ vis illâ centripeta diminuitur: auctoque ideo vel diminuto hoc radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in radii hujus ratione ſeſquiplicatâ, (per corol. VI. prop. IV.) Si vis illa corporis centralis paulatim langueſceret, corpus *P* minus ſemper & minus attra-



(r) 500. *Et ob magnitudinem vis KL &c.* Si diſtantia mediocris S K vel S T ingens fuerit reſpectu radii T P orbitæ P A B, in loco quovis corporis P, erit vis L M quam proximè ad vim N M ut ſinus totus ad ſinum triplum diſtantiæ angularis corporis P à quadraturâ proximâ. Nam ob ingentem diſtantiam corporis S (ex hyp.) lineæ S L, S M ſunt ferè parallelæ ac proinde L M = P T, N M ſeu T M = P L, & S P = S K; cumque ſit S T ad lineam quadraturarum C D perpendicularis, erit etiam S K ad eandem normalis, & exiſtente P T radio, erit P K ſinus anguli P T C, hoc eſt, ſinus diſtantiæ angularis corporis P à quadraturâ proximâ C. Porrò (per prop. 66.) $SL : SK = SK^2 : SP^2$, adeoque $SL - SK : SK = SK^2 - SP^2 : SP^2$, hoc eſt, $KL : SK = PK \times SK + SP : SP^2 = PK \times 2SP : SP^2 = 2PK : SP = 2PK : SK$, ob $SK = SP$, & $SK + SP = 2SP$. Quarè erit $KL = 2PK$, & PL ſeu $NM = 3PK$, hoc eſt, vis L M ſeu P T ad vim N M ſeu P L ut ſinus totus P T ad 3 P K triplum ſinum diſtantiæ angularis corporis P à quadraturâ proximâ.

501. Coroll. Vis K L in conjunctione A, eſt ad vim ſimilem in oppoſitione B, ut A T ad T B, & ſi orbita P A B circularis fuerit vel circulo finitima, erit vis K L in ſyzigiis duplo major vi L M in quadraturis quam proximè. Nam corpore P in ſyzigiis verſante, fit $PK = AT = PT = LM$, & proindè N M ſeu P L fit $= 3LM$, & $KL = 2LM$. Tandem iiſdem poſitis, vis N M maxima eſt in ſyzigiis, quoniam ibi P K fit maxima ſeu evadit $= AT$, & $NM = 3AT$.

Unde ob magnitudinem vis KL (500, 501.) vis centripeta corporis centralis T magis diminuitur quam augetur, ideoque cenſenda eſt pro abſolutè diminutâ ab actione corporis S.

De Motu Corporum.

attractum perpetuò recederet longius à centro T; & contra, si vis illa augeretur, accederet propius. Ergo si actio corporis longinqui S, quâ vis illa diminuitur, (f) augeatur ac diminuatur per vices: augebitur simul ac diminuetur radius TP per vices; & (t) tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compositâ ex ratione sesquiplicatâ radii, & ratione subduplicatâ, quâ vis illa centripeta corporis centralis T, per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S, diminuitur vel augetur.

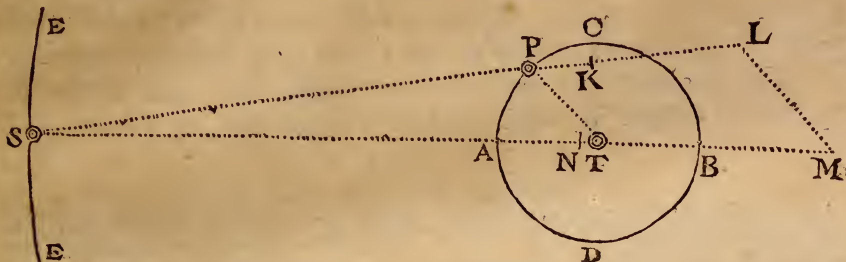
Co-

(f) * *Augeatur ac diminuatur per vices.* Quoniam vis quâ corpus P trahitur à corpore T, est ejusdem corporis P vis centripeta quâ in orbitâ suâ retinetur; si remissior fuerit vis illa, corpus P minus attractum à centro T longius recederet; & contrà, si augeatur vis illa, corpus P ad T propiùs accedet. Auctâ igitur actione corporis S in T per accessum corporis T ad S, augetur vis NM, minuiturque vis centripeta corporis P, ac proindè crescit distantia PT. Econtrà autem decrescente corporis S actione per recessum corporis T ab S decrescit quoque NM & augetur corporis P vis centripeta, minorque fit distantia PT. Hæc omnia per vices contingent, ubi nempe corpus T corpori S proximius fuerit, augebitur radius PT, ubi verò remotius evadet minuetur radius.

(t) * *Et tempus periodicum augebitur ac diminuetur &c.* Corpus P circà T, exclusâ corporis longinqui S vi ablatitiâ, in circulo PAD revolvatur, & accedente vi illâ ablatitiâ corporis S quæ, ob ingentem distantiam ST, parva admodum fit respectu vis quâ corpus P à corpore T trahitur, idem corpus P in orbe ferè circulari adhuc revolvetur. Jam verò corporis circulum vel orbem circulo finitimum describentis vis acceleratrix versus T directa est semper (per cor. 2. prop. 4.) in ratione compositâ ex ratione simplici radii TP qui dicatur R directè & ratione duplicatâ temporis periodici, quod dicatur t inversè, hoc est, vis acceleratrix corporis P versus T, est ut $\frac{R}{t^2}$, & manente radio ut $\frac{1}{t^2}$; sed vis acceleratrix in distantiâ datâ est ut vis absoluta corporis trahentis, ergò si corporis T trahentis vis absoluta dicatur V, erit V ut $\frac{1}{t^2}$ & t^2 ut $\frac{1}{V}$, ac t ut $\frac{1}{\sqrt{V}}$ manente radio TP seu R. Porrò vis acceleratrix quâ corpus P versus T trahitur, exclusâ vi ablatitiâ corporis S, est reciprocè ut quadratum distantiæ TP, hoc est directè ut $\frac{1}{R^2}$ (ex hyp.) Et quoniam vis ablatitia corporis S, exigua admodum est respectu vis acceleratricis quâ corpus P à corpore T trahitur, accedente vi illâ ablatitiâ, vis reliqua acceleratrix in corpore P erit adhuc ut $\frac{1}{R^2}$ quam proximè; quare eâdem manente reliquâ vi centripetâ absolutâ corporis T & mutato utcumque radio R, quadratum temporis periodici t^2 erit ut distantiæ cubus R^3. ac proindè t ut $\sqrt{R^3}$. (per coroll. 6. prop. 4.) hoc est tempus periodicum est in sesquiplicatâ ratione radii TP. Si igitur neque maneat radius idem, neque eadem vis centripeta absoluta in corpore T, sed per actionem corporis longinqui S radius augeatur, & vis centripeta minuatur, aut per diminutionem ejus actionis radius minuatur, & vis centripeta augeatur, quadratum temporis periodici t^2 erit in ratione compositâ ex binis rationibus suprà inventis, nimirum ex ratione $\frac{1}{V}$, & ratione R^3, hoc est t^2

erit

Corol. 7. Ex (u) præmiſſis conſequitur etiam, quod ellipſeos à corpore *P* deſcriptæ axis, ſeu apſidum linea, quoad motum angularem, progreditur & regreditur per vices, ſed magis tamen progreditur, & per exceſſum progreſſionis fertur in conſequentia. Nam vis quâ corpus *P* urgetur in corpus *T* in quadraturis, ubi vis *MN* evanuit, componitur ex vi *LM* & vi cen-



erit ut $\frac{R^3}{V}$, & proindè *t* ut $\sqrt{\frac{R^3}{V}}$, aut quod idem eſt, tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compoſitâ ex ratione $\sqrt{R^3}$, ſeſquiplicatâ radii, & ratione $\frac{1}{\sqrt{V}}$ ſubduplicatâ hujus quâ vis illa centripeta corporis centralis T per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S diminuitur vel augetur; nam decreſcente *V* creſcit pariter $\frac{1}{V}$, & contrà creſcente *V* in eâdem ratione decreſcit $\frac{1}{V}$.

502. Scholium. Hinc ut David Gregorius in ſcholio ad prop. 17. Lib. 4. Aſtronomiæ phyſicæ & geometricæ obſervavit, ſi vis centripeta corporis centralis T aliundè quam per vim extraneam corporis S augeatur & minuatur per vices, ut ſi corporis T vis centripeta abſoluta ſupponatur ipſius maſſæ proportionalis & nova ei addatur & detrahatur per vices materia, atque indè ejus vis abſoluta in eâdem ratione augeatur & minuatur, corpus P in minori & majori orbitâ per vices revolvetur, diminuto & aucto per vices radio TP ejuſque tempus periodicum minuetur & augebitur per vices in ratione compoſitâ ex ratione ſeſquiplicatâ radii directè & ratione ſubduplicatâ vis centripetæ abſolutæ corporis T inversè ut ſupra. Vis enim acceleratrix compoſita & reſidua quâ corpus T auctum & diminutum per vices trahit corpus P eſt hic præcisè in duplicatâ ratione diſtantiæ inversè; quod in caſu coroll. 6. quam proximè tantùm obtinet.

(u) * *Ex præmiſſis.* Si corpus P circum T ellipſim circulo finitimam deſcribat cujus umbilicus ſit T hujus ellipſeos *axis major ſeu apſidum linea* motu angulari circà umbilicum T *per vices progreditur* ſeu fertur in conſequentia *& regreditur*, ſeu in antecedentia movetur; progreditur nempè, dum corpus P eſt in ſyzygiis A & B, regreditur verò dum corpus P eſt in quadraturis C & D, *ſed magis tamen progreditur quam regreditur, & per exceſſum progreſſionis fertur in conſequentia.*

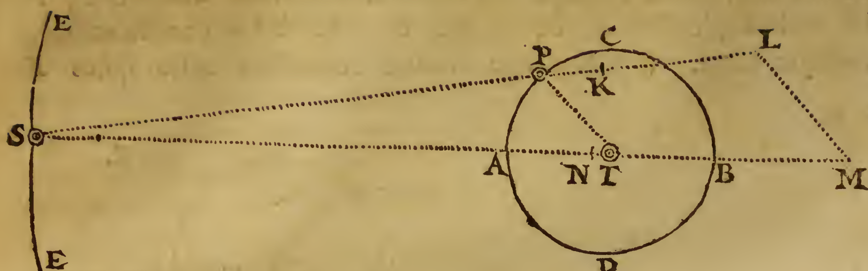
De Motu Corporum.

centripeta, quâ corpus T trahit corpus P. Vis (y) prior LM, ſi augeatur diſtantia PT, augetur in eâdem fere ratione cum hâc diſtantiâ, & vis poſterior, decreſcit in duplicatâ illâ ratione, ideoque ſumma harum virium (z) decreſcit in minore quam duplicatâ ratione diſtantiæ PT, & (a) propterea (per corol. 1. prop. XLV.) efficit ut aux, ſeu apſis ſumma, regrediatur. In conjunctione verò & oppoſitione vis, quâ corpus P urgetur in corpus T, differentia eſt inter vim, quâ corpus T trahit

(y) * *Vis prior LM &c.* Nam ob ingentem corporis S à corporibus P & T diſtantiam (ex Hyp.) SL eſt ferè parallela SM, & proinde LM ipſi PT parallela creſcit ubique ut PT, quamproximè; in quadraturis verò LM coincidit cum PT.

(z) * *Decreſcit in minore quam duplicatâ illâ ratione*, hoc eſt, non tantùm minuitur in diſtantiâ majore, nec tantùm augetur in diſtantiâ minore, quantùm minueretur vel augeretur, ſi vis tota acceleratrix, ſeu virium ſumma eſſet ſemper ut quadratum diſtantiæ reciprocè.

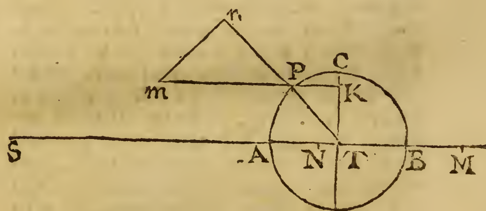
(a) * *Et propterea per cor. 1. prop. 45.* Sit $TP = A$, & $LM = c \times A$; c verò quantitas data, & vis quâ corpus P verſus T excluſâ corporis S actione urgetur, erit (ex Hyp.) ut $\frac{1}{A^2}$, & accedente vi exiguâ LM in quadraturis, harum virium ſumma erit ut $\frac{1}{A^2} + c \times A$, adeóque hæc virium ſumma decreſcet in ratione paulò minore quam in duplicatâ diſtantiæ PT ſeu A. Nam ſi diſtantia variabilis A evadat $b \times A$, ſitque b numerus unitate major, erit vis in ſimplici diſtantiâ A ad vim in diſtantiâ majore $b \times A$, ut $\frac{1}{A^2} + c \times A$, ad $\frac{1}{b^2 A^2} + cbA$, hoc eſt, ut $bb + cbbA^3$ ad $1 + cb^3A^3$ ſive ut $bb \times \overline{1 + cA^3}$ ad $1 \times \overline{1 + cb^3A^3}$, hæc autem ratio minor eſt quam ratio $\frac{1}{A^2}$ ad $\frac{1}{b^2 A^2}$, ſeu b^2 ad 1, cum $(1 + cA^3)$ minus ſit quàm $1 + cb^3A^3$. Ponamus itaque virium ſummam eſſe ut $\frac{1}{A^{2-q}}$, ſeu ut A^{-2+q}, & q, numerum poſitivum unitate longe minorem, & quoniam ſi motus totus angularis quo corpus P ab apſide unâ ad eandem apſidem redit, ſit ad motum angularem revolutionis unius ſeu 360°. ut numerus aliquis m ad n vis centripeta tota eſt ut $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ (per cor. prop. 45.) erit hic $\frac{nn}{mm} - 3 = q - 2$, $\frac{nn}{mm} = 1 + q$, $\frac{n}{m} = \sqrt{1+q}$, & m ad n, ſeu motus totus angularis ab apſide ad eandem apſidem ad 360°. ut 1, ad $\sqrt{1+q}$, adeóque motus ille angularis ab apſide ad eandem $= \frac{360°}{\sqrt{1+q}}$, quarè cum ſit $\sqrt{1+q}$, paulo major unitate, motus totus angularis ab apſide ad eamdem apſidem minor erit 360°. & *ideò apſides obviam ibunt corpori P revolventi, ſeu movebuntur in antecedentia, aut quod idem eſt, regredientur.* Idem facilè demonſtratur (per cor. 2. prop. 45.) vel per exempla tertia. Cum enim vis tota ſit (ex Hyp.) ut $\frac{1}{A^2} + c \times A$, erit (loco citato), angulus revolutionis corporis inter apſides ſummam & imam $= 180° \times \sqrt{\frac{1+c}{1+4c}}$; ſed quoniam c eſt numerus poſitivus, $\frac{1+c}{1+4c}$, eſt numerus unitate minor, ergò angulus revolutionis corporis P inter apſides minor eſt 180°.



trahit corpus P, & vim KL; & differentia illa, ([b]) propterea quod vis KL augetur quamproximè in ratione distantiæ PT, decrescit in majore quam duplicatâ ratione distantiæ PT, ([c]) ideoque (per corol. 1. prop. XLV.) efficit ut aux progrediatur. In ([d]) locis inter syzygias & quadraturas pendet motus augis ex causâ utrâque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius excessu progrediatur ipsa vel regrediatur. Unde cum vis KL in syzygiis sit quasi duplo major quam vis LM in quadraturis, excessus erit penes vim KL, transferetque augem in consequentia. Veritas autem hujus & præcedentis corollarii faci-

(b) * *Propterea quod vis KL &c.* Est enim in syzygiis KL = 2AT, seu 2PT quam proximè (501).

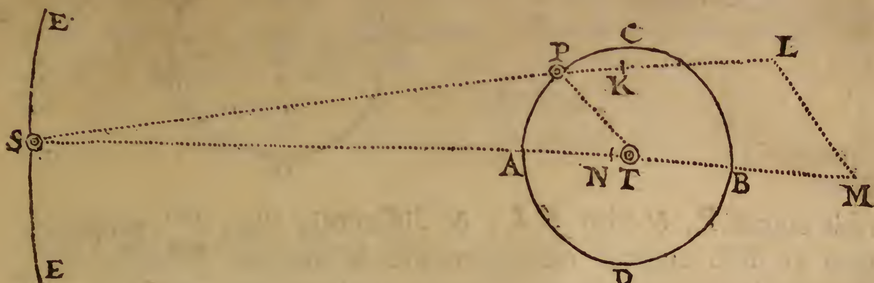
(c) * *Ideóque per cor. 1. prop. 45.* Nam si in superiori calculo loco $+q$ scribatur $-q$, vel loco $+c \times A$, scribatur $-c \times A$, quod vis KL sit ablatitia, invenietur angulus totius revolutionis corporis P ab apside unâ ad eandem apsidem $= \frac{360^\circ}{\sqrt{1-q}}$, vel angulus inter apsides summam & imam $= 180^\circ \times \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Est autem $\sqrt{1-q}$, numerus unitate minor, & $\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ numerus unitate major, adeóque $\frac{360^\circ}{\sqrt{1-q}}$, arcus major 360°. & $180^\circ \times \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$, arcus major 180°. quarè apsides in hoc casu progrediuntur.



(d) 503. *In locis inter syzygias & quadraturas &c.* Iisdem positis quæ in Lemmate 500. quæritur distantia angularis corporis P à quadraturâ C, v. gr. ubi apsides quiescunt. Per locum corporis P agatur Pm parallela & æqualis NM seu TM, & erit Pm = 3PK (500). Vis Pm, si in radium TP productum demittatur perpendiculum mn, resolvitur in vires Pn, nm, quarum nm agendo secundum lineam radio perpendicularem, vim ac-

De Motu Corporum.

facilius intelligetur concipiendo systema corporum duorum *T*, *P* corporibus pluribus *S*, *S*, *S*, &c. in orbe *ESE* consistentibus, undique cingi. (e) Namque horum actionibus actio ipsius *T*

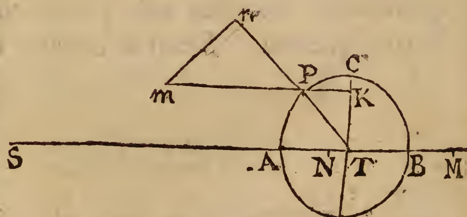


minuetur undique, decrescetque in ratione plusquam duplicatâ distantiæ.

Co-

acceleratricem corporis P versus T nec auget, nec minuit, & Pn agendo secundum radium TP à P versus n, vim illam acceleratricem corporis P minuit; vis verò LM seu TP vim acceleratricem corporis P versus T auget. Quarè ubi erit Pn = PT vis acceleratrix corporis P nec augebitur nec minuetur, & apsides quiescent. Porrò ob triangula TPK, mPn similia PT : PK = Pm, seu 3 PK : Pn seu PT. Est igitur in loco quæsito P, $3\,PK^2 = PT^2$, & proindè PT : PK = $\sqrt{3}$: 1. hoc est sinus totus ad sinum distantiæ angularis corporis P à quadraturâ proximâ, ut $\sqrt{3}$ ad 1, seu ut 1732. ad 1000. proximè; undè angulus PTC invenitur esse 35°. 26'. circiter. Quiescent igitur apsides in quatuor locis corporis P quæ à quadraturis distant angulo 35°. 16'; & hinc in singulis corporis P revolutionibus, cæteris paribus, apsides regredientur per gradus revolutionis corporis P, 141°, & progredientur per grad. 219.

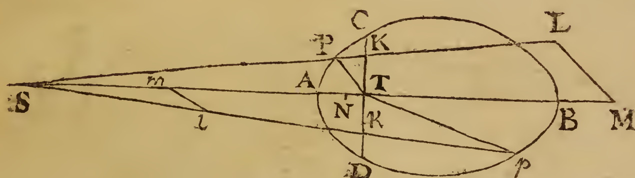
504. Iisdem positis, si orbita CPD, circulo finitima sit, erit vis addititia PT − Pn, maxima in quadraturis. Nam cum sit semper PT : PK = 3 PK : Pn, erit Pn $= \frac{3\,PK^2}{PT}$, ac proindè PT − Pn = PT



$-\frac{3\,PK^2}{PT}$, quæ quantitas maxima evadet ubi erit PK = o, quod in quadraturis contingit.

(e) * *Namque horum actionibus &c.* Hâc enim ratione corpus P erit semper in quadraturis simul & in syzygiis corporis, seu corporum S, adeóque cum vis ablatitia KL; in syzygiis & propè syzygias sit ferè duplo major quam vis addititia LM, in quadraturis & propè quadraturas, actio corporis T minuetur undique, decrescetque proindè in ratione plusquam duplicatâ distantiæ. TP.

Corol. 8. (f) Cum autem pendeat apsidum progressus vel regressus à decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicatâ ratione distantiæ *TP*, in transitu corporis ab apside imâ ad apsidem summam; ut & à simili incremento in reditu ad apsidem imam; atque ideo maximus sit ubi proportio vis in apside summâ ad vim in apside imâ maximè recedit à duplicatâ ratione distantiarum inversâ: manifestum est quod apsides in syzygiis suis, per vim ablatitiam *KL* seu *NM*−*LM*, progredientur velocius, inque quadraturis suis tardius recedent per vim addititiam *LM*. Ob diuturnitatem verò temporis, quo velocitas progressus vel tarditas regressus continuatur, fit hæc inæqualitas longè maxima.



(f) * *Cum autem* (per corol 7.) *pendeat apsidum progressus vel regressus à decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicatâ ratione distantiæ TP* quæ augetur in recessu à centro T, sive *in transitu corporis P ab apside imâ ad apsidem summam, ut & à simili incremento* in accessu ad centrum, sivè *in reditu* ab apside summâ *ad apsidem imam*, *manifestum est* progressum vel regressum apsidum maximum esse *ubi ratio vis in apside summâ ad vim in apside imâ maximè recedit à duplicatâ ratione distantiarum inversâ*, porrò dum linea apsidum seu major axis ellipseos BCAD, cujus umbilicus est T, in syzygiis A, B versatur, ratio vis totius corporis P in apside summâ positi ad vim ejus in apside imâ versantis, magis recedit à duplicatâ ratione distantiarum inversâ quam in alio quovis lineæ apsidum situ. Sit enim B apsis summa, A apsis ima, & erit TB distantia maxima, AT minima (ex naturâ ellipseos). Undè corpore P in conjunctione A versante erit vis ablatitia KL (seu differentia virium acceleratricium corporum T & P versus S) omnium minima, & corpore P in oppositione B versante, erit differentia illa KL omnium maxima. Cum autem ob ingentem corporis S distantiam (ex Hyp.) sit ferè KL ad kl ut AT ad TB (501) ratio vis corporis P in A versantis ad vim illius in B positi, exprimi hic poterit per rationem $\frac{b}{AT^2} - c \times AT$, ad $\frac{b}{TB^2} - c \times TB$, (si ratio b ad c exprimat rationem vîs absolutæ trahentis corpus P versus T, ad vim absolutam ablatitiam KL) seu reductione ad eundem denominatorem factâ, per rationem $TB^2 \times \overline{b - c \times AT^3}$, ad $AT^2 \times \overline{b - cTB^3}$, quæ ratio eò magis recedit à ratione TB^2 ad AT^2, seu duplicatâ distantiarum inversâ, quo magis ratio quantitatis $b - c \times AT^3$, ad quantitatem $b - c \times TB^3$, recedit à ratione æqualitatis, seu quo minor est AT respectu TB, quarè dum linea apsidum est in syzygiis A, B, ratio vis totius in apside summâ ad vim in apside imâ maxi-

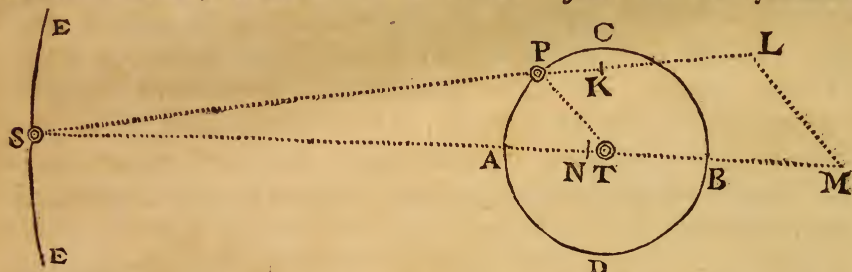
DE MOTU CORPORUM.

Corol. 9. Si corpus aliquod, vi reciprocè proportionali quadrato distantiæ suæ à centro revolveretur circa hoc centrum in ellipsi; & mox, in descensu ab apside summâ seu auge ad apsidem imam; vis illa per accessum perpetuum vis novæ augeretur in ratione plusquam duplicatâ distantiæ diminutæ: manifestum est quod corpus, perpetuò accessu vis illius novæ impulsum semper in centrum, magis vergeret in hoc centrum quam si urgeretur vi solâ crescente in duplicatâ ratione distantiæ diminutæ; ideoque orbem describeret orbe elliptico interiorem, & in apside imâ propius accederet ad centrum quam prius. (g) Orbis igitur, accessu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis in recessu cor-

mè recedit à ratione duplicatâ distantiarum inversâ. In hoc igitur lineæ apsidum situ apsides celerrimè progrediuntur, corpore P in syzygiis vel propè syzygias versante. Dum vero corpus P est in quadraturis C, D, fit vis LM = CT, vel DT; Est autem ex naturâ ellipseos, summa linearum CT, DT, omnium minima; quarè in integrâ corporis P revolutione, apsides viribus CT, DT tardissimè regrediuntur in quadraturis corporis P, & celerrimè progrediuntur in ipsius syzygiis, atque adeò excessus progressus supra regressum erit in hoc casu omnium maximus, & apsides in integrâ corporis P revolutione celerrimè movebuntur in consequentia. Ob contrarias prorsus causas, si linea apsidum in quadraturis posita sit, apsides velocissimè regredientur, corpore P in quadraturis versante, & tardissimè progredientur corpore P in syzygiis existente, & ex hâc utrâque causâ fieri poterit ut in integrâ corporis P circum T revolutione, regressus apsidum superet eorum progressum, proindeque ut apsides in antecedentia ferantur; sed quoniam, cæteris paribus, vis ablatitia KL quæ progressum apsidem in syzygiis corporis P inducit est (500) ferè duplo major vi adjectitiâ LM quæ apsidum regressum in quadraturis corporis P producit, excessu progressûs suprà regressum, apsides progrediuntur in integrâ sui revolutione circum T, hoc *est, eo tempore* quo apsides ex T *visæ omnes cum corpore* S, aspectus subeunt; augetur verò progressus ille, si corpora P & S in suis orbitis ferantur in eandem plagam; In hâc enim hypothesi, apsides diutius hærent in syzigiis quam in quadraturis, quia in syzigiis progrediuntur cum corpore S, atque adeò diutius illud quasi comitantur, in quadraturis verò feruntur in antecedentia & corporis S in consequentia revolventis aspectum quadratum veluti fugiunt; undè fit ut apsides diutius progrediantur in syzigiis suis quam regrediuntur in suis quadraturis.

(g) * *Orbis igitur accessu hujus vis novæ fiet magis excentricus*; manente enim distantiâ apsidis summæ ab orbitæ umbilico, decrescet distantia apsidis imæ ab eodem umbilico, majorque proindè erit ratio prioris distantiæ ad posteriorem, quam

corporis ab apside imâ ad apsidem summam, decresceret iisdem gradibus quibus ante creverat, redieret corpus ad distantiam priorem, ideoque si vis decrescat in majori ratione, corpus jam minus attractum ascendet ad distantiam majorem & sic orbis excentricitas adhuc magis augebitur. Quare si ratio incrementi & decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus augeatur, augebitur semper excentricitas; (h) & contra, diminuetur eadem, si ratio illa decrescat. Jam verò in systemate



corporum T, P, S, ubi apsides orbis PAB sunt in quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima est, & maxima fit ubi apsides sunt in syzygiis. Si apsides constituantur in quadraturis, ratio prope apsides minor est & prope syzygias major quam duplicata distantiarum, & ex ratione illâ majori oritur augis motus directus, (i) uti jam dictum est. (k) At si consideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progressu inter-

si vis illa nova non accessisset, hoc est, orbis fiet magis excentricus.

(h) * *Et contrà &c.* Si in descensu corporis ab abside summâ ad apsidem imam, vis centripeta augeatur minus quam in duplicatâ ratione distantiæ diminutæ, corpus describet orbem orbi elliptico exteriorem, & in apside imâ, minus accedet ad centrum quam prius, hoc est, orbis fiet minus excentricus, & excentricitas adhuc minuetur, si in corporis ascensu ab apside imâ ad summam, vis centripeta minus decrescat quam anteà creverat. Quarè si ratio incrementi & decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus minuatur, minuetur semper excentricitas.

(i) * *Uti jam dictum est* (Cor. 7.).

(k) * *At si consideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progressu corporis P inter apsides in quadraturis C, D constituti,* hæc *minor est quam duplicata distantiarum.* Sit enim apsis ima C, summa D, umbilicus T, erit (ex Dem.) vis in apside imâ ad vim in apside summâ ut $\frac{b}{CT^2} + n \times CT$, ad $\frac{b}{TD^2} + n \times TD$, (si ratio b ad n exprimat rationem vis absolutæ trahentis corpus P versus T ad vim absolutam additiam LM) & reductione ad eamdem denominationem factâ ut $TD^2 \times \overline{b + nCT^3}$ ad $CT^2 \times b + nTD^3$, quæ ratio minor est quam ratio TD^2, ad CT^2, ob TD, majorem quam CT; & quoniam in hoc lineæ apsidum situ ratio TD ad CT seu ratio distantiarum umbilici T à qua-

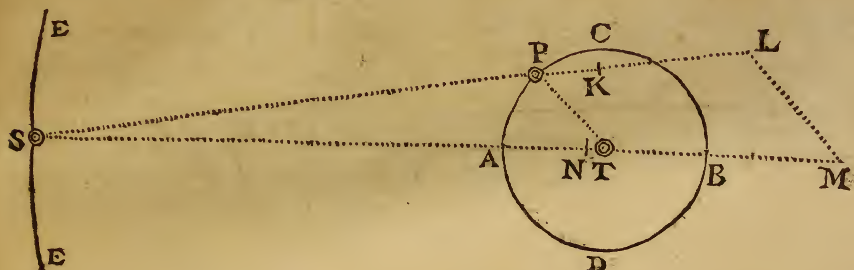
inter apsides, hæc minor est quam duplicata distantiarum. Vis in apside imâ est ad vim in apside summâ in minore quam duplicatâ ratione distantiæ apsidis summæ ab umbilico ellipseos ad distantiam apsidis imæ ab eodem umbilico, & contra, ubi apsides constituuntur in syzygiis, vis in apside imâ est ad vim in apside summâ in majore quam duplicatâ ratione distantiarum. Nam vires *L M* in quadraturis additæ viribus corporis *T* componunt vires in ratione minore, & vires *K L* in syzygiis subductæ à viribus corporis *T* relinquunt vires in ratione majore. Est igitur ratio decrementi & incrementi totius, in transitu inter apsides, minima in quadraturis, maxima *in syzygiis*: & propterea in transitu apsidum, à quadraturis ad syzygias perpetuò augetur, augetque excentricitatem ellipseos; inque transitu à syzygiis ad quadraturas perpetuò diminuitur, & excentricitatem diminuit.

Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fingamus planum orbis *E S T* immobile manere; & ex errorum expo-

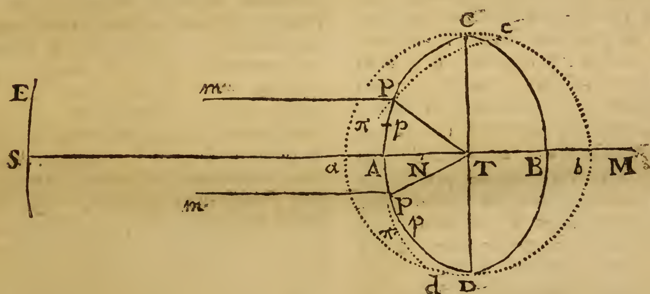
quadraturis maxima est, (ex naturâ ellipseos) patet rationem totius decrementi & incrementi vis centripetæ in transitu corporis P inter apsides minimam esse in quadraturis apsidum. Et contrà si fuerit A apsis ima, B apsis summa, erit vis in apside imâ ad vim in apside summâ ut $TB^2 \times \overline{b - cAT^3}$, ad $AT^2 \times \overline{b - cTB^3}$, adeóque in majori ratione quam TB^2, ad AT^2, & quoniam ratio TB, ad AT, in his apsidum locis maxima est, ex naturâ ellipseos, ratio decrementi & incrementi totius in transitu inter apsides, maxima est in syzygiis apsidum, & propterea singulis corporis P revolutionibus in transitu apsidum à quadraturis ad syzygias, hæc ratio perpetuò augetur, augetque excentricitatem ellipseos, & in transitu apsidum à syzygiis ad quadraturas perpetuò diminuitur, & excentricitatem diminuit. Maxima ergò est orbis excentricitas, ubi apsides sunt in syzygiis, minima ubi sunt in quadraturis.

505. Ex his etiam sequitur in unàquâque corporis P circum T revolutione excentricitatem orbis circà syzygias corporis P augeri, & circà ejus quadraturas minui, minimamque esse in illius quadraturis, maximam in syzygiis, cæteris paribus. Nam (per cor. 7.) corporis P vis centripeta tota in syzygiis decrescit in majori quam duplicatâ ratione *distantiæ auctæ*, & crescit in majori ratione quam duplicatâ distantiæ diminutæ, & in quadraturis contrà. Quarè corpus P, in syzygiis & propè syzygias describit partem orbis magis excentrici, in quadraturis verò & propè quadraturas partem orbis minus excentrici (ex demonstratis initio cor. 9.) Et quoniam vis addititia LM in quadraturis corporis P maxima est, & vis ablatitia KL in syzygiis ejus etiam maxima, vis autem addititia excentricitatem diminuit & ablatitia auget, manifestum est quod (cæteris paribus) in unâ corporis P revolutione, excentricitas orbis minima sit in quadraturis corporis P, & maxima in illius syzygiis, atque adeò quod à quadraturis ad syzygias perpetuò augeatur, & à syzygiis ad quadraturas perpetuò minuatur.

expositâ causâ manifestum est, quod ex viribus *NM*, *ML*, quæ sunt causa illa tota, vis *ML* agendo semper secundum planum orbis *PAB*, nunquam perturbat motus in latitudinem; quodque vis *NM*, ubi nodi sunt in syzygiis, agendo etiam secun- LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI.



dum idem orbis planum, ([l]) non perturbat hos motus; ([m]) ubi verò sunt in quadraturis, eos maximè perturbat, corpusque *P* de plano orbis sui perpetuò trahendo, ([n]) minuit inclinationem plani in transitu corporis à quadraturis ad syzygias, augetque vicissim



(l) * *Non perturbat hos motus.* Patet per cas. 2. prop. *66*.

(m) 506. *Ubi verò sunt in quadraturis eos maximè perturbat*; Ubi nodi sunt in quadraturis C & D inclinatio directionis vis N M (quæ lineâ P m exhibetur) ad planum orbitæ corporis P maxima est, ut pote æqualis planorum CAD, EST inclinationi & proinde, cæteris paribus, maximè potenter agit; in alio enim lineæ nodorum situ, minor est inclinatio directionis vis N M ad planum orbitæ corporis P, & evanescit cum nodi sunt in syzygiis, crescitque adeò in transitu nodorum à syzygiis ad quadraturas, & contrà decrescit in eorum transitu à quadraturis ad syzygias.

(n) 507. *Minuit inclinationem plani &c.* Si orbitæ corporis P nodi in quadraturis C, D constituantur, angulus inclinationis orbitæ ad planum immotum EST perpetuò minuitur in transitu corporis P à quadraturis

De Motu Corporum.

cissim eandem in transitu à syzygiis ad quadraturas. Unde fit ut (o) corpore in syzygiis existente inclinatio evadat omnium mi-

C c E m P π p S a A N T B b M m P π p d D

turis ad syzygias, augetur verò in transitu corporis à syzygiis ad quadraturas, & in utroque transitu nodi regrediuntur. Sit enim orbitæ P A B pars C A D suprà planum immotum E S T elevata altera, verò pars C B D infrà illud depressa intelligatur; per locum corporis P agatur recta P m parallela lineæ T S, exhibens directionem vis N M, & corpus P feratur primum à nodo seu quadraturâ C ad conjunctionem A, & quoniam corpus P vi revolutionis per arcum P p urgetur, & vi N M per rectam P m trahitur, tempore quam minimo, vi compositâ, describet lineolam P π quæ non est in plano C P T, sed ab eo deflectit versus P m, adeóque corpus movetur in plano T P π quod productum plano E S T non occurret in C sed ultra C versus oppositionem B. Centro T & intervallo T P describatur in plano E S T circulus C a D b, in plano C P D circuli arcus P C, & in plano π P T arcus P c circulo C a D b, occurrens in c. Et quoniam vis N M minima est respectu vis revolutionis corporis P, angulus C P c, inclinationis planorum C P T & c P T minimus est seu infinitesimus, & arcus P c ab arcu P C nonnisi minimâ seu infinitesimâ quantitate differt; quarè cum (ex hyp.) arcus P C à quadrante C A differat finitâ quantitate P A, summa arcuum P C, P c semicirculo minor est, & hinc in triangulo spherico C P c, angulus externus P C a (per prop. 13. sphæricorum Menelai, vel per theor. 33. Sphæricorum Clariss. Wolfii), major est angulo interno opposito P c C, hoc est, inclinatio plani c P T ad planum immotum EST minor est inclinatione plani C P T ad idem planum E S T. In transitu igitur corporis P à quadraturâ C ad conjunctionem A orbitæ inclinatio perpetuò minuitur, & quoniam nodus C transfertur in c, fitque proindè obviam corpori revolventi, nodi regrediuntur. Eodem modo demonstratur inclinationem minui & nodos regredi in transitu corporis à quadraturâ D ad oppositionem B. Jam feratur corpus à conjunctione A ad quadraturam proximam D, & in loco quovis P, duplici vi, nempè vi revolutionis per arcum P p & vi N M per rectam P m urgetur, atque adeò describit lineolam P π, quæ ab arcu P p versus P m declinat. Quarè si centro T & intervallo T P describantur ut suprà tres arcus P D, a D, P d, eodem modo demonstrabitur nodum D transferri in antecedentia in d, & angulum P d a majorem esse angulo interno opposito P D d, hoc est, inclinationem orbitæ augeri in transitu corporis P, à conjunctione ad quadraturam proximam, & eadem eodem modo ostenduntur fieri in transitu ab oppositione B ad quadraturam C. Q. E. D.

(o) * *Corpore in syzygiis existente.* Vis enim N M, cæteris paribus maxima est in syzigyis (501).

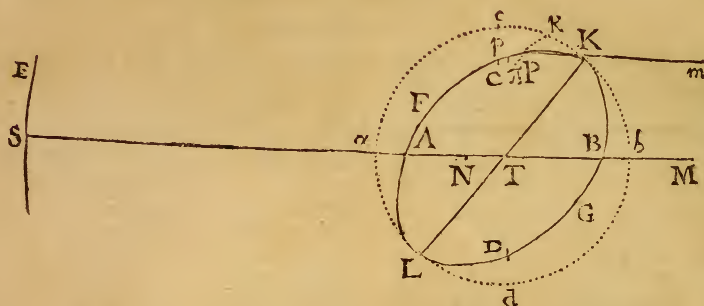
minimâ, (p) redeatque ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad nodum proximum accedit. (q) At si nodi constituan-

(p) * *Redeatque ad priorem magnitudinem circiter.* Si enim orbita C A D B perfectè circularis maneret, æqualis esset vis N M in paribus corporis P distantiis à nodis C & D, in utroque quadrante C A & A D, vel D B & B C; quarè cum orbita C A D, circulo finitima supponatur, & per vim exiguam N M minuatur inclinatio plani in transitu corporis P à quadraturis ad syzygias, & contrà augeatur per æqualem vim N M in transitu corporis P à quadraturis ad syzygias; liquet quod inclinatio redeat ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus P à syzygiá ad nodum proximum in quadraturâ positum accedit.

(q) 508. *At si nodi constituantur in octantibus post quadraturas, id est* in locis K & L ità ut anguli K T c, K T a sint æquales, seu 45°. 1°. *Inclinatio plani perpetuò minuitur in transitu corporis* P *à nodo ad gradum indè nonagesimum* F vel G. 2°. *Augetur in transitu à gradu illo* 90°. *ad quadraturam proximam.* 3°. In utroque transitu regrediuntur nodi. 4°. *In transitu* à quadraturâ *ad nodum proximum inclinatio minuitur* & nodi progrediuntur. 1um. 2um. & 3um. Eodem modo demonstrantur ac superius (505). Quartum ità ostenditur. Dum corpus P à quadraturâ D ad nodum proximum L fertur, directio vis N M, quæ antè dirigebatur à P versus m in contrariam mutatur; Quarè corpus P inter D & L positum vi revolutionis urgetur per arcum P p & vi N M ab illo arcu retrahitur versus M atque vi utrâque fertur tempore minimo per lineolam P π quæ ab arcu P p in plagam M π deflectit. Si itaque centro T & intervallo T P describantur tres arcus circulares P L, P π, L l b a, in planis T P L, T P π, E S T eodem modo ac in notâ 507. patet angulum P l L minorem esse angulo P L a. Undè in transitu corporis à quadraturâ D ad nodum proximum L inclinatio orbitæ minuitur & nodus progreditur; eadem fieri in transitu corporis à quadraturâ C ad nodum proximum K, eodem modo demonstratur. Q. E. D.

De Motu Corporum.

tuantur in octantibus post quadraturas, id est, inter *C* & *A*, *D* & *B*, intelligitur ex modo expositis, quod, in transitu corporis *P* à nodo alterutro ad gradum inde nonagesimum, inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in transitu per proximos 45 gradus, usque ad quadraturam proximam, inclinatio augetur, & postea denuò in transitu per alios 45 gradus, usque ad nodum proximum, diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quam augetur, (r) & propterea minor est semper in nodo subsequente quam in præcedente. (s) Et simili ratiocinio, inclinatio magis augetur, quam diminuitur, ubi nodi sunt

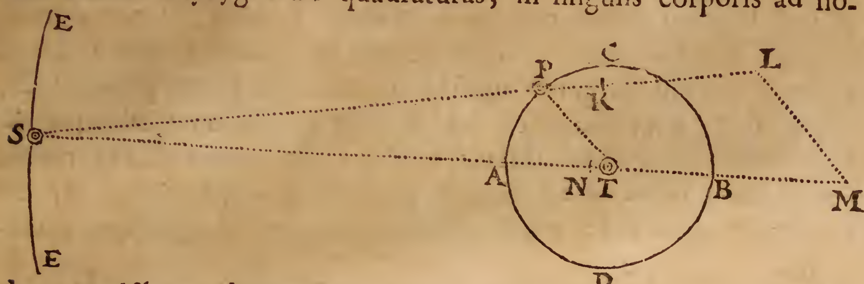


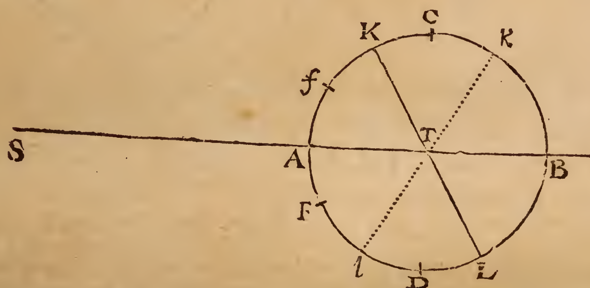
(r) * *Et propterea minor est semper inclinatio in nodo subsequente quam in præcedente*, quod verum quoque est, ubicumque constituatur nodus K inter c & a, ut patet ex ipsis demonstrationibus in notis 507. & 508. traditis.

(s) 509. *Et simili ratiocinio &c.* Si nodus K constituatur inter quadraturam C vel c & oppositionem B vel b, & nodus oppositus L inter quadraturam D vel d, & conjunctionem A seu a, feraturque corpus à nodo K per C ad alterum nodum L. 1°. In transitu corporis à nodo ad quadraturam proximam inclinatio plani perpetuò augetur & nodi progrediuntur. 2°. In transitu a quadraturâ C vel D ad gradum à nodo nonagesimum F vel G inclinatio minuitur & nodi regrediuntur. 3°. In transitu à gradu illo 90°. ad nodum proximum inclinatio augetur & nodi regrediuntur. 2um. & 3um. demonstrantur prorsus ut in notâ 507. 1um. verò ità ostenditur. Dum corpus P versatur inter nodum K & quadraturam C, vi revolutionis urgetur per arcum P p, & vi N M trahitur secundum directionem P m in plagam M, adeóque vi utrâque describet tempusculo minimo lineolam P π, quæ ab arcu P p deflectet versus P m; quarè si centro T, radio T P, describantur ut suprà arcus P K, π P K, K k c a in planis T P π, T P k, E S T patet propositum, ut in notâ 507.

510. Coroll. Ex tribus superioribus demonstrationibus (507. 508. 509.) inter se collatis manifestum est nodos progredi quamdiu corpus P inter quadraturam alterutram & nodum quadraturæ proximum versatur; eos verò regredi, dum corpus P in aliis quibuslibet locis versatur. Undè sequitur in singulis corporis P à nodo ad nodum revolutionibus nodos magis regredi quam progredi, adeóque absolutè regredi nisi fuerint in syzygiis.

ſunt in octantibus alteris inter *A* & *D*, *B* & *C*. (t) Inclinatio igitur ubi nodi ſunt in ſyzygiis eſt omnium maxima. In tranſitu eorum à ſyzygiis ad quadraturas, in ſingulis corporis ad nodos appulſibus, diminuitur; fitque omnium minima, ubi nodi ſunt in quadraturis, & corpus in ſyzygiis: dein creſcit iiſdem gradibus, quibus antea decreverat, nodiſque ad ſyzygias proximas appulſis, ad magnitudinem primam revertitur. *Co-*

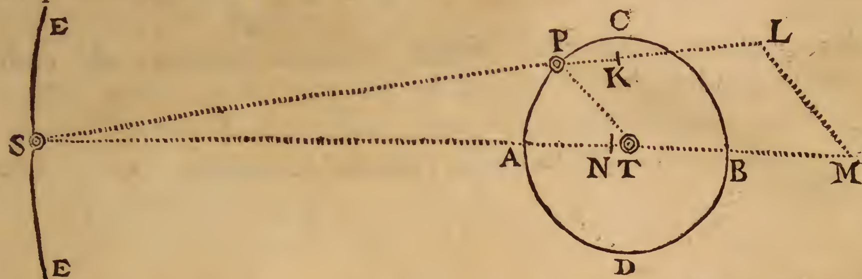




(t) * *Inclinatio igitur ubi nodi ſunt in ſyzygiis &c.* Quoniam in ſingulis corporis P à nodo ad nodum revolutionibus, linea nodorum regreditur (510) & in tranſitu nodorum à ſyzygiis A & B ad quadraturas C & D, inclinatio orbitæ perpetuò minuitur (508.) deindè verò in tranſitu nodorum à quadraturis C & D, ad ſyzygias B, & A, perpetuò augetur (509), manifeſtum eſt inclinationem minimam eſſe ubi nodi ſunt in quadraturis & corpus P in ſyzygiis (in quibus vis NM, cæteris paribus, maxima eſt) & maximam inclinationem eſſe ubi nodi ſunt in ſyzygiis. Porrò ſint nodi K & L inter C & A, D & B primum, deindè regrediendo tranſeant in loca k & l, inter C & B, D & A, ſintque arcus CK & Ck, æquales. In primo caſu inclinatio minuitur in tranſitu corporis P, per quadrantem KF, (509.) & in ſecundo caſu æqualibus viribus augetur per quadrantem fl, (509). In primo caſu inclinatio augetur per arcum FD (508.), & in ſecundo caſu æqualibus viribus minuitur per arcum cf=FD (509.) Tandem in primo caſu, inclinatio minuitur per arcum DL, (508.) & in ſecundo caſu augetur æqualibus viribus per arcum æqualem kC, (509). Quarè, cæteris paribus, in tranſitu nodorum à quadraturis ad ſyzygias inclinatio planorum iiſdem gradibus creſcit quibus anteà decreverat in tranſitu nodorum à ſyzygiis ad quadraturas, ideoque nodis ad ſyzygias proximas appulſis, ad magnitudinem primam revertitur.

De Motu Corporum.

Corol. 11. Quoniam corpus *P*, ubi nodi ſunt in quadraturis, perpetuò trahitur de plano orbis ſui, idque in partem verſus *S* in tranſitu ſuo à nodo *C* per conjunctionem *A* ad nodum *D*; & in contrariam partem in tranſitu à nodo *D* per oppoſitionem *B* ad nodum *C*: manifeſtum eſt, quod in motu ſuo à nodo *C* corpus perpetuò recedit ab orbis ſui plano primo *CD*, uſque dum perventum eſt ad nodum proximum; ideoque in hoc nodo, longiſſimè diſtans à plano illo primo *CD*, tranſit per planum orbis *EST* non in plani illius nodo altero *D*, ſed in puncto quod inde vergit ad partes corporis *S*, quodque proin-



de novus eſt nodi locus in anteriora vergens. Et ſimili argumento pergent nodi recedere in tranſitu corporis de hoc nodo in nodum proximum. (u) Nodi igitur in quadraturis conſtituti perpetuò recedunt; in ſyzygiis, ubi motus in latitudinem nil perturbatur, quieſcunt; in locis intermediis, conditionis utriuſque participes, recedunt tardius: ideoque, ſemper vel retrogradi, vel ſtationarii ſingulis revolutionibus feruntur in antecedentia.

Co-

(u) * *Nodi igitur in quadraturis conſtituti &c.* In integrâ corporis P revolutione, nodi partim regrediuntur, partim progrediuntur, niſi fuerint in quadraturis vel in ſyzygiis conſtituti (510); dum autem in quadraturis verſantur, vis NM, quæ eorum regreſſum producit, maxime potenter agit (506); quare nodi in quadraturis conſtituti celerrimè regrediuntur; in ſyzygiis ubi motus in latitudinem nihil perturbatur quieſcunt, in locis intermediis recedunt quidem ſingulis revolutionibus corporis P, (509), ſed tardius quam in quadraturis, *ideoque ſemper &c.*

511. Lemma. Si fuerint tres quantitates a, $a+b$, $a+2b$ in continuâ proportione arithmeticâ, ratio 2æ. ad 1am. (quæ è tribus eſt minima) major erit quam ratio 3æ. (quæ eſt maxima) ad 2am. Eſt enim $a+b : a = \overline{a+b} \times \overline{a+b} : aa+ab = aa+2ab+bb : aa+ab$; ſed eſt $a+2b : a+b = aa+2ab : aa+ab$. Ergo cum ratio $aa+2ab+bb$ ad $aa+ab$ major ſit quam ratio $aa+2ab$ ad $aa+ab$, erit ratio $a+b$ ad a major ratione $a+2b$ ad $a+b$.

Corol. 12. Omnes illi in his corollariis descripti errores sunt paulò majores in conjunctione corporum P, S, quam in eorum oppositione; (x) idque ob majores vires generantes NM & ML.

LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI.

Corol. 13. Cumque rationes horum corollariorum non pendeant à magnitudine corporis S, obtinent præcedentia, omnia ubi corporis S tanta statuitur magnitudo, (y) ut circa ipsum revolvatur corporum duorum T & P systema. Et ex aucto corpore S auctâque

(x) * *Idque ob majores vires generantes* NM & ML. Vis LM in conjunctione est ut $\frac{AT}{SA^3}$, & vis lm in oppositione est ut $\frac{TB}{SB^3}$ (495). Quarè (cæteris paribus) hoc est, si fuerit AT = TB vis ML in conjunctione major erit vi ml in oppositione propter SA^3 minorem quam SB^3. Quod erat unum. Porrò si AT & BT sint æquales, tres lineæ SA, ST, SB erunt in continuâ proportione arithmeticâ & proindè SK mediocris distantia corporis P ab S erit æqualis ST; & quoniam SK exhibet vim acceleratricem corporis P versùs S in mediocri distantiâ SK, & SN exponit vim acceleratricem corporis T versus S, (prop. 66.) erit SN = ST, atque adeò NM = TM, & mN = Tm. Sed quoniam PT, seu AT : ST = LM : SM, erit $SM = \frac{ST \times LM}{AT}$, & similiter invenietur $Sm = \frac{ST \times lm}{AT}$, adeóque $TM = SM - ST = \frac{ST \times LM - ST \times AT}{AT}$, & $Tm = ST - sm = \frac{ST \times AT - ST \times lm}{AT}$; undè differentia TM − Tm, erit ut ST×LM + ST × lm − ST × 2AT, hoc est, ut LM + lm − 2AT; Est autem summa LM + lm, major quam 2AT. Nam cum sit (495) $LM = \frac{ST^3 \times AT}{SA^3}$, & $lm = \frac{ST^3 \times AT}{SB^3}$, recta LM major est rectâ AT, in ratione ST^3 ad SA^3, & lm minor est AT in ratione SB^3 ad ST^3. Est verò ratio ST^3 ad SA^3, major ratione SB^3 ad ST^3 (511.) & proindè differentia rectarum LM & AT major erit quam differentia rectarum AT & lm, & ideò summa LM + lm major est quam 2AT; Quare tandem erit TM major quam Tm, seu vis NM major in conjunctione quam in oppositione; Quod erat alterum.

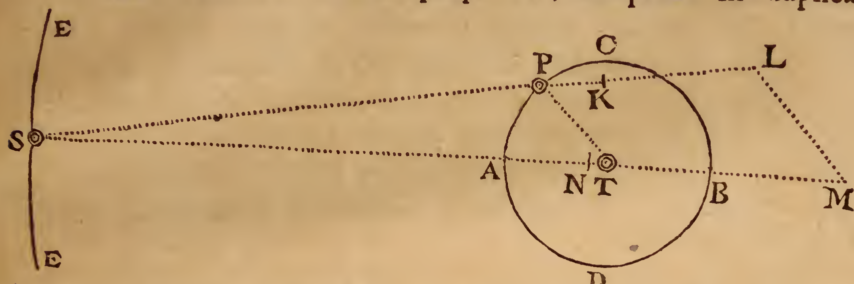
(y) * *Ut circà ipsum revolvatur &c.* Demonstrationes enim sunt eædem, sive corpus S moveatur circum T, seu corpus T revolvatur circum S.

tâque ideo ipsius vi centripetâ à quâ errores corporis *P* oriuntur, evadent errores illi omnes, paribus distantiis, majores in hoc casu quam in altero, ubi corpus *S* circum systema corporum *P* & *T* revolvitur.

Corol. 14. (z) Cum autem vires *NM*, *ML*, ubi corpus *S* longinquum est, sint quamproximè ut vis *SK* & ratio *PT* ad *ST* conjunctim, hoc est, si detur tum distantia *PT*, tum corporis *S* vis absoluta, ut *ST cub.* reciprocè; sint autem vires illæ *NM*, *ML* causæ errorum & effectuum omnium, de quibus actum est in præcedentibus corollariis: manifestum est, quod effectus illi omnes, stante corporum *T* & *P* systemate, & mutatis tantum distantiâ *ST* & vi absolutâ corporis *S*, sint quamproximè in ratione compositâ ex ratione directâ vis absolutæ

(z) 512. * *Cum autem vires NM, ML &c.* Ob magnam distantiam corporis S, erit ferè L S parallela M S, & SN = ST = SK, ac ML = PT; & quoniam NM in syzygiis est ut ML in quadraturis (501). Si auctâ vel diminutâ actione corporis S, orbita CADB unà cum lineis hinc pendentibus PT, NM, ML augeatur vel diminuatur (cor. 6. hujus prop. 66.) tres illæ lineæ in eâdem ferè ratione inter se (cæteris paribus) augebuntur vel diminuentur. Est autem vis ML ad vim SK ut recta ML ad rectam SK, seu quam proximè ut PT ad ST; Quarè vis ML (adeóque & vis NM) est quam proximè ut vis SK & ratio PT, ad ST, conjunctim, hoc est, si vis acceleratrix SK dicatur *A* ut $\frac{A \times PT}{ST}$. Porrò datâ vi absolutâ corporis S, vis acceleratrix *A* in distantiâ SK seu ST est ut $\frac{1}{ST^2}$, (ex hyp.) Quarè vires NM, ML, datâ vi absolutâ corporis S, sunt ut $\frac{PT}{ST^3}$; hoc est (si detur distantia PT) ut ST^3 reciprocè. Verùm si variabilis sit vis absoluta *V* corporis S, erit vis acceleratrix *A* in distantiâ ST, ut vis absoluta *V* directè & quadratum distantiæ ST inversè, (nam manente vi absolutâ corporis S, vis acceleratrix est ut ST^2 inversè, & manente distantiâ ST vis acceleratrix est ut vis absoluta directè, proindéque variantibus vi absolutâ & distantiâ simul, vis acceleratrix est ut vis absoluta directè & quadratum distantiæ inversè); Quarè si loco vis acceleratricis *A* ratio illa composita in facto $\frac{A \times PT}{ST}$ ponatur, vires NM, ML erunt quam proximè ut $\frac{V \times PT}{ST^3}$, seu datâ PT, ut $\frac{V}{ST^3}$, hoc est *in ratione compositâ* ex ratione directâ *vis absolutæ corporis* S, & ratione *triplicatâ inversâ distantiæ* ST. Vis autem absoluta corporis S, est (ex Dem.) in ratione compositâ vis acceleratricis A & quadrati distantiæ ST, & vis acceleratrix *A* in distantiâ ST est (per coroll. 2. prop. 4.) in ratione compositâ ex ratione directâ distantiæ ST & ratione duplicatâ inversâ temporis periodici corporis T circum S ad distantiam ST circulum describentis, adeóque vis absoluta corporis *S* est ut cubus distantiæ ST directè, & quadratum temporis periodici corporis T inversè. Quarè vires NM, ML (earumque effectus) quæ sunt directè ut vis absoluta, & inversè ut cubus distantiæ, sunt reciprocè in duplicatâ ratione temporis periodici corporis T.

lutæ corporis *S*, & ratione triplicatâ inversâ distantiæ *ST*. Unde si systema corporum *T* & *P* revolvatur circa corpus longinquum *S*; vires illæ *NM*, *ML*, & earum effectus erunt (per corol. 2. & 6. prop. IV.) reciprocè in duplica-



tâ ratione temporis periodici. Et inde etiam, (a) si magnitudo corporis *S* proportionalis sit ipsius vi absolutæ, erunt vires illæ *NM*, *ML*, & earum effectus directè ut cubus diametri apparentis longinqui corporis *S* è corpore *T* spectati, & vice versâ. Namque hæ rationes eædem sunt, atque ratio superior composita.

Corol. 15. (b) Et quoniam si, manentibus orbium *ESE* & *PAB* formâ, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur

(a) * *Si magnitudo seu massa corporis S proportionalis sit ipsius vi absolutæ*, dato corpore S dabitur vis illius absoluta; undè si præterea data sit distantia PT, *vires NM, ML & earum effectus erunt*, ex suprà demonstratis, ut cubus distantiæ ST inversè; sed diameter apparens FG corporis longinqui S ex T visi, hoc est, angulus FTG sub quo diameter FG de loco T videtur, est ut distantia ST inversè; nam cum globi S diameter parva admodum supponatur respectu distantiæ ST, angulus FTG, erit admodum exiguus, & globi radius SF ad ST normalis usurpari poterit pro arcu circuli centro T & intervallo TS descripti, adeóque (154) angulus $FTS = \frac{FS}{ST}$, hoc est, ob datum radium SF, angulus FTS & ipsius duplus FTG erit ut ST inversè. *Vires igitur NM, ML earumque effectus, erunt ut cubus diametri apparentis corporis longinqui S è corpore T spectati.*



(b) * *Et quoniam si manentibus &c.* Hoc est, si corporum S & T vel maneant vel mutentur vires absolutæ in datâ quâvis ratione, & orbium ESE & PAB, magnitudo itâ mutetur, ut orbis ESE sibi similis semper maneat, sicut & orbis PAB sibi, & horum orbium inclinatio non mutetur, nec proportio seu ratio axium unius orbis ad axes alterius aut linearum quarumvis in uno orbe ad lineas homologas in altero orbe.

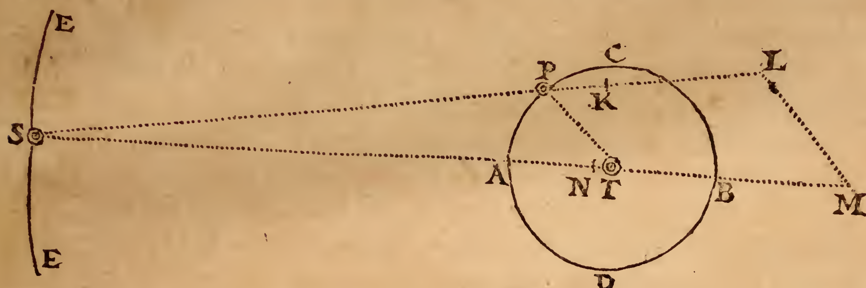
tetur eorum magnitudo, & si corporum *S* & *T* vel maneant, vel mutentur vires in datâ quâvis ratione; (c) hæ vires (hoc est, vis corporis *T*, quâ corpus *P* de recto tramite in orbitam *PAB* deflectere, & vis corporis *S*, quâ corpus idem *P* de orbitâ illâ deviare cogitur) agunt semper eodem modo, & eâdem proportione: necesse est ut similes & proportionales sint effectus omnes, & proportionalia effectuum tempora; hoc est, ut errores omnes lineares sint ut orbium diametri, angulares verò iidem, qui prius, & errorum linearium similium, vel angularium æqualium tempora ut orbium tempora periodica.

Corol. 16. Unde, si dentur orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutentur utcunque corporum magnitudines, vires & distantiæ; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno casu, colligi possunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proximè: sed brevius hâc methodo. (d) Vires *NM*, *ML*, cæteris stantibus, sunt ut radius *TP*, & harum effe-

(c) * *Hæ vires &c.* Vis acceleratrix quâ corpus P in loco P versùs T trahitur, est (512) ad vim acceleratricem quâ versus S urgetur, in ratione compositâ ex ratione directâ vis absolutæ corporis T ad vim absolutam corporis S, & ratione inversâ duplicatâ distantiæ PT ad distantiam PS. Quarè si vires absolutæ & distantiæ in datis rationibus mutentur, manebit eadem virium acceleratricium ratio, & ob figurarum similitudinem, in similibus corporum *P*, *T*, *S* positionibus, antè & post distantias viresque mutatas omnium linearum SP, SK, ML, SM, NM, &c. eadem manet ratio, atque adeò vires agunt semper eodem modo & eâdem proportione. Necesse igitur est ut antè & post distantias, & vires mutatas in datis rationibus, similes ac proportionales sint effectus omnes & proportionalia effectuum tempora (196) hoc est, errores omnes lineares similes à viribus ML, NM producti, seu deviationes corporis *P* in longitudinem & latitudinem à locis illis in quibus versaretur, si viribus perturbantibus ML, NM non agitaretur, sunt ut orbium diametri, & anguli sub quibus é centro T deviationes illæ similes videntur, semper manent æquales, ut patet ex naturâ figurarnm similium (Lem. V. & not. 112), & errorum linearium similium vel angularium æqualium tempora, sunt ut orbium tempora periodica (196). Hæc omnia etiam obtinent, ubi corporum duorum *T*, & *P* systema circà corpus S revolvitur, ut patet, si loco orbis ESE in demonstratione ponatur orbis quem corpus T circum S describit.

(d) * *Vires NM, ML &c.* Quoniam vires NM, ML sunt (cor. 14.) ut vis SK & ratio PT ad ST conjunctim, manentibus vi SK & ST erunt vires illæ ut radius TP & proindè aucto vel diminuto radio illo TP, manent in datâ inter se ratione, & quoniam ob longinquitatem corporis S ad similes orbis variabilis PAB (sed sibi semper similis & æquè inclinati) partes similiter applicantur quamproximè, illarum effectus periodici (per coroll. 2. Lem. X.) sunt ut vires ipsæ & quadratum temporis periodici corporis *P* circum T cor-

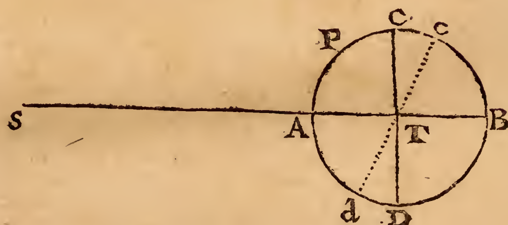
effectus periodici (per corol. 2. lem. x.) ut vires, & quadratum temporis periodici corporis *P* conjunctim. Hi sunt errores lineares corporis *P*; & hinc errores angulares è centro *T* spectati (id est, tam motus augis & nodorum, quàm omnes



in longitudinem & latitudinem errores apparentes) sunt, in quâlibet revolutione corporis *P*, ut quadratum temporis revolutionis quam proximè. Conjungantur hæ rationes cum rationibus corollarii XIV. & in quolibet corporum *T*, *P*, *S* systemate, ubi *P* circum *T* sibi propinquum, & *T* circum *S* longinquum re-

vol-

conjunctim, hoc est, ut radius TP, & quadratum temporis periodici corporis P quamproximè. Porrò si in orbitâ circulari vel circulo finitima PAB, sit arcus Dd error linearis periodicus v. gr. nodi D in antecedentia ad d regressi tempore unius revolutionis corporis *P* circum T, angulus DTd, sub quo error ille Dd è centro T videtur, hoc est, error angularis periodicus erit $= \frac{Dd}{TD}$ (154). Errores igitur angulares periodici sunt ut errores lineares directè & radius TD vel TP inversè, adeóque ut quadratum temporis periodici corporis *P* quamproximè. Et hæc quidem vera sunt, stantibus vi absolutâ corporis *S* & distantiâ ST & variantibus radio TP ac tempore periodico corporis *P*; verum stantibus radio TP & tempore periodico corporis *P* & variantibus vi absolutâ corporis *S* atque distantiâ ST, errores periodici tum lineares, tum angulares sunt (coroll. 14.) recipro-



cè ut quadratum temporis periodici corporis T circum *S*, quarè variantibus tum radio TP, & tempore periodico corporis *P*, tum radio ST, atque vi absolutâ corporis *S*, errores angulares corporis P de centro T apparentes, erunt in singulis revolutionibus corporis illius *P* circum T, in ratione ex binis superioribus rationibus compositâ, seu erunt ut quadratum temporis periodici corporis P, directè & quadratum temporis periodici corporis T, inversè.

De Motu Corporum.

volvitur, errores angulares corporis P, de centro T apparentes, erunt, in singulis revolutionibus corporis illius P, ut quadratum temporis periodici corporis P directè, & quadratum temporis periodici corporis T inversè. (e) Et inde motus medius augis erit in datâ ratione ad motum medium nodorum; & motus uterque erit ut tempus periodicum corporis P directè & quadratum temporis periodici corporis T inversè. Augendo vel minuendo excentricitatem & inclinationem orbis PAB (f) non mutantur motus augis & nodorum sensibiliter, nisi ubi eædem sunt nimis magnæ.

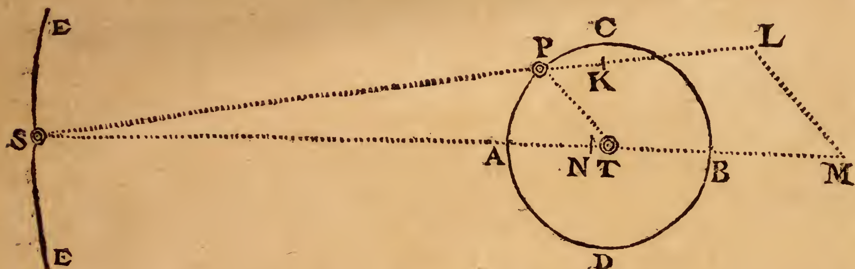
Corol. 17. Cum autem linea LM nunc major sit nunc minor quam radius PT, exponatur vis mediocris LM per radium illum PT; & erit hæc ad vim mediocrem SK vel SN (quam exponere licet per ST) ut longitudo PT ad longitudinem ST. Est autem vis mediocris SN vel ST, quâ corpus T retinetur in orbe suo circum S, ad vim, quâ corpus P retinetur in orbe suo circum T, (g) in ratione compositâ ex ratione radii ST, ad radium PT, & ratione duplicatâ temporis periodici cor-

(e) * *Et indè motus medius augis &c.* Si corpus quodvis celeriùs & tardiùs vel in plagas oppositas per vices moveatur, illius velocitas æquabilis media, seu motus medius obtinetur, si spatium quod corpus illud in unam plagam latum, longo satis tempore percurrit, per illud notabile tempus dividatur. Hinc quoniam apsidum & nodorum motus tardior & celerior est per vices, nuncque in antecedentia, nunc in consequentia fit, invenitur illorum motus medius angularis, si spatium angulare totum, quod plurium revolutionum corporis P tempore describunt, per illud tempus dividatur. Quare cum motus angularis periodicus augis & nodorum sit (ex Dem.) ut quadratum temporis periodici corporis P directè, & quadratum temporis periodici corporis T inversè, si ratio hæc composita per tempus periodicum corporis P pluries sumptum dividatur, erit quotiens seu motus medius angularis augis & nodorum ut tempus periodicum corporis P directè & quadratum temporis periodici corporis T inversè; & indè motus medius augis & nodorum, qui sunt ambo ut eadem quantitas, seu ut tempus periodicum corporis P directè & quadratum temporis periodici corporis T inversè, datam habent ad se mutuò rationem.

(f) * *Non mutantur &c.* Nam vires ML, NM motuum augis & nodorum productrices, cæteris stantibus, non multum mutantur, si augeatur vel minuatur excentricitas & inclinatio orbis PAB, nisi magna satis fuerit illa mutatio, ut patet ex ratione quâ vires illæ ML, NM prop. 66. determinantur.

(g) * *In ratione compositâ ex ratione radii ST &c.* Nam (per cor. 2. prop. 4.) vis acceleratrix mediocris ST quâ corpus T circum S, ad distantiam ST circulum vel orbem circulo finitimum describere supponitur, est ad vim similem quâ corpus P in orbitâ suâ circulari vel circulo finitimâ retinetur in ratione compositâ ex ratione radii ST ad radium PT directè, & ratione duplicatâ temporis perio-

corporis *P* circum *T* ad tempus periodicum corporis *T* circum *S* Et ex æquo, vis mediocris *LM* ad vim, quâ corpus *P* retinetur in orbe ſuo circum *T* (quâve corpus idem *P*, eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile *T* ad diſtantiam *PT* revolvi poſſet) eſt in ratione illâ duplicatâ periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis unà cum diſtantia *PT*, datur vis mediocris *LM*; (h) & eâ datâ, datur etiam vis *MN* quam proximè per analogiam linearum *PT*, *MN*.



Corol. 18. Iiſdem legibus, quibus corpus *P* circum corpus *T* revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem *T* ad æquales ab ipſo diſtantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari annulum fluidum, rotundum ac corpori *T* concentricum; & ſingulæ annuli partes, motus ſuos omnes ad legem corporis *P* peragendo, propius accedent ad corpus *T*, & celerius movebuntur in conjunctione & oppoſitione ipſarum & corporis *S*, quam in quadraturis. Et nodi annuli hujus, ſeu interſectiones ejus cum plano orbitæ corporis *S* vel *T*, qui-

riodici corporis T circum S, ad tempus periodicum corporis *P* circum T, inversè. Quarè vis prior eſt ad poſteriorem in ratione compoſitâ ex ratione radii S T ad radium P T, & ratione duplicatâ temporis periodici corporis *P* ad tempus periodicum corporis *T*; cumque ſit etiam, ex Dem., vis mediocris L M ad vim mediocrem ST, ut P T ad ST, erit per compoſitionem rationum & ex æquo, vis mediocris L M, ad vim acceleratricem quâ corpus *P* retinetur in orbe ſuo circum T, ut quadratum temporis periodici corporis *P* circum T ad quadratum temporis periodici corporis *T* circum S.

(h) * *Et eâ datâ*, datur etiam vis N M (500).

quiescent in syzygiis; extra syzygias verò movebuntur in antecedentia, & velocissimè quidem in quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, (i) & axis ejus singulis revolutionibus oscillabitur, completâque revolutione ad pristinum situm redibit, nisi quâtenus per præcessionem nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam globum corporis *T*, ex materiâ non fluidâ constantem, ampliari & extendi usque ad hunc annulum, & alveo per circuitum excavato continere aquam, motuque eodem periodico circa axem suum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in superiore corollario) (k) in syzygiis velocior erit, in quadraturis tardior quam superficies globi, & sic fluet in alveo refluetque ad modum maris. Aqua, revolvendo circa globi centrum quiescens, si tollatur attractio corporis *S*, nullum acquiret motum fluxus & refluxus. (l) Par est ratio globi uniformiter progredientis in directum, & interea revolventis circa centrum suum (per legum corol. v.) ut & globi de cursu rectilineo uniformiter tracti, (per legum corol. 6.) Accedat autem corpus *S*, & ab ipsius inæquabili attractione mox turbabitur aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. (m) Vis autem *L M* trahet aquam deorsum in quadraturis, facietque ipsam

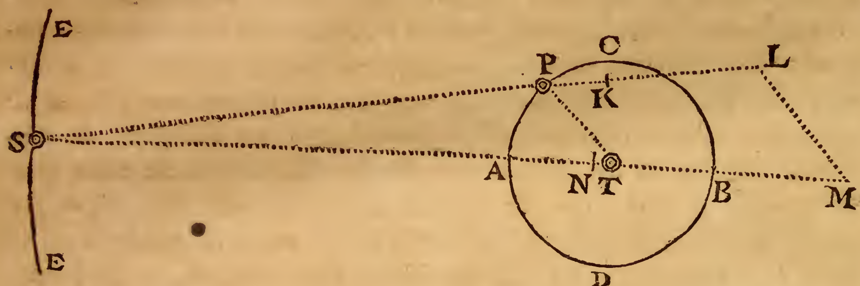
(i) * *Et axis ejus* seu recta per centrum annuli ducta ad planum ejus perpendiculariter, cum plano illo *singulis revolutionibus oscillabitur*, hoc est, ad planum E S T magis & minus per vices inclinabitur (cor. 10.) *completaque* &c. totum verò corollarium patet ex coroll. 3. 5. 10. 11. 13.

(k) * *In syzygiis velocior erit &c.* Per cor. 18. & 3. Nam velocitas uniformis quâ globus circà axem suum revolvitur eodem tempore periodico quo pars quælibet fluidi suam revolutionem absolvit, media erit inter maximam velocitatem fluidi in syzygiis & minimam in quadraturis.

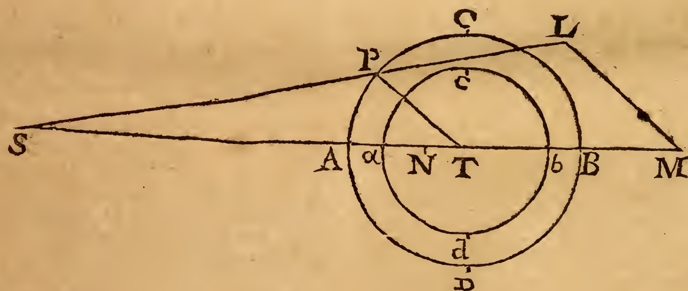
(l) * *Par est ratio &c.* Id est, exclusâ actione corporis S aqua uniformiter revolvendo circum centrum *globi vel uniformiter moti in directum* vel de cursu rectilineo per lineas parallelas uniformiter tracti, nullum acquiret motum fluxûs & refluxûs, *accedat autem* &c.

(m) * 514. *Vis autem LM &c.* Patet per coroll. 5. Verum ut totum hoc corollarium 19um. clarius intelligatur, sit c a d b globi solidi æquator hoc est, circulus globi maximus ad axem rotationis globi perpendicularis CADB zona fluida satis profunda, seu annulus fluidus globo circumpositus, & supponendo quod centrum gravitatis globi solidi accuratè vel quamproximè concidat cum figuræ centro T, globus eodem quamproxime modo trahetur à corpore longinquo S, & trahet ipse particulam P fluidi (71) ac si tota illius

ipſam deſcendere uſque ad ſyzygias; & vis KL trahet eandem ſurſum in ſyzygiis, ſiſtetque deſcenſum ejus & faciet ipſam aſcendere uſque ad quadraturas: niſi quâtenus motus fluendi & refluendi ab alveo aquæ dirigatur, & per frictionem aliquâtenus retardetur.



Corol. 20. Si annulus jam rigeat, & minuatur globus, ceſſabit motus fluendi & refluendi; (n) ſed oſcillatorius ille inclinationis motus & præceſſio nodorum manebunt. Habeat globus eundem axem cum annulo, gyroſque compleat iiſdem temporibus, & ſuperficie ſuâ contingat ipſum interius, eique inhæreat; & participando motum ejus, compages utriuſque oſcillabitur, & nodi regredientur. (o) Nam globus, ut mox dicetur, ad



illius maſſa eſſet in centro T coacta (quod quidem accurate verum eſſe quibuſdam in caſibus poſteà demonſtrabitur), ſed hic approximatio ſufficit; quare fluidi particula quævis P à corpore S inæqualiter attracta totuſque proinde annulus movebuntur, ut in coroll. 19°. ex corollariis præcedentibus determinatum eſt.

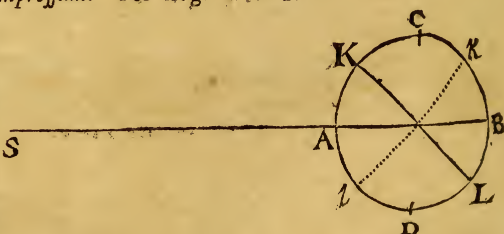
(n) * *Sed oſcillatorius ille &c.* Patet per cor. 18. & not. ſuperiorem.

(o) * *Nam globus indifferens eſt &c.* Liquet etiam ex legibus 1. & 2ª, & not. 90.

De Motu Corporum.

ſuſcipiendas impreſſiones omnes indifferens eſt. Annuli globo orbati maximus inclinationis angulus eſt, ubi nodi ſunt in ſyzygiis. Inde in progreſſu nodorum ad quadraturas conatur is inclinationem ſuam minuere, & iſto conatu motum imprimit globo toti. (p) Retinet globus motum impreſſum, uſque dum annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: Atque (q) hâc ratione maximus decreſcentis inclinationis motus fit in quadraturis nodorum, & minimus inclinationis angulus in octantibus poſt quadraturas; dein maximus reclinationis motus in ſyzygiis, & maximus angulus in octantibus proximis. Et eadem eſt ratio globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior eſt paulò quam juxta polos, vel conſtat ex materiâ paulo denſiore. (r) Supplet enim vicem annuli iſte materiæ in æquatoris regionibus exceſſus. Et quanquam, auctâ utcunque globi hujus vi centripetâ, tendere ſupponantur omnes ejus partes deorſum,

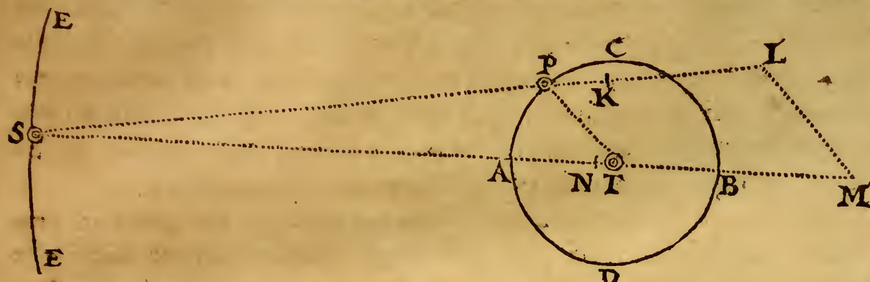
(p) * *Retinet globus motum impreſſum.* Per Leg. 1. & 2.



(q) * *Atque hâc ratione maximus inclinationis motus fit in quadraturis nodorum* (per coroll. 18. & 10.) non ideò tamen ibidem fit minimus inclinationis angulus, ſed in octantibus poſt quadraturas. Sint enim nodi K & L in octantibus poſt ſyzygias A & B, & retrogrediendo accedant ad quadraturas C, D; dum nodus K percurrit arcum K C, & nodus L, arcum L D, inclinatio per actionem vis N M, continuò decreſcit, cumque nodus K, pervenit in C, & tranſit ad octantem k perſeverat, ex inertiâ materiæ, motus inclinationis decreſcentis per totum arcum K C impreſſus; Licet vis N M in contrarium agat per totum arcum C k = C K; vis enim N M per arcum C k motum inclinationis decreſcentis iiſdem gradibus diminuit, quibus per arcum K C productus & acceleratus eſt. Quare ille decreſcentis inclinationis motus penitùs non deſtruitur, niſi nodus K pervenerit in k tumque vis N M planum reclinat, hoc eſt, nodo exiſtente in k incipit motus reclinationis ſive motus inclinationis creſcentis & perſeverat uſque ad octantem proximum L atque ibi ceſſat. Liquet igitur minimum angulum inclinationis fieri in octantibus nodorum k, l poſt quadraturas C, D maximum verò dum nodi verſantur in octantibus K & L poſt ſyzygias A, B.

(r) * *Supplet enim vicem annuli &c.* Patet per not. 514. Si materiæ in æquatoris regionibus exceſſus per annulum C c A D b, (vid. fig. not. 514.) exhibeatur & reliqua globi materia in centro T coacta intelligatur.

ſum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen phænomena hujus & præcedentis corollarii (f) vix inde mutabuntur; niſi quod loca maximarum & minimarum altitudinum



aquæ diverſa erunt. Aqua enim jam in orbe ſuo ſuſtinetur & permanet, non per vim ſuam centrifugam, ſed per alveum in quo fluit. Et præterea vis LM trahit aquam deorſum maxime in quadraturis, & vis KL ſeu $NM-LM$ trahit

(f) * *Vix indè mutabuntur:* Nam major partium globi in centrum T gravitas non impedit quin annulus fluidus vel ſolidus, impreſſiones virium LM, NM ſuſcipiat, loca tamen maximarum & minimarum altitudinum aquæ diverſa erunt. Hucuſque enim ſuppoſuimus particulas aquæ ex virium centripetæ & centrifugæ æquilibrio, in orbe ſuo ſuſtineri & permanere inſtar corporis ſolitarii *P* circum T in ſpatio libero revolventis; atque indè ex cor. 5. oſtenſum eſt in cor. 18. maximam aquæ altitudinem in quadraturas incidere, minimam in ſyzygias. Verùm ſi manente eâdem vi centrifugâ augeatur vis centripeta, ſeu gravitas particularum aquæ, particulæ illæ non vi ſuâ centrifugâ, ſed alvei parietibus, ut in mari atque fluminibus telluris contingit, ſuſtinentur & in orbe ſuo permanent ac proindè non amplius ad legem corporis ſolitarii circum centrum T, in ſpatio libero revolventis à centro illo T recedunt, vel ad illud accedunt. Loca igitur maximarum & minimarum altitudinum aquæ diverſa erunt. Velocitas tamen partium aquæ, cæteris paribus, maxima erit in ſyzygiis, minima in quadraturis (per cor. 3). Præterea vis LM addititia trahit aquam deorſum, ſeu ad centrum T, maximè in quadraturis (513.) & vis ablatitia KL trahit eandem ſurſum, maxime in ſyzygiis (501) & ideò ſi globus cum aquâ circumpoſitâ non revolveretur circà centrum T, minimæ aquarum altitudines in quadraturis C & D, maximæ in ſyzygiis A & B eſſent; verum revolvente cum globo aquâ à C ad A, vis additia poſt quadraturas agens aquam deorſum ſemper urget, donec vi ablatitiâ vincatur; & ſimiliter hæc vis ablatitia poſt ſyzygias ſurſum trahit aquas, quarum proinde minimæ altitudines non incident in quadraturas, ſed poſt quadraturas, maximæ verò poſt ſyzygias. Inſuper rotatio globi circà proprium axem maximas aquarum altitudines à ſyzygiis A & B verſus quadraturas D & C transfert, intereadum vires LM, NM ſimul junctæ maximas eas aquarum altitudines in ſyzygiis inſtaurare perpetuò nituntur, aqua autem à C & D continuò fluit verſus A & B, cum elevatio ab A verſus D & à B verſus C transfertur, & ideò inter A & D ut & inter B & C dantur duo motus contrarii quibus aqua accumulatur ità ut altitudines maximæ inter hæc puncta incidant fere circà octantes.

De Motu Corporum.

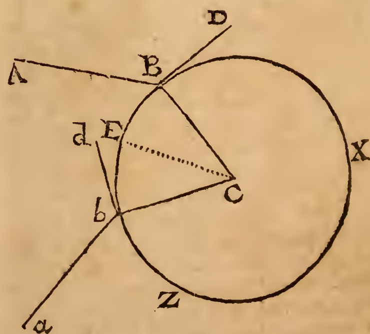
hit eandem sursum maximè in syzygiis. Et hæ vires conjunctæ desinunt trahere aquam deorsum & incipiunt trahere aquam sursum in octantibus ante syzygias, ac desinunt trahere aquam sursum incipiuntque trahere aquam deorsum in octantibus post syzygias. Et inde maxima aquæ altitudo evenire potest in octantibus post syzygias, & minima in octantibus post quadraturas circiter; nisi quâtenus motus ascendendi vel descendendi ab his viribus impressus vel per vim insitam aquæ paulò diutius perseveret, vel per impedimenta alvei paulò citius sistatur.

Corol. 21. Eâdem ratione, quâ materia globi juxta æquatorem redundans efficit ut nodi regrediantur, atque ideo per hujus incrementum augetur iste regressus, per diminutionem verò diminuitur, & per ablationem tollitur; (t) si materia plusquam redundans tollatur, hoc est si globus juxta æquatorem vel depressior reddatur, vel rarior quam juxta polos, orietur motus nodorum in consequentia.

Corol. 22. Et inde vicissim, ex motu nodorum innotescit constitutio globi. Nimirum si globus polos eosdem constanter servat, & motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; si in consequentia, deficit. Pone globum uniformem & perfectè circinatum in spatiis liberis primo quiescere; dein impetu quocunque obliquè in superficiem suam facto propelli, & motum inde concipere (u) partim circularem, partim in directum

(t) * *Si materia plusquam redundans tollatur*, seu si materia redundans negativa fiat, motus nodorum qui erat in antecedentia, negativus evadet, hoc est, orietur motus nodorum in consequentia.

(u) * *Partim circularem, partim in directum.* Vis A B quâ globus BXZ obliquè impellitur, secundum directionem A B, in duas vires resolvitur, quarum altera ad centrum C juxta radium B C dirigitur, ei motum globi in directum producit, altera secundum tangentem B D radio B C normalem agit, & motum rotationis circà axem plano ABDXC perpendicularem inducit.



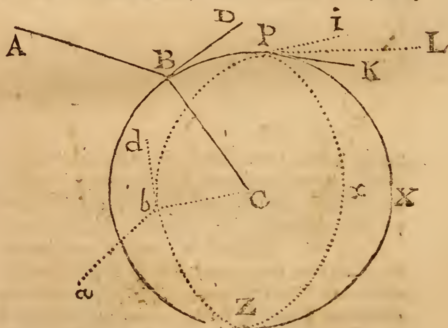
rectum. Quoniam globus iste ad axes omnes per centrum suum transeuntes indifferenter se habet, neque propensior est in unum axem, unumve axis situm, (x) quam in alium quemvis; perspicuum est, quod is axem suum, axisque inclinationem vi propriâ nunquam mutabit. (y) Impellatur jam globus obliquè, in eâdem illâ superficiei parte, quâ prius, impulsu quocunque novo; & cùm citior vel serior impulsus effectum nil mutet, manifestum est, quod hi duo impulsus successivè impressi eundem producent motum, ac si simul impressi fuissent, hoc est, eundem, ac si globus vi simplici ex utroque (per legum corol. 2.) compositâ impulsus fuisset, atque ideo simplicem, circa axem inclinatione datum. (z) Et par est ratio impulsûs secundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulsus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulsus secundus sine primo generaret; atque ideo impulsuum amborum factorum in loca quæcunque: (a) genera-

(x) * *Quam in alium quemvis*; antequam motus imprimatur, perspicuum est quod is axem suum rotationis axisque inclinationem ad planum quodvis positione datum vi propriâ nunquam mutabit.

(y) * *Impellatur jam globus obliquè, in eâdem illâ superficiei parte* B *quâ priùs &c.*

(z) * *Et par est ratio impulsûs secundi facti in locum alium quemvis b, in æquatore BXZ motûs primi.* Resolvitur enim vis a b in duas vires, quarum una ad centrum C dirigitur per radium b C; alia secundùm tangentem b d agit; & vires duæ utriusque impulsus ad centrum C per radios BC, b C directæ in unam componentur secundùm directionem radii alicujus E C agentem, quâ globus in directum movebitur uniformiter; vires autem B D, b d quæ rotationem globi producunt, eodem modo componuntur ad unicum rotationis motum efficiendum ac si fuisset vis B D in loco b impressa, aut vis b d, in loco B æquatoris B X Z motûs primi; vis enim BD eundem rotationis motum inducit, sivè imprimatur in B, sivè in b.

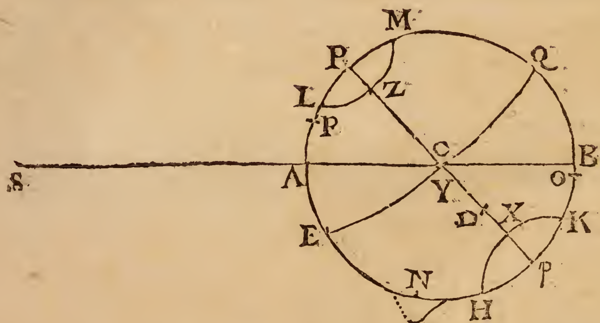
(a) * *Generabunt hi &c.* Globus BPXZb duabus viribus A B, a b obliquè impellatur, iisque singulis in duas alias vires, secundùm directiones B C, B D; b c, b d ut suprà divisis, sit BPXZ æquator quem punctum B vi B D describit, & b P x Z æquator alter quem punctum b vi b d describeret, horum æquatorum communes intersectiones P, Z; vires quæ secundum radios B C, b c, agunt in unam componentur, ut suprà, quâ globus movebitur uniformiter in directum; vires autem B D, b d,



eosdem rotationis motus seorsim producunt quos producerent, si in punctum P singulæ agerent seorsim, forentque PK, P i; sed vires duæ P K, P i, in unam P L componuntur quâ globus circà æquatorem unicum rotatur. Quare vires seu impulsus AB, a b generabunt motum unicum simplicem ac unifor-

De Motu Corporum.

bunt hi eundem motum circularem ac si simul & semel in locum intersectionis æquatorum motuum illorum, quos seorsim generarent, fuissent impressi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures distinctos, sed impressos omnes componit & ad unum reducit, & quatenus in se est, gyratur semper motu simplici & uniformi circa axem unicum, inclinatione semper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare potest. Si globus plano quocunque, per centrum suum & centrum in quod vis dirigitur ttanseunte, dividi intelligatur in duo hemisphæria; urgebit semper vis illa utrumque *hemisphærium* æqualiter, & propterea globum, quoad motum rotationis, (b) nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum & æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi à centro sui motus, turbabit mo-



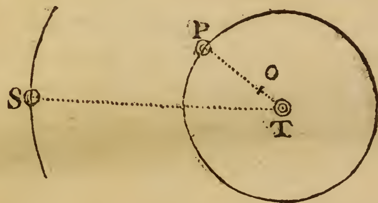
uniformem, tum directum, tum circularem circà axem unicum inclinatione semper invariabili datum adeóque & sibi semper parallelum.

(b) * *Nullam in partem inclinabit.* Sit S virium centrum, A P Q E globus circà axem P p revolvens, S C B planum per centrum globi C & per centrum virium S transiens, globumque dividens in duo hemispheria A P B, A p B, vis centripeta urgebit semper utrumque hemispherium æqualiter versùs S, & propterea globum quoad motum rotationis nullam in partem inclinabit, manebitque proinde eadem axis P p inclinatio. Addatur verò alicubi, v. gr. in N, inter polum p & æquatorem E Y Q materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi à centro sui motûs D, turbabit motum globi, quod partem globi N, cui adhæret validius trahat quam vis centrifuga partem oppositam O, magis depressam; & ideò faciet ut poli P, p, errent per superficiem globi & circulos L Z M, H X K, circum se punctumque sibi oppositum describant. Nam cum materia illa est in loco N, suâ majori vi centrifugâ facit ut polus p accedat ad H & polus P ad M, sublato partium globi æquilibrio; unde materiâ illâ revolvente, poli H & M cir-

tum globi, facietque ut poli ejus errent per ipsius superficiem, & circulos circum se punctumque sibi oppositum perpetuò describant. Neque corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in casu (per corol. xxi.) nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, quâ ratione (per corol. xx.) nodi regredientur; vel denique ex alterâ axis parte addendo materiam novam, quâ mons inter movendum libretur, & hoc pacto nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia sunt vel polo vel æquatori propiores.

PROPOSITIO LXVII. THEOREMA XXVII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, circa interiorum P, T commune gravitatis centrum O, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales & orbem ad formam ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum T, radiis ad ipsum ductis, describere potest.



Nam corporis *S* attractiones versus *T* & *P* componunt ipsius attractionem absolutam, quæ magis dirigitur in corporum *T* & *P* commune gravitatis centrum *O*, quam in corpus maximum *T*, quæque quadrato distantiæ *SO* magis est proportionalis reciprocè, quam quadrato distantiæ *ST*: (c) ut rem perpendenti facile constabit.

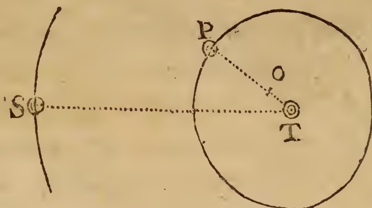
circulos H X K H, M Z L M describunt in superficie globi circà puncta P, p, sive circa loca polorum antequam materia in N addita esset. *Neque corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando montem illum vel in polo alterutro* p vel P ubi polum non magis in unam partem trahit quam in alteram; *vel in æquatore* E Y Q, ubi polum unum non magis trahit quam alterum, *vel ex alterâ axis parte* in O *addendo materiam novam quâ motus* in N *inter movendum libratur*, seu quâ axis in partes oppositas æquè trahatur, vel etiam addendo materiam novam ex alterâ æquatoris parte in R, quâ polus P tantum trahatur quantum polus p à materiâ in N positâ.

(c) * *Ut rem perpendenti facilè constabit.* Nam vis acceleratricis compositæ quâ corpus *S* à corporibus *T* & *P* trahi-

De Motu Corporum.

PROPOSITIO LXVIII. THEOREMA XXVIII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, circa interiorum P & T commune gravitatis centrum O, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, & orbem ad formam ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quam si id vel non attractum quiescat, vel multò magis aut multò minus attractum aut multò magis aut multò minus agitetur.



(d) Demonstratur eodem fere modo cum prop. LXVI. sed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Sufficeret rem sic æstimare. Ex demonstratione propositionis novissimæ liquet centrum, in quod corpus *S* conjunctis viribus urgetur, proximum esse communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quiesceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus *S* ex unâ parte, & commune centrum aliorum duorum ex alterâ parte, circa commune omnium centrum quiescens, ellipses accuratas. (e) Liquet hoc per corollarium secundum propositionis LVIII. col-

tur directio cadit inter lineas SP, ST, & cæteris paribus, magis accedit ad ST, quam ad SP (si modò corpus majus *T* cæteris paribus magis trahat quam corpus minus *P*) quemadmodum centrum gravitatis O, propius est corpori *T* quam corpori P; prætereà manente distantiâ ST, vis acceleratrix corporis *S* versùs *P* augetur vel diminuitur, dum decrescit vel crescit distantia SP, & similiter distantia SO, augetur vel diminuitur, prout crescit vel decrescit SP; Quarè attractio absoluta (seu tota) corporis *S* quadrato distantiæ SO magis proportionalis est reciprocè, quam quadrato distantiæ ST; insuper commune gravitatis centrum O ferè spectari potest tanquam punctum in quo corporum *T* & *P* vires physice uniuntur.

(d) * *Demonstratur eodem ferè modo &c.* Nimirum resolvendo singulas attractiones corporis *S* versùs P & T in alias quarum duæ ad centrum O dirigantur & aliæ duæ directiones habeant rectæ TP parallelas.

(e) * *Liquet hoc &c.* Nam si centrum in quod corpus S conjunctis viribus urgetur

LIBER PRIMUS. PROP. LXVIII. THEOR. XXVIII.

collatum cum demonstratis in prop. LXIV. & LXV. Perturbatur iste motus ellipticus aliquantulum per distantiam centri duorum à centro, in quod tertium *S* attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima est perturbatio, ubi commune trium centrum quiescit; hoc est, ubi corpus intimum & maximum *T* lege cæterorum attrahitur: fitque major semper, ubi trium commune illud centrum, (f) minuendo motum corporis *T*, moveri incipit, & magis deinceps magisque agitatur.

Corol. Et hinc, si corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod orbitæ descriptæ propius accedent ad ellipticas, & arearum descriptiones fient magis æquabiles, si corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt ut eorum vires absolutæ directè & quadrata distantiarum inversè, se mutuo trahant agitentque, & orbitæ cujusque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum ([g] nimirum umbilicus orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille orbitæ secundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iste ter-

tur coincideret cum centro O gravitatis communi duorum corporum *P* & *T* hæc duo corpora *P* & *T* ellipses accuratas seorsim describerent circum se mutuò & circum centrum illud O (per coroll. 2. prop. 58). Et præterea corpus S ex unâ parte & duorum aliorum systema tanquam unum corpus consideratum, hoc est, eorum commune gravitatis centrum O ex alterâ parte ellipses accuratas describerent circum commune trium *S*, *T*, *P* centrum gravitatis quiescens (per coroll. 2. prop. 58.). Quod adhuc clarius intelligetur, si legantur propositiones 64. 65. Perturbatur iste motus ellipticus aliquantulum per distantiam centri O, duorum *P* & *T* à centro in quod tertium *S* trahitur. *Detur præterea motus* non uniformis in directum *communi trium centro*, (quod continget, si corpus intimum & maximum *T*, lege cæterorum non attrahitur, ut ex dictis patet) *& augebitur perturbatio, proindè &c.*

(f) * *Minuendo motum corporis T &c.* Quâ ratione fit ut centrum commune trium corporum, intereà dum corpora *S* & *P* moventur, nunc accedat ad corpus *T* nunc ab illo recedat, pro mutatâ corporum illorum distantiâ, & hinc magis ac magis perturbabitur motus ellipticus & magis ac magis deinceps agitabitur centrum commune gravitatis trium corporum.

(g) * *Nimirum umbilicus orbitæ primæ & intimæ*, quam v. gr. corpus parvum *P* hic describit *in centro gravitatis corporis maximi & intimi T* quod ferè coincidit cum communi centro O gravitatis duorum *P* & *T* (per cas. 1. prop. 65.); umbilicus *orbitæ secundæ* quam v. gr. corpus *S* describit *in communi centro gravitatis* O, *corporum duorum intimorum P* & *T*; umbilicus *tertiæ* orbitæ quam aliud corpus longius distans describeret *in communi centro gravitatis trium interiorum P*, *T*, *S* &c. Nam idem est ratiocinium seu tria seu quatuor aut plura sint corpora (ut in prop. 64. 65.)

tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum; & sic deinceps) quam si corpus intimum quiescat & statuatur communis umbilicus orbitarum omnium.

PROPOSITIO LXIX. THEOREMA XXIX.

In systemate corporum plurium A, B, C, D, *&c. si corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B, C, D, *&c. viribus acceleratricibus quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à trahente; & corpus aliud* B *trahit etiam cætera* A, C, D, *&c. viribus quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à trahente: erunt absolutæ corporum trahentium* A, B *vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora* A, B, *quorum sunt vires.*

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium *B*, *C*, *D* versus *A*, paribus distantiis, sibi invicem æquantur ex hypothesi; & similiter attractiones acceleratrices corporum omnium versus *B*, paribus distantiis, sibi invicem æquantur. Est autem absoluta vis attractiva corporis *A* ad vim absolutam attractivam corporis *B*, (h) ut attractio acceleratrix corporum omnium versus *A* ad attractionem acceleratricem corporum omnium versus *B*, paribus distantiis; (i) & ita est attractio acceleratrix corporis *B* versus *A*, ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*. Sed attractio acceleratrix corporis *B* versus *A* est ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*; propterea quod vires motrices, quæ (per definitionem secundam, septimam & octavam) sunt ut vires acceleratrices & corpora attracta conjunctim, hic sunt (per motus legem tertiam) (k) sibi invicem æquales. Ergo absoluta vis attractiva corporis *A* est ad abso-

(h) * *Ut attractio acceleratrix corporum omnium*, seu ut attractio acceleratrix uniuscujusque corporis versus A &c. Patet enim quod si vis absoluta dupla vel tripla &c. sit, actio quoque acceleratrix in distantiâ datâ dupla vel tripla erit.

(i) * *Et ita est attractio acceleratrix corporis B versus A, ad attractionem acceleratricem corporis A versus B*, ob distantiam inter B & A, & A & B eandem.

(k) * *Sibi invicem æquales.* Si enim attractio acceleratrix corporis *B* versus A dicatur V & attractio acceleratrix corporis A versus B dicatur v; vis motrix in B, erit $B \times V$; in A erit $A \times v$; & (per leg. 3am.) $B \times V = A \times v$. Undè $V : v = A : B$. Ergò *absoluta* &c.

* *Vi-*

lutam vim attractivam corporis *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*. *Q. E. D.*

LIBER PRIMUS. PROP. LXIX. THEOR. XXIX.

Corol. 1. Hinc si singula systematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à trahente; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, si singula sistematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt vel reciprocè, vel directè in ratione dignitatis cujuscunque distantiarum à trahente, quæve secundum legem quamcunque communem ex distantiis ab unoquoque trahente definiuntur; constat quod corporum illorum vires (l) absolutæ sunt ut corpora.

Corol. 3. In systemate corporum quorum vires decrescunt in ratione duplicatâ distantiarum, si minora circa maximum in ellipsibus, umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, (m) quam fieri potest accuratissimis revolvantur; & radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maximè proportionales: erunt corporum illorum vires absolutæ ad invicem, aut accuratè aut quamproximè, in ratione corporum; & (n) contra. Patet per corol. prop. LXVIII. collatum cum hujus corol. 1.

Scho-

(l) * *Vires absolutæ sunt ut corpora.* Omnia enim ratiocinia eadem manent in hujus corollarii hypothesi ac in demonstratione & hypothesi propositionis.

(m) * *Quam fieri potest accuratissimis revolvantur*, ut in duobus casibus prop. 65. expositum est.

(n) * *Et contrà.* Si vires corporum illorum absolutæ sint ad invicem in ratione corporum, & minora corpora circà maximum in ellipsibus umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, quam fieri potest, accuratissimis revolvantur, & radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maximè proportionales, corporum illorum seorsim spectatorum vires acceleratrices decrescent in ratione duplicatâ distantiarum aut accuratè aut quam proximè; ut liquet ex coroll. 2°. prop. 58. collato cum prop. 64. 65.

Scholium.

His propoſitionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas, & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi ſolent. Rationi enim conſentaneum eſt, ut vires, quæ ad corpora diriguntur, pendeant ab eorundem naturâ & quantitate, ut fit in magneticis. Et quoties hujuſmodi caſus incidunt, æſtimandæ erunt corporum attractiones, aſſignando ſingulis eorum particulis vires proprias, & colligendo ſummas virium. Vocem attractionis hic generaliter uſurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem: ſive conatus iſte fiat ab actione corporum vel ſe mutuo petentium, vel per ſpiritus emiſſos ſe invicem agitantium; ſive is ab actione ætheris, aut aëris, mediive cujuſcunque ſeu corporei ſeu incorporei oriatur corpora innatantia in ſe invicem utcunque impellentis. Eodem ſenſu generali uſurpo vocem *impulſus*, non ſpecies virium & qualitates phyſicas, ſed quantitates & proportiones mathematicas in hoc tractatu expendens ut in definitionibus explicui. In matheſi inveſtigandæ ſunt virium quantitates & rationes *illæ*, quæ ex conditionibus quibuſcunque poſitis conſequentur: deinde, ubi in phyſicam deſcenditur conferendæ ſunt hæ rationes cum phænomenis; ut innoteſcat quænam virium conditiones ſingulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium ſpeciebus, cauſis & rationibus phyſicis tutius diſputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora ſphærica, ex particulis modo jam expoſito attractivis conſtantia, debeant in ſe mutuò agere; & quales motus inde conſequantur.

SEC-

LIBER PRIMUS. PROP. LXX. THEOR. XXX.

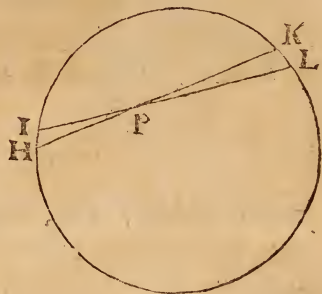
SECTIO XII.

De corporum sphæricorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXX. THEOREMA XXX.

Si ad sphæricæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis: dico quod corpusculum intra superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur.

Sit *HIKL* superficies illa sphærica, & *P* corpusculum intus constitutum. Per *P* agantur ad hanc superficiem lineæ duæ *HK*, *IL*, arcus quam minimos *HI*, *KL* intercipientes; &, ob triangula *HPI*, *LPK* (per corol. 3. lem. VII.) (o) similia, arcus illi erunt distantiis *HP*, *LP* proportionales; & superficiei sphæricæ particulæ quævis ad *HI* & *KL*, rectis per punctum *P* transeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicatâ illâ ratione. Ergo vires harum particularum in corpus *P* exercitæ sunt inter se æquales. Sunt enim ut particulæ directè, & quadrata distantiarum inverse. Et hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, se mutuo destruent. Et simili argumento, attractiones omnes per totam sphæricam superficiem à contrariis attractionibus destruuntur. Proinde corpus *P* nullam in partem his attractionibus impellitur. *Q. E. D.*



PRO-

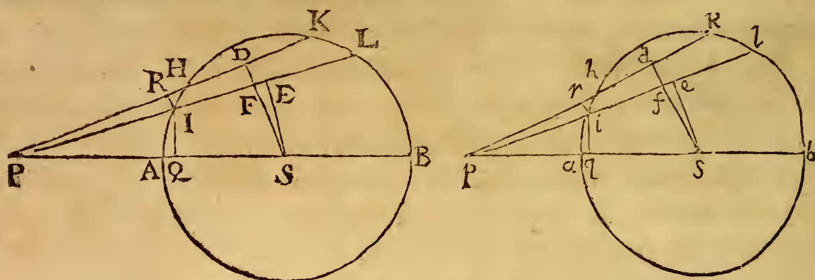
(o) * *Similia &c.* Anguli enim HPI, LPK ad verticem oppositi, & anguli HIL, LKH eidem arcui insistentes æquantur (per prop. 27. Lib. 3. Elem.) Nam arcus evanescentes IH, KL, pro ipsorum chordis usurpari possunt (per cor. 3. Lem. 7.) Quare arcus HI, KL distantiis HP, LP proportionales sunt, & hinc si ad superficiem sphæricam per punctum P ductæ intelligantur innumeræ rectæ ad arcus quamminimos ut HI, KL terminatæ, rectæ illæ figuras solidas (pyramides vel conos) similes formabunt quorum bases in superficie sphæricâ similes erunt, & proindè (per Lem. 5.) rationem habebunt duplicatam laterum HI, HL seu distantiarum HP, LP. *Ergo vires &c.*

De Motu Corporum.

PROPOSITIO LXXI. THEOREMA XXXI.

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra sphæricam superficiem constitutum attrahitur ad centrum sphæræ; vi reciprocè proportionali quadrato distantiæ suæ ab eodem centro.

Sint *AHKB*, *ahkb* æquales duæ superficies sphæricæ, centris *S*, *s*, diametris *AB*, *ab* descriptæ, & *P*, *p* corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur à corpusculis lineæ *PHK*, *PIL*, *phk*, *pil*, auferentes à circulis ma-



ximis *AHB*, *ahb*, æquales arcus *HK*, *hk* & *IL*, *il*: Et ad eas demittantur perpendicula *SD*, *sd*; *SE*, *se*; *IR*, *ir*; quorum *SD*, *sd* secent *PL*, *pl* in *F* & *f*: Demittantur etiam ad diametros perpendicula *IQ*, *iq*. Evanescant anguli *DPE*, *dpe*: & (p) ob æquales *DS* & *ds*, *ES* & *es*, lineæ *PE*, *PF* & *pe*, *pf* & lineola *DF*, *df* pro æqualibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis *DPE*, *dpe* simul evanescentibus, (q) est æqualitatis. His itaque constitutis, (r) erit *PI* ad *PF* ut *RI* ad *DF*, & *pf* ad *pi* ut *df*, vel *DF* ad *ri*; & ex æquo $PI \times pf$ ad $PF \times pi$ ut *RI* ad *ri*, hoc est (per

(p) * *Et ob æquales DS & ds, ES & es* &c. (Per Prop. 14. Lib. 3. Elem.).

(q) * *Est æqualitatis.* Nam evanescentibus DPE, dpe angulis, puncta F, f coincidunt cum punctis E, e, & iis punctis coincidentibus, æquales sunt lineæ PE, PF & pe, pf, & lineolæ DF, df fiunt differentiæ linearum DS & ES, ds & es, ac proindè (ob æquales DS & ds, ES & es) æquantur.

(r) * *Erit PI ad PF &c.* Ob parallelas RI, DF & ri, df.

(per corol. 3. lem. VII.) (f) ut arcus IH ad arcum ih. (t) Rursus PI ad PS ut IQ ad SE, & ps ad pi ut se vel SE ad iq; & ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut IQ ad iq. Et conjunctis rationibus PI *quad.* $\times pf \times ps$ ad pi *quad.* $\times PF \times PS$, ut $IH \times IQ$ ad $ih \times iq$; hoc (u) est, ut superficies circularis, quam arcus IH convolutione semicirculi AKB circà diametrum AB describet, ad superficiem circularem, quam arcus ih convolutione semicirculi akb circa diametrum ab describet. Et vires, quibus hæ superficies secundum lineas ad se tendentes attrahunt corpuscula P & p, sunt (per hypothesin) ut ipsæ superficies directè, & quadrata distantiarum superficierum à corporibus inversè, hoc est, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntque hæ vires ad ipsarum partes obliquas, quæ (factâ per legum corol. 2. resolutione virium) secundum lineas PS, ps ad centra tendunt, ut PI ad PQ, & pi ad pq; id est (ob similia triangula PIQ & PSF, piq & psf) ut PS ad PF, & ps ad pf. Unde, ex æquo, fit attractio corpusculi hujus P versus S ad attractionem corpusculi p versus s, ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc (x) est, ut ps *quad.* ad PS *quad.* Et simili argumento vires, quibus superficies convolutione arcuum KL,

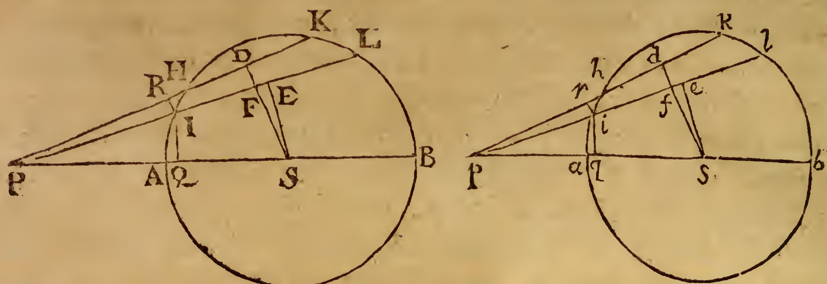
(f) *Ut arcus IH ad arcum ih.* Nam triangula evanescentia RHI, rhi similia sunt ob angulos ad R & r rectos (ex hyp.) & angulos ad H & h æquales, quos nempè metiuntur dimidii arcus æquales HK, hk (per prop. 32. lib. 3. Elem.) arcus enim HI, hi pro tangentibus in H & h usurpari possunt (per Cor. 3. Lem. 7.). Quarè RI est ad ri, ut arcus IH ad arcum ih.

(t) * *Rursus &c.* Ob triangula PQI, PES & pqi, pes similia, est PI : PS = IQ : SE.

(u) 515 * *Hoc est, ut superficies circularis, quam arcus IH convolutione semicirculi AKB circà diametrum AB describet.* Nam circularis illa superficies æqualis est facto ex peripheriâ circuli cujus radius IQ in arcum evanescentem IH, & similiter superficies circularis quam arcus ih, convolutione semicirculi akb circà diametrum ab, describet, æquatur facto ex peripheriâ circuli cujus radius iq, in arcum evanescentem ih, (152). Cum igitur peripheriæ circulorum sint ut radii, facta illa erunt inter se ut IH × IQ, ad ih × iq.

(x) * *Hoc est &c.* Deleto in utrâque quantitate facto PF × pf, erunt attractiones ut $\frac{ps}{PS}$ ad $\frac{PS}{ps}$, seu reducendo ad eundem denominatorem, ut $\frac{ps^2}{PS \times ps}$ ad $\frac{PS^2}{ps \times PS}$, hoc est, ut ps^2 ad PS^2.

DE MOTU CORPORUM. *K L*, *k l* descriptæ trahunt corpuscula, erunt ut *p s quad.* ad *P S quad.* inque eâdem ratione erunt vires superficierum omnium circularium in quas utraque superficies sphærica, capiendo sem-

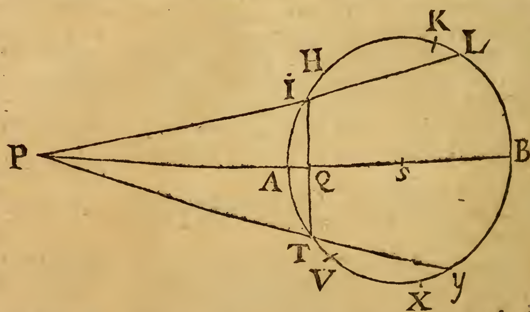


per *s d* æqualem *S D* & *s e* æqualem *S E*, distingui potest. Et, per compositionem, vires totarum superficierum sphæricarum in corpuscula exercitæ erunt in eâdem ratione. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXII. THEOREMA XXXII.

Si ad sphæræ cujusvis puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis; ac detur tum sphæræ densitas, tum ratio diametri sphæræ ad distantiam corpusculi à centro ejus: dico quod vis quâ corpusculum atttrahitur, proportionalis erit semidiametro sphæræ.

Nam concipe corpuscula duo seorsim à (y) sphæris duabus attrahi, unum ab unâ & alterum ab alterâ, & distantias eo-



516. Scholium. Si ex alterâ parte diametri A B capiatur arcus AT = AI, & arcus TV = IH, vires obliquæ & æquales I Q, T Q sibi mutuò opponentur, nullumque motum in corpusculo *P* producent. Undè patet vires integras in corpusculum *P* ab utroque hemisphærio A H B, A T B seu à totâ superficie sphæricâ exercitas esse omninò viribus ad centrum S tendentibus æquales.

(y) * *A sphæris duabus* homogeneis, ejusdemque densitatis ità nempè ut sub æqualibus voluminibus æquales materiæ quantitates ubique contineantur, & vis absoluta attrahens sit semper ut quantitas materiæ.

* *Ad*

rum à ſphærarum centris proportionales eſſe diametris ſphærarum reſpectivè, ſphæras autem reſolvi in particulas ſimiles & ſimiliter poſitas ad corpuſcula. Et attractiones corpuſculi unius, factæ verſus ſingulas particulas ſphæræ unius, erunt ad attractiones alterius verſus analogas totidem particulas ſphæræ alterius, in ratione compoſitâ ex ratione particularum directè & ratione duplicatâ diſtantiarum inversè. Sed particulæ ſunt ut ſphæræ, hoc eſt, in ratione triplicatâ diametrorum, & diſtantiæ ſunt ut diametri; & ratio prior directè unà cum ratione poſteriore bis inversè eſt ratio diametri ad diametrum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpuſcula in circulis, circa ſphæras ex materiâ æqualiter attractivâ conſtantes, revolvantur; ſintque diſtantiæ à centris ſphærarum proportionales earumdem diametris: Tempora periodica erunt æqualia.

Corol. 2. Et vice versâ, ſi tempora periodica ſunt æqualia, diſtantiæ erunt proportionales diametris. Conſtant hæc duo per corol. 3. prop. IV.

Corol. 3. Si ad ſolidorum duorum quorumvis, ſimilium & æqualiter denſorum, punctâ ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis; vires, quibus corpuſcula, (z) ad ſolida illa duo ſimiliter ſita, attrahentur ab iiſdem, erunt ad invicem ut diametri ſolidorum.

PRO-

(z) * *Ad ſolida illa duo ſimiliter ſita*, ità ut diſtantiæ corpuſculorum à ſimilibus ſolidorum duorum particulis ſint ut eorum ſolidorum diametri.

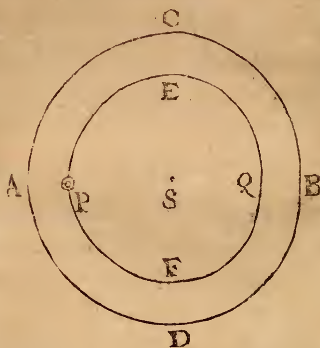
517. Scholium. Hinc ſi hujuſmodi ſphæra per centrum perforetur, æqualia erunt tempora omnia, quibus corpus de locis quibuſvis ad centrum uſque cadit, (per cor. 2. prop. 38.) & corpuſculorum in hujuſmodi ſphærâ per ſpatia libera minima revolventium tempora periodica erunt æqualia (per cor. 3. prop. 4.) atque ad hujus generis ſphæram pertinent quæ in prop. 51. 52. hujuſque corollariis demonſtrata ſunt.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO LXXIII. THEOREMA XXXIII.

Si ad ſphæræ alicujus datæ puncta ſingula tendant æquales vires centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis: dico quod corpuſculum intra ſphæram conſtitutum attrahitur vi proportionali diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.

In ſphærâ *ABCD*, centro *S* deſcriptâ, locetur corpuſculum *P*; & centro eodem *S*, intervallo *SP*, concipe ſphæram interiorem *PEQF* deſcribi. Manifeſtum eſt, (per prop. LXX.) quod ſphæricæ ſuperficies concentricæ, ex quibus ſphærarum differentia *AEBF* componitur, attractionibus ſuis per attractiones contrarias deſtructis, nil agunt in corpus *P*. Reſtat ſola attractio ſphæræ interioris *PEQF*. Et (per prop. LXXII.) hæc eſt ut diſtantia *PS*. *Q. E. D.*



Scholium.

Superficies, ex quibus ſolida componuntur, hic non ſunt purè mathematicæ, ſed orbes adeo tenues, ut eorum craſſitudo inſtar nihili ſit; nimirum orbes evaneſcentes, ex quibus ſphæra ultimò conſtat, ubi orbium illorum numerus augetur & craſſitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, ſuperficies & ſolida, componi d cuntur, intelligendæ ſunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

PROPOSITIO LXXIV. THEOREMA XXXIV.

Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra ſphæram conſtitutum attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.

Nam diſtinguatur ſphæra in ſuperficies ſphæricas innumeras concen-

centricas, & attractiones corpusculi à singulis superficiebus oriundæ erunt reciprocè proportionales quadrato distantiæ corpusculi à centro (per prop. LXXI.) Et componendo fiet summa attractionum, hoc est attractio corpusculi in sphæram totam, in eâdem ratione. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in æqualibus distantiis à centris homogenearum sphærarum attractiones sunt ut sphæræ. Nam (per prop. LXXII.) si distantiæ sunt proportionales diametris sphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur distantia major in illâ ratione; &, distantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicatâ illâ ratione; ideoque erit ad attractionem alteram in triplicatâ illâ ratione, hoc est, in ratione sphærarum.

Corol. 2. In distantiis quibusvis attractiones sunt ut sphæræ applicatæ ad (a) quadrata distantiarum.

Corol. 3. Si corpusculum, extra sphæram homogeneam positum, trahitur vi reciprocè proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro, constet autem sphæra ex particulis attractivis; (b) decrescet vis particulæ cujusque in duplicatâ ratione distantiæ à particula.

PROPOSITIO LXXV. THEOREMA XXXV.

Si ad sphæræ datæ puncta singula tendant vires æquales centripetæ, decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis; dico quod sphæra quævis alia similaris ab eâdem attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato distantiæ centrorum.

Nam particulæ cujusvis attractio est reciprocè ut quadratum distan-

(a) * *Ad quadrata distantiarum.* Nam æqualibus distantiis, attractiones sunt ut sphæræ (per cor. 1.) & æqualibus sphæris, attractiones sunt ut quadrata distantiarum à centris reciprocè (per prop. 74.). Quarè variantibus sphæris & distantiis simul, attractiones sunt ut sphæræ ad quadrata distantiarum applicatæ.

(b) * *Decrescet vis particulæ cujusque &c.* Nam cum vis attractrix absoluta quantitati materiæ proportionalis supponatur, si vis particularum sphæræ in majori vel minori ratione quam duplicatâ distantiarum à particulis decresceret, corpusculum extrà sphæram constitutum majori vel minori vi traheretur quam reciprocè proportionali quadrato distantiæ à centro sphæræ.

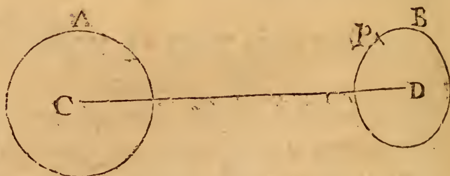
distantiæ suæ à centro sphæræ trahentis, (per prop. LXXIV.) & propterea eadem est, ac si vis tota attrahens manaret de corpusculo unico sito in centro hujus sphæræ. Hæc autem attractio tanta est, quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem, si modo illud à singulis sphæræ attractæ particulis eâdem vi traheretur, quâ ipsas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio (per prop. LXXIV.) reciprocè proportionalis quadrato distantiæ suæ à centro sphæræ; ideoque huic æqualis attractio sphæræ est in eâdem ratione. (c) *Q. E. D.*

(d) *Corol.* 1. Attractiones sphærarum, versus alias sphæras homogeneas, sunt ut sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum centrorum suorum à centris earum, quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet, ubi sphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta singula trahent singula alterius eâdem vi, quâ ab ipsis vicissim trahuntur; ideoque cum in omni attractione urgeatur (per legem 3.) tam punctum attrahens, quam punctum

(c) * *Q. E. D.* Demonstratio clarius intelligitur appositâ figurâ. Sphæra *A* sphæram similarem *B* attrahat, & vis acceleratrix quâ sphæræ *B* particula quævis *P* in centrum C sphæræ *A* urgetur est reciprocè ut quadratum distantiæ P C à centro sphæræ trahentis (per prop. 74.) & propterea eadem est ac si vis tota attrahens manaret de corpusculo unico C sito in centro sphæræ trahentis *A*; vis autem tota acceleratrix quâ sphæra integra *B* à corpusculo C trahitur, tanta est quanta foret vicissim attractio ejusdem corpusculi C versùs centrum D sphæræ *B*, si modò illud corpusculum C à singulis sphæræ *B* particulis eâdem vi traheretur quâ ipsas attrahit, ut manifestum est. Foret autem (in hâc hyp.) illâ corpusculi C versus centrum D attractio (per prop. 74.) reciprocè proportionalis quadrato distantiæ suæ C D à centro D sphæræ *B*; Quarè attractio sphæræ *B* versus C ut potè æqualis attractioni suppositæ corpusculi C versus D, est in eâdem ratione inversâ quadrati distantiæ C D. Q. E. D.

(d) * *Cor.* 1. Vis acceleratrix quâ



sphæræ *B* particula quævis *P* versus centrum C sphæræ *A* urgetur, est ut sphæra *A* applicata ad quadratum distantiæ C P, (per cor. 2. prop. 74.) & propterea eadem est ac si vis tota attrahens quæ esset ut sphæra *A* manaret de corpusculo unico C sito in centro sphæræ trahentis *A*; & similiter sphæra tota *B* ad centrum C trahitur ut corpusculum unicum in centro D situm (per prop. 75.) vis autem acceleratrix quâ corpusculum in centro D positum versus C trahitur, est ut vis absoluta corpusculi C seu ut sphæra *A* directè & quadratum distantiæ C D inversè. Quare *attractiones sphærarum* acceleratrices *versùs alias sphæras homogeneas sunt ut sphæræ trahentes applicatæ* &c.

tum attractum, (e) geminabitur vis attractionis mutuæ, conservatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicum conicarum sectionum (f) demonstrata sunt, obtinent, ubi sphæra attrahens locatur in umbilico: & corpora moventur extra sphæram.

Corol. 4. Ea vero, quæ de motu corporum circa centrum conicarum sectionum (g) demonstrantur, (h) obtinent ubi motus peraguntur intra sphæram.

PRO-

(e) * *Geminabitur vis attractionis mutuæ* &c. Si sphæra *A* sphæram *B* vi propriâ attrahente destitutam trahat, erit vis acceleratrix sphæræ *B* versùs centrum C sphæræ trahentis *A*, ut $\frac{A}{CD^2}$, (per cor. 2. prop. 75.) jam si sphæræ *B* vis propria attrahens tribuatur, vis acceleratrix sphæræ *A* versùs *B* indè genita, erit ut $\frac{B}{CD^2}$, & vis illius motrix (15) ut $\frac{B \times A}{CD^2}$, quæ (per Leg. 3.) æquatur vi motrici sphæræ *B* versùs sphæram *A* ex reactione sphæræ *A* genitæ. Quarè dividendo per *B*, vis acceleratrix sphæræ *B*, versùs centrum C sphæræ *A*, rursùs erit ut $\frac{A}{CD^2}$, ideóque attractio tota acceleratrix sphæræ *B*, versùs centrum sphæræ *A*, erit in distantiâ datâ ut sphæra ipsa *A*, & in distantiâ variabili ut sphæra *A* ad quadratum distantiæ applicata. Quod similiter dicendum est de attractione sphæræ *A* versùs centrum sphæræ *B*. Observandum verò est quod si sphæræ *A* & *B* æquales sint & utraque vi propriâ attractivâ quantitati materiæ proportionali prædita sit, attractio mutua dupla evadit; Si verò sphærarum una alterâ major sit vel minor, ver. gr. sphæra *B* minor quam sphæra *A*, dum vis attractrix propria sphæræ *B* accedit, geminatur quidem attractio mutua, sed non idcircò tamen duplicatur; nam attractio indè genita, cæteris paribus, sphæræ *B* proportionalis est.

(f) * *Demonstrata sunt.* (In Sect. 3â. 6â. 7â. 9â. 11â.)

(g) * *Demonstrantur.* (Prop. 10. 38. 47. 51. 52. 64.)

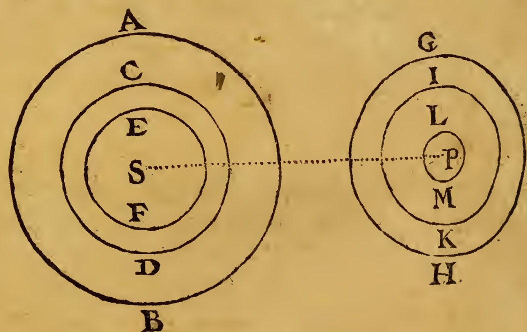
(h) * *Obtinent &c.* (per prop. 73.) ubi motus peraguntur intrà sphæram, hoc est, ubi intrà sphæram solidam via corporibus motis libera conceditur.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO LXXVI. THEOREMA XXXVI.

Si ſphæræ in progreſſu à centro ad circumferentiam (quoad materiæ denſitatem & vim attractivam) utcunque diſſimilares, in progreſſu verò per circuitum ad datam omnem à centro diſtantiam ſunt undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque decreſcit in duplicatâ ratione diſtantiæ corporis attracti: dico quod vis tota, quâ hujuſmodi ſphæra una attrahit aliam, ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ centrorum.

Sunto ſphæræ quotcunque concentricæ ſimilares *AB*, *CD*, *EF*, &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam denſiorem verſus centrum, vel ſubductæ relinquant tenuiorem; & hæ (per prop. LXXV.) trahent ſphæras alias quotcunque concentricas ſimilares *GH*, *IK*, *LM*, &c. ſingulæ ſingulas, viribus reciprocè proportionalibus quadrato diſtantiæ *SP*. Et (i) componendo vel dividendo, ſumma virium illarum omnium, vel exceſſus aliquarum ſupra alias; hoc eſt, vis, quâ ſphæra tota, ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſita *AB*, trahit totam ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſitam *GH*; erit in eâdem ratione. Augeatur



(i) * *Et componendo vel dividendo &c.* Hoc eſt, in datâ diſtantiâ centrorum communium S, P, ſit attractio ſphærarum GH, IK, LM à ſphærâ AB, *a*, *b*, *c*; à ſphærâ CD, *d*, *e*, *f*; à ſphærâ EF, *g*, *h*, *i*: variante verò illâ diſtantiâ communium centrorum S, P vires omnes illæ mutabuntur reſpectivè ſecundum rationem illam inverſam quadrati diſtantiæ Centrorum, ergò ſumma vel differentia virium quibus omnes ſphæræ GH, IK, LM à ſphæris AB, CD, EF attrahuntur in primâ diſtantiâ, erit ad ſummam vel differentiam virium in altero caſu inversè ut quadrata diſtantiarum.

tur numerus ſphærarum concentricarum in infinitum ſic, ut materiæ denſitas unà cum vi attractivâ, in progreſſu à circumferentiâ ad centrum, ſecundum legem quamcunque creſcat vel decreſcat; &, additâ materiâ non attractivâ, compleatur ubivis denſitas deficiens, eo ut ſphæræ acquirant formam quamvis optatam; & vis, quâ harum una attrahet alteram, erit etiamnum, per argumentum ſuperius, in eâdem illâ diſtantiæ quadratæ ratione inversâ. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi ejuſmodi ſphæræ complures ſibi invicem per omnia ſimiles, ſe mutuò trahant; attractiones acceleratrices ſingularum in ſingulas erunt, in æqualibus quibuſvis centrorum diſtantiis, ut ſphæræ attrahentes.

(k) *Corol.* 2. Inque diſtantiis quibuſvis inæqualibus, ut ſphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum inter centra.

Corol. 3. Attractiones verò motrices, ſeu pondera ſphærarum in ſphæras erunt, in æqualibus centrorum diſtantiis, ut ſphæræ attrahentes & attractæ conjunctim, id eſt, ut contenta ſub ſphæris per multiplicationem producta.

(l) *Corol.* 4. Inque diſtantiis inæqualibus, ut contenta illa directè & quadrata diſtantiarum inter centra inversè.

Corol. 5. Eadem valent, ubi attractio oritur à ſphæræ utriuſque virtute attractiva mutuo exercita in ſphæram alteram.

(k) * *Cor.* 2. Attractiones acceleratrices ſphærarum GH, IK, LM &c. in ſphæras AB, CD, EF, &c. ſingularum versùs ſingulas ſunt (per cor. 1. prop 75.) ut ſphæræ trahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum inter centra S, P. Quarè componendo vel dividendo ſumma attractionum illarum omnium vel exceſſus aliquarum ſuprà alias, hoc eſt, tota attractio acceleratrix ſphæræ compoſitæ GIMH versùs ſphæram compoſitam ACFB erit ut ſumma vel differentia ſphærum concentricarum ſimilarium AB, CD, EF, &c. ad quadratum diſtantiæ SP applicata. Sed ſi ſphæræ trahentes ſunt ſibi invicem per omnia ſimiles, ſummæ illæ vel differentiæ ſunt ut ſphæræ ipſæ. Quare patet veritas Coroll. 1. & 2.

(l) * *Cor.* 4. Corollaria 3um. & 4um. ex corollariis 1°. & 2°. manifeſta ſunt; Nam attractionis quantitas motrix, ſeu pondus ſphæræ attractæ in ſphæram trahentem æquipollet facto ex vi acceleratrice ductâ in quantitatem materiæ, ſeu in maſſam ſphæræ attractæ; vis autem acceleratrix (per cor. 2. prop. hujus) eſt ut ſphæra attrahens applicata ad quadratum diſtantiæ inter centra, & quantitates materiæ in ſphæris per omnia ſimilibus, ſunt ut volumina, ſeu ut ſphæræ ipſæ. Quarè attractiones motrices ſeu pondera ſphærarum in ſphæras, ſunt ut contenta ſub ſphæris per multiplicationem producta directè & quadrata diſtantiarum inter centra inversè.

De Motu Corporum.

ram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione servatâ.

Corol. 6. Si hujusmodi sphæræ aliquæ circa alias quiescentes revolvantur, singulæ circa singulas; sintque distantiæ inter centra revolventium & quiescentium proportionales quiescentium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

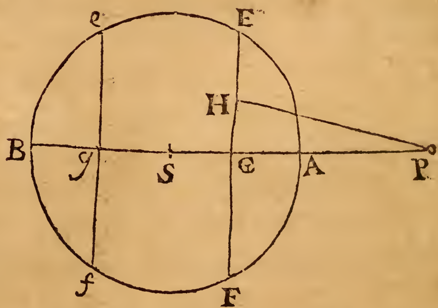
Corol. 7. Et vicissim, si tempora periodica sunt æqualia; distantiæ erunt (m) proportionales diametris.

Corol. 8. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicos conicarum sectionum demonstrata sunt, obtinent; ubi sphæra attrahens formæ & conditionis cujusvis jam descriptæ locatur in umbilico.

Corol. 9. (n) Ut & ubi gyrantia sunt etiam sphæræ attrahentes, conditionis cujusvis jam descriptæ.

PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA XXXVII.

Si ad singula sphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales distantiis punctorum à corporibus attractis: dico quod vis composita, quâ sphæræ duæ se mutuo trahent, est ut distantia inter centra sphærarum.



Cas. 1. Sit $AEBF$ sphæra; S centrum ejus; P corpusculum attractum, $PASB$ axis sphæræ per centrum corpusculi transiens; EF, ef plana duo, quibus sphæra secatur, huic axi perpendicularia, & hinc inde æqualiter distantia à centro sphæræ; G, g intersectiones planorum & axis; & H punctum quodvis in plano EF. Puncti H vis centripeta in corpusculum P, secundum lineam PH exercita, est ut distantia PH; & (per le-

(m) * *Proportionales diametris.* Cor. 6. & 7. constant per cor. 3. prop. 4ª.

(n) * *Ut & ubi gyrantia &c.* Patet per Cor. 2. Prop. 58.

legum corol. 2.) ſecundum lineam *PG*, ſeu verſus centrum *S*, ut longitudo *PG*. Igitur punctorum omnium in plano *EF*, hoc eſt plani totius vis, quâ corpuſculum *P* trahitur verſus centrum *S*, eſt ut diſtantia *PG* multiplicata per numerum punctorum, id eſt, ut ſolidum quod continetur ſub plano ipſo *EF* & diſtantia illa *PG*. Et ſimiliter vis plani *ef*, quâ corpuſculum *P* trahitur verſus centrum *S*, eſt ut planum illud ductum in diſtantiam ſuam *Pg*, ſive ut huic æquale planum *EF* ductum in diſtantiam illam *Pg*; & ſumma virium plani utriuſque ut planum *EF* ductum in ſummam diſtantiarum *PG*+*Pg*, id eſt, ut planum illud ductum in duplam centri & (o) corpuſculi diſtantiam *PS*, hoc eſt, ut duplum planum *EF* ductum in diſtantiam *PS*, vel ut ſumma æqualium planorum *EF* + *ef* ducta in diſtantiam eandem. Et ſimili argumento, vires omnium planorum in ſphærâ totâ, hinc inde æqualiter à centro ſphæræ diſtantium, ſunt ut ſumma planorum ducta in diſtantiam *PS*, hoc eſt, ut ſphæra tota & ut diſtantia *PS* conjunctim. *Q. E. D.* (p)

Caſ. 2. Trahat jam corpuſculum *P* ſphæram *AEBF*. Et eodem argumento probabitur quod vis, quâ ſphæra illa trahitur, erit ut diſtantia *PS*. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Componatur jam ſphæra altera ex corpuſculis innumeris *P*; & quoniam vis, quâ corpuſculum unumquodque trahitur, eſt ut diſtantia corpuſculi à centro ſphæræ primæ, & (q) ut ſphæra eadem conjunctim, atque ideo eadem eſt, ac ſi prodiret tota de corpuſculo unico in centro ſphæræ; vis tota, quâ corpuſcula omnia in ſphæra ſecunda trahuntur, hoc eſt, quâ ſphæra illa tota trahitur, eadem erit, ac ſi ſphæra illa traheretur vi prodeunte de corpuſculo unico in centro ſphæræ primæ, & (r) propterea proportionalis eſt diſtantiæ inter centra ſphærarum. *Q. E. D.*

Caſ.

(o) * *Et corpuſculi diſtantiam PS.* Eſt enim Pg = PG + 2GS, adeoque Pg + PG = 2PG + 2GS = 2PS.

(p) * *Q. E. D.* Obſervandum eſt vires obliquas GH, in plano quovis EF, ex utrâque axis PB parte in æqualibus diſtantiis ſumptas eſſe æquales & oppoſitas, nullumque proindè motum producere.

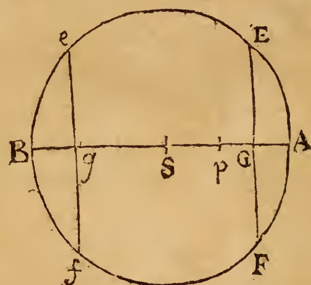
(q) * *Et ut ſphæra eadem conjunctim*, per caſ. 1.

(r) * *Et propterea proportionalis eſt diſtantiæ &c.* Si data eſt ſphæra prima trahens per caſ. 2.

De Motu Corporum.

Cas. 4. Trahant sphæræ se mutuo, & vis geminata proportionem priorem servabit. *Q. E. D.*

Cas. 5. Locetur jam corpusculum *p* intra sphæram *AEBF*; & quoniam vis plani *ef* in corpusculum est ut solidum contentum sub plano illo & distantiâ *pg*; & vis contraria plani *EF* ut solidum contentum sub plano illo & distantiâ *pG*; (f) erit vis ex utrâque composita ut differentia solidorum, hoc est, ut summa æqualium planorum ducta in semissem differentiæ distantiarum, id est, ut summa illa ducta in *pS* distantiam corpusculi à centro sphæræ. Et simili argumento, attractio planorum omnium *EF*, *ef* in sphærâ totâ, hoc est, attractio sphæræ totius, est conjunctim ut summa planorum omnium, seu sphæra tota, & ut *pS* distantiâ corpusculi à centro sphæræ. *Q. E. D.*



Cas. 6. Et si ex corpusculis innumeris *p* componatur sphæra nova, intra sphæram priorem *AEBF* sita; probabitur ut prius quod attractio, sive simplex sphæræ unius in alteram, sive mutua utriusque in se invicem, erit ut distantia centrorum *pS*. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXVIII. THEOREMA XXXVIII.

Si sphæræ in progressu à centro ad circumferentiam sint utcunque dissimilares & inæquabiles, in progressu vero per circuitum ad datam omnem à centro distantiam sint undique similares; & vis attractiva puncti cujusque sit ut distantia corporis attracti: dico quod vis tota quâ hujusmodi sphæræ duæ se mutuo trahunt sit proportionalis distantiæ inter centra sphærarum.

Demonstratur ex propositione præcedente eodem modo,

(f) * *Erit vis ex utrâque composita ut differentia solidorum, hoc est, ut* $ef \times pg - EF \times pG$. Est autem $Sg = SG$, adeóque $pg - pG = pS + SG - pG = 2pS$; Quare cum sit etiam $EF = ef$, erit $ef \times pg - EF \times pG = ef \times pg - pG = 2ef \times pS = \overline{ef + EF} \times pS$. Si punctum G est inter p & S situm, vis tota erit ut $ef \times pg + EF \times pG$, & quoniam est semper $Sg = SG$, atque in hoc casu $pg + pG = pS + SG + pG = 2pS$, similiter invenietur vis tota ut $\overline{ef + EF} \times pS$.

quo propoſitio LXXVI. ex propoſitione LXXV. demonſtrata fuit. (§)

Corol. Quæ ſuperius in propoſitionibus X. & LXIV. de motu corporum circa centra conicarum ſectionum demonſtrata ſunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi corporum ſphæricorum conditionis jam deſcriptæ, & attracta corpora ſunt ſphæræ conditionis ejuſdem.

Scholium.

Attractionum caſus duos inſigniores jam dedi expoſitos; nimirum ubi vires centripetæ decreſcunt in duplicatâ diſtantiarum ratione, vel creſcunt in diſtantiarum ratione ſimplici; efficientes in utroque caſu ut corpora gyrentur in conicis ſectionibus, & componentes corporum ſphæricorum vires centripetas eâdem lege, in receſſu à centro, decreſcentes vel creſcentes cum ſeipſis: Quod eſt notatu dignum. Caſus cæteros, qui concluſiones minus elegantes exhibent, ſigillatim percurrere longum eſſet. Malim cunctos methodo generali ſimul comprehendere ac determinare ut ſequitur.

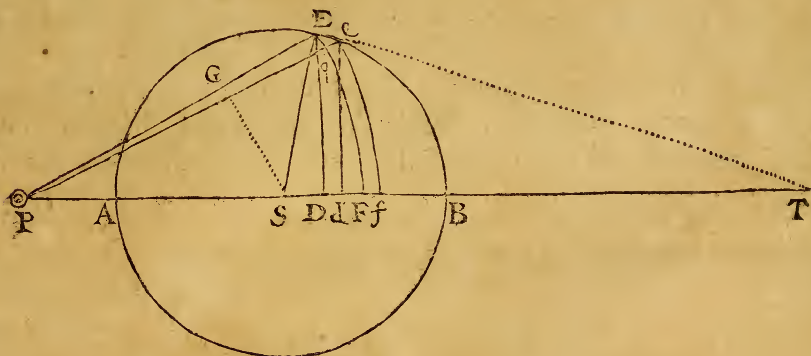
L E M-

(§) Quæ in corollariis prop. 76. ubi attractio ſphæræ versùs ſphæram erat quadrato diſtantiæ centrorum reciproce proportionalis, demonſtrata ſunt, ea, mutatis mutandis, ad caſum hujus propoſitionis 78. transferri poſſunt. Nimirum ſi ejuſmodi ſphæræ complures per omnia ſimiles ſe mutuò trahant, attractiones acceleratrices ſingularum in ſingulas erunt ut ſphæræ trahentes & diſtantiæ inter centra conjunctim; attractiones verò motrices ut ſphæræ attrahentes & attractæ & diſtantiæ inter centra conjunctim, eademque valent ubi attractio oritur à ſphæræ utriuſque virtute attractivâ mutuò exercitâ in ſphæram alteram.

LEMMA XXIX.

Si describantur centro S *circulus quilibet* AEB, *& centro* P *circuli duo* EF, ef, *secantes priorem in* E, e, *lineamque* PS *in* F, f; *& ad* PS *demittantur perpendicula* ED, ed: *dico quod, si distantia arcuum* EF, ef *in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evanescentis* Dd *ad lineam evanescentem* Ff *ea sit, quæ lineæ* PE *ad lineam* PS.

Nam si linea *Pe* secet arcum *EF* in *q*; & recta *Ee*, quæ cum arcu evanescente *Ee* coincidit, producta occurrat rectæ *PS* in *T*; & ab *S* demittatur in *PE* normalis *SG*: ob (t) similia triangula *DTE*, *dTe*, *DES*; erit *Ed* ad *Ee*, ut *DT*



ad *TE*, seu *DE* ad *ES*; & ob (u) triangula *Eeq*, *ESG* (per lem. VIII. & corol. 3. lem. VII.) similia, erit *Ee* ad *eq* seu *Ff* ut *ES* ad *SG*; & ex æquo, *Dd* ad *Ff* ut *DE* ad *SG*; hoc est (ob similia triangula *PDE*, *PGS*) ut *PE* ad *PS*. *Q. E. D.*

PRO-

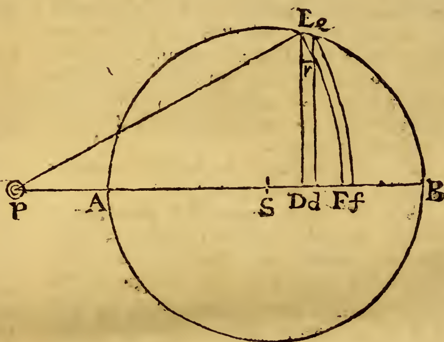
(t) * *Ob similia triangula DTE, dTe, DES.* Ob parallelas DE, de, triangula DTE, dTe similia sunt; & quoniam recta TE circulum AEB tangit in E, erit angulus SET rectus, & proinde demisso ex puncto E ad basim ST perpendiculo ED, erit triangulum DES simile triangulo DTE (prop. 8. Lib. 6. Elem.).

(u) * *Et ob triangula Eeq, ESG &c.* Anguli ad G & q recti sunt & proinde æquales; & quoniam anguli PEq, SEe sunt quoque recti & æquales, (ex naturâ circuli) detracto communi angulo SEq, anguli residui GES, qEe, erunt etiam æquales. Quarè triangula Eeq, ESG sunt similia (prop. 4. lib. 6. Elem.).

PROPOSITIO LXXIX. THEOREMA XXXIX.

Si superficies ob latitudinem infinitè diminutam jamjam evanescens EFfe, *convolutione sui circa axem* PS, *describat solidum sphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod vis, quâ solidum illud trahit corpusculum situm in* P, *est in ratione compositâ ex ratione solidi* $DEq \times Ff$, *& ratione vis quâ particula data in loco* Ff *traheret idem corpusculum.*

Nam si primò consideremus vim superficiei sphæricæ *FE*, quæ convolutione arcus *FE* generatur, & à linea *de* ubivis secatur in *r*; erit superficiei pars annularis, convolutione arcus *rE* genita, ut lineola *Dd*, manente sphæræ radio *PE* (uti (x) demonstravit *Archimedes* in lib. de *Sphærâ* & *Cylindro.*) Et hujus vis, secundum lineas *PE* vel *Pr* undique in (y) superficie conicâ sitas exercita, ut hæc ipsa superficiei pars annularis; hoc est, ut lineola *Dd*, vel, quod perinde est, ut rectangulum sub dato sphæræ radio *PE* & lineola illa *Dd*: at secundum lineam *PS* ad centrum *S* tendentem minor in ratione *PD* ad *PE*, (z) ideoque ut $PD \times Dd$. Dividi jam intelliga-



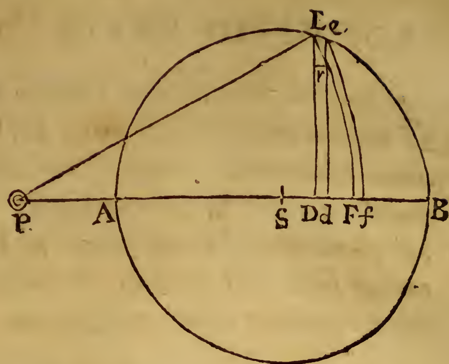
(x) 518. *Uti demonstravit Archimedes &c.* Facilis est demonstratio. Quoniam enim angulus PEr rectus est (ex naturâ circuli) erit angulus DEr æqualis angulo DPE, ob summam angulorum DPE + PED recto PEr æqualem. Undè si ex puncto r in lineam DE demissum intelligatur perpendiculum quod æquale erit lineæ Dd, constituetur triangulum evanescens simile triangulo EPD, eritque adeò $DE : PE = Dd : Er = \frac{PE \times Dd}{DE}$, sed (515) zona circularis convolutione arcûs rE genita, est ut rectangulum $rE \times DE$; Quare si in hoc rectangulo loco rE substituatur valor ipsius modò inventus, erit zona ut $PE \times Dd$, hoc est, ob datum radium PE, ut Dd. Q. E. D.

(y) * *In superficie conicâ.* Nam in convolutione puncti E, linea PE superficiem conicam describit.

(z) * *Ideòque ut* $PD \times Dd$. Nam si vis secundum directionem PE agens per lineam PE exponatur, vis illius pars quæ agit

De Motu Corporum.

tur linea *D F* in particulas innumeras æquales, quæ singulæ nominentur *Dd*; & superficies *FE* dividetur (a) in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut summa omnium $PD \times Dd$, hoc est, ut $\frac{1}{2} PFq - \frac{1}{2} PDq$, ideoque ut (b) *DE quad.* Ducatur jam superficies *FE* in altitudinem *Ff*; & fiet solidi *EFfe* vis exercita in corpusculum *P* ut $DEq \times Ff$: putâ si detur vis quam particula aliqua data *Ff* in distantia *PF* exercet:



agit secundùm directionem P S, exponetur per lineam P D; erit P E ad P D ut rectangulum $PE \times Dd$ ad rectangulum $PD \times Dd$, quod proindè vim illam secundùm directionem P D exhibebit, vires autem obliquæ E D ab utrâque axis P B parte se mutuò destruunt.

(a) * *Dividetur in totidem æquales annulos.* (Per not. 518.).

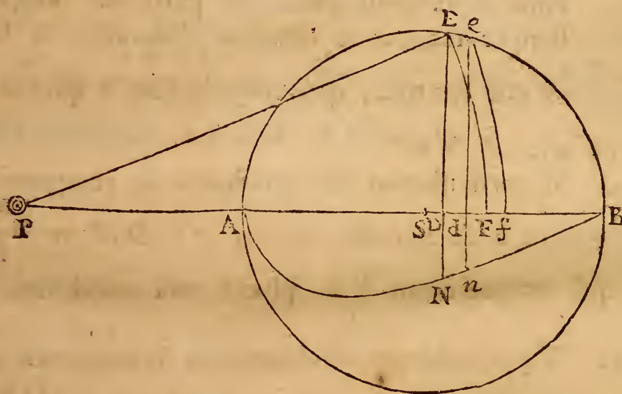
(b) * *Et superficies FE dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut summa omnium $PD \times Dd$, hoc est, ut $\frac{1}{2} PFq - \frac{1}{2} PDq$, ideoque ut DE quad.* Scilicet omnes P D, dum ex P D in P F mutantur uniformiter crescendo progressionem Arithmeticam faciunt, quoniam omnes particulæ D d quibus lineæ P D successivè augentur sunt æquales: ergo omnium P D summa eâ ratione invenitur quâ summæ progressionum Arithmeticarum obtinentur, nempe primum & ultimum progressionis terminum simul junctos multiplicando per numerum terminorum progressionis, & dimidium facti sumendo; Progressionis verò hujusce primus terminus est P D, ultimus P F numerus verò terminorum D F, siquidem D F est summa incrementorum æqualium evanescentium lineæ P D, ergo summa omnium P D est $\frac{\overline{PF+PD} \times DF}{2}$ sive (quia D F est differentia linearum P F & P D) est summa omnium $PD = \frac{\overline{PF+PD} \times \overline{PF-PD}}{2}$ sed (per 6. 2. Elem.) factum summæ & differentiæ duarum linearum æquatur differentiæ quadratorum ipsorum, ergo $\frac{\overline{PF+PD} \times \overline{PF-PD}}{2} = \frac{1}{2} PF^2 - \frac{1}{2} PD^2$ & summa omnium $PD \times Dd = \overline{\frac{1}{2} PF^2 - \frac{1}{2} PD^2} \times Dd$, sed D d est particula quæ in omnibus hisce casibus ut eadem assumitur, ergo vires totius superficiei *FE* quæ sunt ut summa omnium $PD \times Dd$ sunt ut $\frac{1}{2} PF^2 - \frac{1}{2} PD^2$ sive ut $PF^2 - PD^2$ sed PF^2 est æquale PE^2 per constr. & $PE^2 - PD^2 = DE^2$ (per 47. 1. El.) ergo vires superficiei F E, sunt ut DE^2. Q. E. D.

Idem aliter. Sit radius datus $PE = a$, variabilis $FD = x$, erit fluxio $Dd = dx$, & $PD = a - x$, atquè adeò $PD \times Dd = adx - xdx$, & sumptis utrinque fluentibus (165) S. $PD \times Dd = ax - \frac{1}{2} xx = \frac{2ax - xx}{2} = \frac{DE^2}{2}$, (prop. 13. lib. 6. Elem.). Quarè vis superficiei convolutione arcûs F E genitæ erit ut DE^2.

cet in corpusculum *P*. (c) At si vis illa non detur, fiet vis solidi *EFfe* ut solidum $DEq \times Ff$ & vis illa non data conjunctim. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXX. THEOREMA XL.

Si ad sphæræ alicujus ABE, *centro* S *descriptæ, particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad sphæræ axem* AB, *in quo corpusculum aliquod* P *locatur, erigantur de punctis singulis* D *perpendicula* DE, *sphæræ occurrentia in* E, *& in ipsis capiantur longitudines* DN, *quæ sint ut quantitas* $\frac{DEq \times PS}{PE}$ *& vis, quam sphæræ particula sita in axe ad distantiam* PE *exercet in corpusculum* P, *conjunctim: dico quod vis tota, quâ corpusculum* P *trahitur versus sphæram, est ut area* ANB *comprehensa sub axe sphæræ* AB, *& lineâ curvâ* ANB, *quam punctum* N *perpetuo tangit.*



Etenim stantibus quæ in lemmate & theoremate novissimo

(c) * *At si vis illa non detur &c.* Zona convolutione arcûs E genita ducatur in datam altitudinem Ff, & erit annuli solidi indè geniti vis secundum lineam PE undiquè exercita ut hic ipse annulus & vis lineolæ Ff conjunctim, hoc est, si vis lineolæ Ff dicatur *V*, ut $PE \times Dd \times Ff \times V$ (518). At vis annuli secundum lineam PS minor erit in ratione PD ad PE, ideòque erit ut $PD \times Dd \times Ff \times V$. Et quoniam variante PD, manet factum $Ff \times V$ quod nimirum vis *V* in singulis particulis datis Ff, æqualis supponatur; Si sumantur fluentes, ut supra, erit vis tota solidi EFfe, in corpusculum P secundùm lineam PS exercita ut $DE^2 \times Ff \times V$.

De Motu Corporum.

constructa sunt, concipe axem sphæræ AB dividi in particulas innumeras æquales Dd & sphæram totam dividi in totidem laminas sphæricas concavo-convexas $EFfe$; & erigatur perpendiculum dn. Per theorema superius vis, quâ lamina $EFfe$ trahit corpusculum P, est ut $DEq \times Ff$ & vis particulæ unius ad distantiam PE vel PF exercita conjunctim. Est autem (per lemma novissimum) Dd ad Ff ut PE ad PS, & inde Ff æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; & $DEq \times Ff$ æquale Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$, & propterea vis laminæ $EFfe$ est ut Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad distantiam PF exercita conjunctim, hoc est (ex hypothesi) ut $DN \times Dd$, seu area evanescens $DNnd$. Sunt igitur laminarum omnium vires, in corpus P exercitæ, ut areæ omnes $DNnd$, hoc est, sphæræ vis tota ut area tota ANB. Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta, ad particulas singulas tendens, eadem semper maneat in omnibus distantiis, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE}$; erit vis tota, quâ corpusculum à sphæra attrahitur, (d) ut area ANB.

Corol. 2. Si particularum vis centripeta sit reciprocè ut distantia corpusculi à se attracti, & fiat (e) DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEq}$; erit vis, quâ corpusculum P à sphærâ totâ attrahitur, ut area ANB.

Corol. 3. Si particularum vis centripeta sit reciprocè ut cubus distantiæ corpusculi à se attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEqq}$; erit vis, quâ corpusculum à totâ sphærâ attrahitur, ut area ANB.

Co-

(d) * *Ut area ANB.* Nulla enim habenda est ratio vis particulæ Ff quæ eadem in omnibus distantiis manet ex hyp.

(e) * *Fiat DN &c.* Substitutâ quantitate $\frac{1}{PE}$ loco vis particulæ Ff.

Corol. 4. Et universaliter si vis centripeta ad singulas sphæræ particulas tendens ponatur esse reciprocè ut quantitas V, fiat autem DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$; erit vis, quâ corpusculum à sphærâ totâ attrahitur, ut area ANB.

LIBER PRIMUS. PROP. LXXX. THEOR. XL.

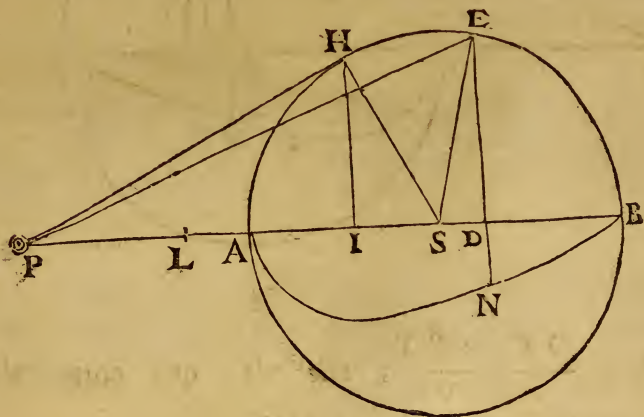
E e P A S D d F f B N n

De Motu Corporum.

PROPOSITIO LXXXI. THEOREMA XLI.

Stantibus jam positis, mensuranda est area ANB.

A puncto P ducatur recta PH sphæram tangens in H, & ad axem PAB demissa normali HI, bisecetur PI in L; & erit (per prop. XII. lib. 2. elem.) PEq æquale $PSq + SEq + 2PSD$. Est autem SEq seu SHq (ob (f) similitudinem



triangulorum SPH, SHI) æquale rectangulo PSI. Ergo PEq æquale est contento sub PS & $PS + SI + 2SD$, hoc (g) est, sub PS & $2LS + 2SD$, id est, sub PS & $2LD$. Porro DE *quad.* æquale est $SEq - SDq$, seu (†) $SEq - LSq + 2SLD - LDq$, id est, $2SLD - LDq - ALB$. Nam $LSq - SEq$ seu $LSq - SAq$ (per prop. VI. lib 2. elem.) æquatur rectangulo ALB. Scribatur itaque $2SLD - LDq - ALB$ pro DEq; & quantitas $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$, quæ secundum corollarium quar-

(f) * *Ob similitudinem triangulorum &c.* (Per prop. 13. lib. 6. Elem.)

(g) * *Hoc est sub* PS & $2LS + 2SD$. Ob $PS + SI = PI + 2SI = 2LI + 2SI = 2LS$.

(†) * *Seu* $SE^2 - LS^2$ *&c.* Ob $SD = LD - LS$, adeóque $SD^2 = LD^2 - 2SLD + LS^2$.

quartum propositionis præcedentis est ut longitudo ordinatim applicatæ DN, resolvet sese in tres partes $\frac{2SLD \times PS}{PF \times V} - \frac{LDq \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}$: ubi si pro V scribatur ratio inversa vis centripetæ, & pro PE medium proportionale inter PS & $2LD$; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, (h) quarum areæ per methodos vulgatas innotescunt. *Q. E. F.*

LIBER PRIMUS. PROP. LXXXI. THEOR. XLI.

Exem-

(h) 519. *Quarum areæ per methodos vulgatas innotescunt.* Sint variabiles $PE = z$, $LD = x$, adeoque $Dd = dx$, sint constantes $PA = a$, $PB = b$, $PS = c$, & $LS = m$, $LA = p$, $LB = q$, & erit areæ AND fluxio $DN \times dx$ ut $\frac{2mcxdx}{zV} - \frac{cxxdx}{zV} - \frac{pqcdx}{zV}$: quoniam verò PE^2 $(zz) = 2PS \times LD$ $(2cx)$, est $x = \frac{zz}{2c}$ & $dx = \frac{zdz}{c}$, quibus valoribus loco x & dx in formula substitutis illa in hanc mutatur $\frac{mz^2dz}{cV} - \frac{z^4dz}{4c^2V} - \frac{pqdz}{V}$.

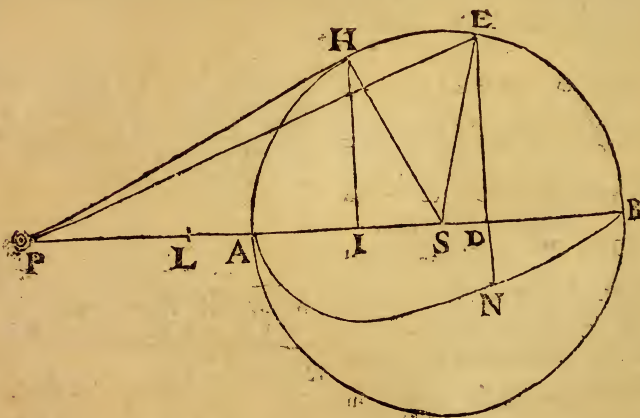
Sit vis attractiva ut distantiæ z dignitas $\frac{1}{z^n}$ erit $V = z^n$, quo valore loco V in formulâ posito, fiet $DN \times dx$ ut $\frac{mz^{2-n}dz}{c} - \frac{z^{4-n}dz}{4c^2} - pqz^{-n}dz$, unde sumptis singulorum terminorum fluentibus (165) erit S. $DN \times dx$, seu area AND, ut $\frac{mz^{3-n}}{3-n \times c} - \frac{z^{5-n}}{5-n \times 4c^2} - \frac{pqz^{1-n}}{1-n} + Q$. *constans.* Sed fluens illa evanescere debet dum fit PE $(z) = PA$ (a) est ergo $Q = \frac{a^{5-n}}{5-n \times 4c^2} + \frac{pqa^{1-n}}{1-n} - \frac{ma^{3-n}}{3-n \times c}$ ac proinde fluens accurata ubi PE $(z) = PB$ (b) erit $\frac{mb^{3-n}}{3-n \times c} - \frac{b^{5-n}}{5-n \times 4c^2} - \frac{pqb^{1-n}}{1-n} + \frac{a^{5-n}}{5-n \times 4c^2} + \frac{pqa^{1-n}}{1-n} - \frac{ma^{3-n}}{3-n \times c}$:

520. Cum sit semper $PE^2 = 2PS \times LD$; & ubi PE fit PB sit $LD = LB$, ubi verò PE fit PA fit $LD = LA$, erit PB^2 $(b^2) = 2PS \times LB$ $(2cq)$ & $PA^2 (a^2) = 2PS \times LA$ $(2cp)$ quibus valoribus loco, b^2 & a^2 substitutis, formula fit $\frac{2mqb^{1-n}}{3-n} - \frac{q^2b^{1-n}}{5-n} - \frac{pqb^{1-n}}{1-n} + \frac{p^2a^{1-n}}{5-n} + \frac{pqa^{1-n}}{1-n} - \frac{2mpa^{1-n}}{3-n}$. & restitutis litteris figuræ $\frac{2SLB \times PB^{1-n}}{3-n} - \frac{LB^2 \times PB^{1-n}}{5-n} - \frac{ALB \times PB^{1-n}}{1-n} + \frac{AL^2 \times PA^{1-n}}{5-n} + \frac{ALB \times PA^{1-n}}{1-n} - \frac{2SLA \times PA^{1-n}}{3-n}$.

521. Cor. 1. Hinc liquet aream ANB, seu attractionem cui proportionalis est, semper posse algebraice inveniri, tribus tantum casibus exceptis in quibus est $n = 1$ vel 3, vel 5, seu in quibus vis attractiva decrescit in ratione distantiæ simplici, vel triplicatâ vel quintuplicatâ. In his enim casibus tribus divisores $1-n$, $3-n$, $5-n$, evanescunt; sed tum fluens per logarithmos, aut quod idem est, per quadraturam hyperbolæ obtinetur, ut exemplis infrà positis patebit.

De Motu Corporum.

Exempl. 1. Si vis centripeta ad singulas sphæræ particulas tendens sit reciprocè ut distantia; pro V scribe distantiam PE; dein $2PS \times LD$ pro PEq, & fiet DN ut $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2LD}$. Pone DN æqualem ejus duplo $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ pars data $2SL$ ducta in longitudinem AB describet aream rectangulam $2SL \times AB$; & pars indefinita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, eâ lege ut inter movendum crescendo vel decrescendo æquetur semper longitudini LD, (i) describet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$, (†) id est, aream $SL \times AB$; quæ subducta de areâ

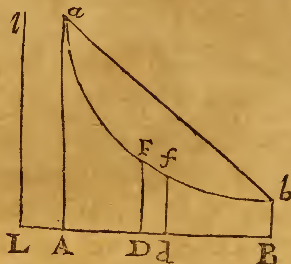


(i) 522. *Describet aream* $\frac{LBq - LAq}{2}$. Area quam describet erit trapezium, nam si à puncto L in longitudinem AB semper erigantur perpendicula æqualia LD, omnes terminabuntur in recta linea ducta à puncto L in terminum perpendiculi in B erecti & æquali LB, sicque formabitur Triangulum cujus pars secundum AB sita est area quæsita, & ea erit Trapezium cujus latera in A & B perpendicularia, inter se parallela sunt; & latus puncto A insistens erit æquale LA, latus verò oppositum in B erectum erit æquale LB, hujus ergo trapezii superficies erit $\frac{LA+LB}{2} \times AB$, sed $AB = LB - LA$, ergo per 6. 2. El. $\frac{LA+LB}{2} \times LB - LA = \frac{LB^2 - LA^2}{2}$; (quod trapezium est æquale Trapezio A a b B in figura Newtoniana descripto ut liquet per ejus figuræ constr.).

(†) *Id est, aream* $SL \times AB$, cum enim hæc area sit

priore $2SL \times LAB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$, ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, describet aream hyperbolicam; quæ subducta de areâ $SL \times AB$ relinquet aream quæsitam ANB. Unde talis emergit problematis constructio. Ad puncta L, A, B erige perpendicula Ll, Aa, Bb, quorum Aa ipsi LB, & Bb ipsi LA æquetur. Asymptotis Ll, LB per puncta ab describatur hyperbola ab. Et acta chorda ba claudet aream aba areæ quæsitæ ANB æqualem.

LIBER PRIMUS. PROP. LXXXI. PROBL. XLI.



Exempl. 2. Si vis centripeta ad singulas sphæræ particulas tendens sit reciprocè ut cubus distantiæ, vel (quod perinde est) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; scribe $\frac{PE\ cub.}{2ASq}$ pro V, dein $2PS \times LD$ pro PEq; & fiet DN

fit $=\frac{LA+LB}{2}\times AB$, sitque $LB=LA+2AS$ erit $LA+LB=2LA+2AS=2LS$ unde $\frac{LA+LB}{2}\times AB=LS\times AB$. Unde etiam sequitur Trapezium $AabB$ rectangulo $LS\times AB$ esse æquale.

Cæterum per methodos vulgares casus iste sequenti ratione solvitur. Sit $AD=x$, $Dd=dx$ erit areæ AND fluxio $DN\times Dd=2SL\times dx-LA\times dx-xdx-\frac{ALB\times dx}{LD}$. Primi termini $2SL\times dx$, fluens (165) est $2SL\times x=2SL\times AB$, ubi AD, seu $x=AB$. Secundi termi $LA\times dx+xdx$, fluens est $LA\times x+\frac{1}{2}xx=\frac{2LA+AB\times AB}{2}=LS\times AB$, quandò x, seu AD, fit AB. Quarè duorum priorum terminorum fluens est $2SL\times AB-SL\times AB$ sive $SL\times AB$. Jam ut tertii termini $\frac{ALB\times dx}{LD}$ fluens inveniatur describatur hyperbola AB, prout Newtonus præscribit, & super asymptoto LB erigantur perpendicula duo infinitè propinqua, DF, df, hyperbolæ occurrentia in F & f, sitque $AD=x$, $Dd=dx$, & erit (per theor. 4. de hyperbolâ) $LA\times Aa=LD\times DF$, adeóque $DF=\frac{LA\times Aa}{LD}=\frac{ALB}{LD}$, & $DF\times Dd$, seu fluxio areæ $AaFD=\frac{ALB\times dx}{LD}$. Quarè area hyperbolicâ $AaFD$, æqualis est fluenti tertii termini, & area hyperbolica $AabB$, est ejusdem termini fluens, ubi x, seu $AD=AB$. Hæc igitur subducta de rectangulo $SL\times AB$, sive de trapezio $AabB$ ipsi æquali, relinquet aream quæsitam ANB. Relinquitur autem area $aFba$; undè patet constructio.

523. Cor. 1. Si distantia corpusculi P à sphærâ evanescat, erit $Bb=LA=0$ ideoque hyperbola AFb cum suis asymptotis Ll, LB congruet nullaque erit ejus area. Quarè corpusculo posito in A, seu in contactu sphæræ attractio erit ut rectangulum $SL\times AB=2AS^2$, ut etiam demonstrari posset eodem modo ac demonstrata fuit Prop. 72.

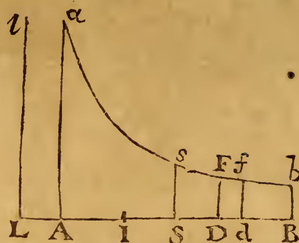
ut $\frac{SL \times ASq}{PS \times LD} - \frac{ASq}{2PS} - \frac{ALB \times ASq}{2PS \times LDq}$, id (k) eſt (ob continuè proportionales PS, AS, SI) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2} SI - \frac{ALB \times SI}{2LDq}$. Si ducantur hujus partes tres in longitudinem AB, prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream hyperbolicam; ſecunda $\frac{1}{2} SI$ aream $\frac{1}{2} AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2LDq}$ aream $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, id eſt $\frac{1}{2} AB \times SI$. De primâ ſub-

524. Cor. 2. Vis quâ corpuſculum P, versùs portionem ſphæræ convolutione ſuperficiei A E F, genitam trahitur eſt ut $LB - \frac{1}{2}x \times x - AaFD$; Nam (per not. 522.) vis illa eſt ut $2SL \times x - LA \times x - \frac{1}{2}xx - AaFD$, & $2SL = 2LA + 2AS$ & $2SL - LA = LA + 2AS = LB$, unde vis illa eſt $LB - \frac{1}{2}x \times x - AaFD$; ſed P poſito in contactu ſphæræ eſt $LB = AB$ & areâ hyperbolicâ evaneſcit, vis ergo fit in contactu $AB - \frac{1}{2}x \times x$, ſive $AB - \frac{1}{2}AD \times AD$.

525. Cor. 3. Quoniam attractio corpuſculi P versùs ſphæram totam eſt ut $SL \times AB - AabB$, ejuſdem attractio versùs portionem ſphæræ convolutione ſuperficiei F E e B (fig. prop. 80.) genitam, erit ut $SL \times AB - LB \times x + \frac{1}{2}xx + AaFD - AabB = SL \times AB - LB \times AD + \frac{1}{2}AD^2 - DFbB$, ſive ſubſtitutis $LA + \frac{1}{2}AB$ pro SL, $LA + AB$ loco LB, & pro $AB - AD$ poſito BD fiet ut $LA + \frac{1}{2}BD \times BD - DFbB$, & corpuſculo in contactu poſito, erit ut $\frac{1}{2}BD^2$.

(k) * *Id eſt, ob continuè proportionales &c.* Per prop. 8. l. 6. El. undè $AS^2 = PS \times SI$.

ducatur summa secundæ & tertiæ, & manebit area quæsita *ANB*. (l) Unde talis emergit problematis constructio. Ad puncta *L*, *A*, *S*, *B* erige perpendicula *Ll*, *Aa*, *Ss*, *Bb*, quorum *Ss* ipsi *SI* æquetur, perque punctum *s* asymptotis *Ll*, *LB* describatur hyperbola *asb* occurrens perpendiculis *Aa*, *Bb* in *a* & *b*; & rectangulum 2*ASI* subductum de area hyperbolica *AasbB* relinquet aream quæsitam *ANB*.



Exem-

(l) 526. * *Unde talis emergit problematis constructio.* Sit, ut suprà AD $= x$, Dd $= dx$, erit areæ AND, fluxio DN × Dd, ut $\frac{LSI \times dx}{LD} - \frac{1}{2} SI \times dx - \frac{ALB \times SI \times dx}{2\,\overline{LA+x}^2}$.

Jam ut primi termini $\frac{LSI \times dx}{LD}$, fluens habeatur, describatur hyperbola aSb, eo modo quo jubet Newtonus, erectisque perpendiculis DF, df, sit AD $= x$, Dd $= dx$, & quoniam (per theor. 4. de hyperbolâ) $LS \times SI = LD \times DF$, erit $DF = \frac{LSI}{LD}$, & $DF \times Dd = \frac{LSI \times dx}{LD}$. Patet igitur (ut in not. 522.) aream Hyperbolicam AasbB, æqualem esse fluenti primi termini, dum AD seu $x = AB$; secundi termini $\frac{1}{2} SI \times dx$, fluens est $\frac{1}{2} SI \times AD = \frac{1}{2} SI \times AB$, dum fit AD = AB; tertii tandem termini fluens hoc modo invenitur. Quantitatis $\frac{dx}{(LA+x)^2}$ fluens (165) est $-\frac{1}{LA+x} + Q$ *constans*; & quoniam fluens illa evanescere debet ubi $x = o$, erit $Q = \frac{1}{LA}$. Quarè fluens accurata est $\frac{1}{LA} - \frac{1}{LD} = \frac{1}{LA} - \frac{1}{LB}$, ubi $x = AB$. Est igitur tertii termini $\frac{1}{2} ALB \times SI \times \frac{dx}{\overline{LA+x}^2}$ fluens $= \frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB} = \frac{1}{2} LB \times SI - \frac{1}{2} LA \times SI = \frac{1}{2} AB \times SI$, undè summa 2^{i} & 3^{i} termini est $AB \times SI = 2AS \times SI$. Quarè rectangulum 2ASI subductum de areâ hyperbolicâ AasbB relinquet aream quæsitam ANB.

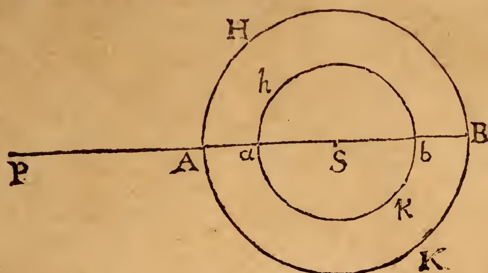
527. Cor. 1. Si corpus P sphæram tangat in A, attractio evadet infinita, nam in hoc casu LA $= o$ & Aa cum asymptoto Ll coincidit, ac proindè attractio per aream hyperbolæ infinitam BLlasb exponitur.

528. Coroll. 2. Vis quâ corpusculum P in sphæræ portionem convolutione superficiei AEF, genitam trahitur, est ut $AaFD - \frac{1}{2} SI \times AD - \frac{1}{2} LB \times SI + \frac{ALB \times SI}{2LD}$, ut ex notâ 526. manifestum est. Quarè in contactu ubi LA $= o$, erit vis illa ut area infinita AaFD, cujus respectu aliæ finitæ quantitates evanescunt.

529. Cor. 3. Et quoniam corpusculi P attractio in sphæram totam est ut area hyperbolica $AasbB - 2ASI$, ejusdem attractio versùs portionem concavo convexam, convolutione superficiei FEeB, genitam, erit ut $AasbB - AaFD - 2ASI + \frac{1}{2} AD \times SI + \frac{1}{2} LB \times SI - \frac{ALB \times SI}{2LD} = DFbB + \frac{1}{2}\overline{LA - \frac{1}{2}BD} \times SI - \frac{ALB \times SI}{2LD}$, ponendo AB pro 2AS, $\frac{1}{2}LA + \frac{1}{2}AB$ pro $\frac{1}{2}LB$, & $\frac{1}{2}BD$ pro $\frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}AD$.

De Motu Corporum.

Exempl. 3. Si vis centripeta, ad singulas sphæræ particulas tendens, decrescit in quadruplicatâ ratione distantiæ à particulis; scribe $\frac{PEqq}{2AScub.}$ pro V, dein $\sqrt{2PS \times LD}$ (m) pro PE, & fiet DN ut $\frac{SIq \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDc}} - \frac{SIq}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}} - \frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDqc}}$. (n) Cujus tres partes ductæ in longi-



530. Cor. 4. Simili modo inveniri potest vis quâ corpus P trahitur versùs sphæram concavam A a H B K a, si ex attractione in sphæram totam solidam detrahatur attractio in sphæram interiorem a h b k. Patet autem corpusculi P in A, seu in contactu positi attractionem versùs sphæram cavam A a H B K a, interiori concentricam, infinitam esse; Nam si ex vi infinitâ quâ versùs sphæram solidam A H B K S, trahitur, subducatur vis finita quâ versùs sphæram interiorem a h b k s urgetur, relinquetur attractio infinita versùs sphæram concavam A a H B K a; quin imò, si ex sphærâ concavâ detrahatur pars quævis à contactu remota ut H h B K k, attractio corpusculi in contactu A positi versùs residuam H h A a K k, adhuc infinita erit, ut patet (per cor. 2. & 3.).

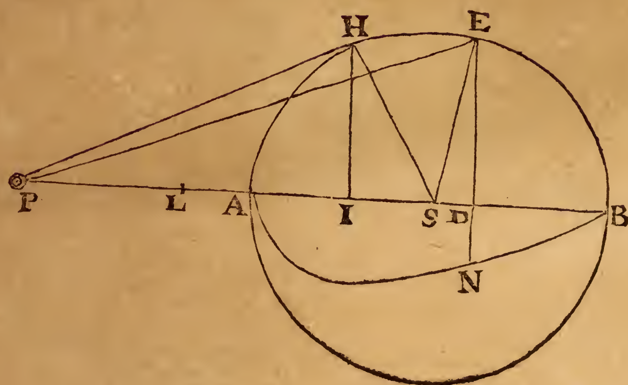
(m) * *Pro PE.* Erit $PE^5 = 4PS^2 \times LD^2 \times \sqrt{2PS \times LD}$, & $AS^3 = PS \times SI \times \sqrt{PS \times SI}$. Undè fiet $\frac{SLD \times PS}{PE \times V} = \frac{4SLD \times PS \times AS^3}{PE^5} = \frac{4SL \times LD \times PS^2 \times SI\sqrt{PS \times SI}}{4PS^2 \times LD^2 \times \sqrt{2PS \times LD}} = \frac{SL \times SI\sqrt{SI}}{LD\sqrt{2LD}} = \frac{SL \times SI^2}{LD\sqrt{2SI \times LD}} = \frac{SI^2 \times SL}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD^3}}$. Et ità de cæteris terminis.

(n) * *Cujus tres partes &c.* Sit $AD = x$ fluxio $AD = dx$, & erit areæ AND fluxio $DN \times dx$, ut $\frac{SI^2 \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{dx}{\overline{LA+x}^{\frac{3}{2}}} - \frac{SI^2}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{dx}{\overline{LA+x}^{\frac{1}{2}}} - \frac{SI^2 \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{dx}{\overline{LA+x}^{\frac{5}{2}}}$, quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA+x}^{\frac{3}{2}}}$, seu $\overline{LA+x}^{-\frac{3}{2}}dx$ fluens est

LA

longitudinem AB, producunt areas totidem, *viz.* $\frac{2 SIq \times SL}{\sqrt{2 SI}}$

LIBER PRIMUS. PROP. LXXXI. PROBL. XLI.



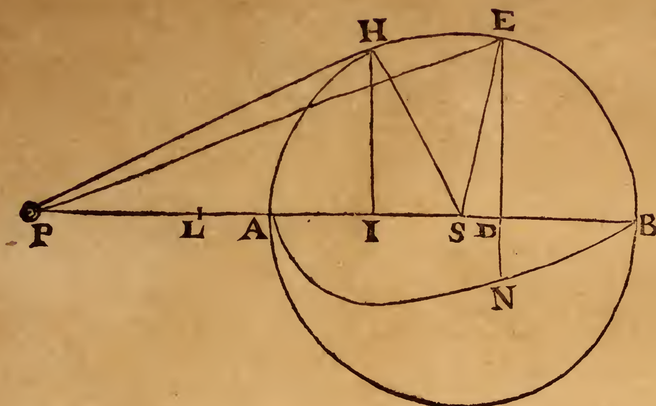
in $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$; $\frac{SIq}{\sqrt{2 SI}}$ in $\sqrt{LB} - \sqrt{LA}$; & $\frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2 SI}}$

in

$\frac{-2}{\overline{LA+x}^{\frac{1}{2}}} + Q$ *conſt.* (165) quæ evaneſcere debet ubi $x=0$; Quarè erit $Q = \frac{2}{\sqrt{LA}}$, & fluens accurata $= \frac{2}{\sqrt{LA}} - \frac{2}{\sqrt{LB}}$, dum fit $x = AB$. Primi igitur termini fluens erit $\frac{2 SI \times SL}{\sqrt{2 SI}}$, in $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$. Quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA+x}^{\frac{1}{2}}}$, fluens eſt $2(LA+x)^{\frac{1}{2}} + Q$ *conſt.* & factâ $x=0$, invenitur $Q = -2\sqrt{LA}$; quarè fluens accurata eſt $2\sqrt{LB} - 2\sqrt{LA}$, dum $x = AB$. Secundi igitur termini fluens erit $\frac{SI^2}{\sqrt{2 SI}}$, in $\sqrt{LB} - \sqrt{LA}$.

Quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA+x}^{\frac{5}{2}}}$, fluens eſt $\frac{-2}{3(LA+x)^{\frac{3}{2}}} + Q$, & $Q = \frac{2}{3\sqrt{LA^3}}$, undè fluens integra erit $\frac{2}{3\sqrt{LA^3}} - \frac{2}{3\sqrt{LB^3}}$, ubi $x = AB$, & proindè tertii termini fluens eſt $\frac{SI^2 \times ALB}{3\sqrt{2 SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA^3}} - \frac{1}{\sqrt{LB^3}}$.

in $\frac{1}{\sqrt{LA\ cub.}} - \frac{1}{\sqrt{LB\ cub.}}$. Et (°) hæ poſt debitam re-



ductionem fiunt $\frac{2\,SIq \times SL}{LI}$, SIq, & $SIq + \frac{2\,SI\ cub.}{3\,LI}$. Hæ vero, ſubductis poſterioribus de priore, evadunt $\frac{4\,SI\ cub.}{3\,LI}$. Proin-

(o) * *Et hæ poſt debitam reductionem &c.* Eſt $PS \times SI = AS^2$ (per prop. 8. Lib. 6. Elem.) ſed $PS = LS + LI$, ob $PL = LI$, (per conſtr.) & $SI = LS - LI$, ergò $PS \times SI = LS^2 - LI^2 = AS^2$, & hinc $LI^2 = LS^2 - AS^2 = \overline{LS + AS} \times \overline{LS - AS} = LB \times LA$. Quarè LI ſive $LS - LI = \sqrt{LA \times LB}$, & $2\,LS - 2\,SI = 2\sqrt{LA \times LB}$, & $2\,SI = 2\,LS - 2\sqrt{LA \times LB} = LB - 2\sqrt{LB \times LA} + LA$, & extractâ utrinque radice quadratâ $\sqrt{2\,SI} = \sqrt{LB} - \sqrt{LA}$. His poſitis, facilis eſt terminorum reductio; erit enim $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}} = \frac{\sqrt{LB} - \sqrt{LA}}{\sqrt{LB \times LA}} = \frac{\sqrt{2\,SI}}{LI}$. Quarè patet primum fluentis terminum eſſe $\frac{2\,SI^2 \times SL}{LI}$; ſecundum verò eſſe SI^2. Tertius terminus, reductione ad communem denominatorem factâ, eſt $\frac{SI^2 \times LA \times LB}{3\sqrt{2\,SI}} \times \frac{\sqrt{LB^3} - \sqrt{A^3}}{LA \times LB\sqrt{LA \times LB}} = \frac{SI^2 \times \sqrt{LB^3} - \sqrt{LA^3}}{3\,LI \times \sqrt{LB} - \sqrt{LA}}$. Peractâ diviſione invenitur $\frac{LB^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}}}{LB^{\frac{1}{2}} - LA^{\frac{1}{2}}} = LB +$

LB

Proinde vis tota, quâ corpusculum *P* in sphæræ centrum trahitur, est ut $\frac{SI\ cub.}{PI}$, (p) id est, reciprocè ut $PS\ cub. \times PI$. *Q. E. I.*

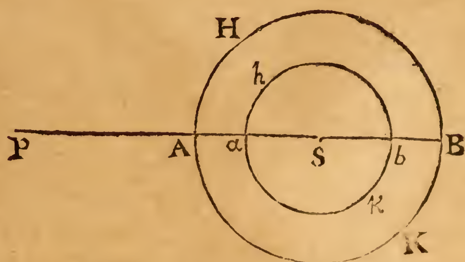
Eâdem methodo determinari potest attractio corpusculi siti intra sphæram, sed expeditius per theorema sequens.

PRO-

$LB^{\frac{1}{2}} \times LA^{\frac{1}{2}} + LA = LB + LI + LA = 2SI + 3LI$, ob $LB + LA = 2LS = 2SI + 2LI$. Quare tertius terminus est $\frac{SI^2 \times 2SI + 3LI}{3LI} = SI^2 + \frac{2SI^3}{3LI}$, unde tres fluentes ad communem denominatorem reducti fiunt $\frac{6SI^2 \times SL - SI^2 \times 3LI - SI^2 \times 3LI - 2SI^3}{3LI} = \frac{6SI^2 \times \overline{SL - LI} - 2SI^3}{3LI}$, sed quia $SL - LI = SI$ fiunt $\frac{6SI^3 - 2SI^3}{3LI} = \frac{4}{3}\frac{SI^3}{LI}$.

(p) * *Id est reciprocè ut $PS^3 \times PI$.* Nam cum sit $PS \times SI = AS^2$, ideóque $SI = \frac{AS^2}{PS}$, hinc, dato radio AS, est SI ut $\frac{1}{PS}$, SI^3, ut $\frac{1}{PS^3}$; Est verò $= \frac{1}{2}PI$ ideóque etiam & LI ut PI, unde erit $\frac{4SI^3}{3LI}$ ut $\frac{1}{PS^3 \times PI}$, neglectâ fractione $\frac{4}{3}$.

531. Cor. 1. In accessu corporis P ad sphæram, ità crescit illiùs attractio, ut in contactu infinita evadat, dum enim coincidit P cum A, puncta H & I cum eodem puncto A coincidunt, fitque PI = o, & proindè quantitas $\frac{1}{PS^3 \times PI}$, infinita.



532. Cor. 2. Attractio corpusculi in contactu A positi versùs sphæram cavam AaHBKa, infinita est. Hæc enim attractio habetur, si ex attractione infinitâ versùs sphæram solidam AHBKS, subducatur attractio finita versùs sphæram interiorem ahbkS.

533. Hic adjungemus solutionem casûs tertii qui pendet à quadraturâ hyperbolæ, ubi nempè vis est ut PE^5 reciprocè (520). Scribe igitur $\frac{PE^5}{2AS^4}$, pro V; dein $8PS^3 \times LD^3$ pro PE^6, & $PS \times SI$ pro AS^2, unde est $\frac{PS}{PE \times V} = \frac{SI^2}{4LD^3}$ & fiet DN, ut $\frac{SL \times SI^2}{2LD^2} - \frac{SI^2}{4LD} - \frac{ALB \times SI^2}{4LD^3}$ seu, ut $\frac{SL \times SI^2}{LD^2} - \frac{1}{2}\frac{SI^2}{LD} - \frac{1}{2}\frac{ALB \times SI^2}{LD^3}$; undè fluxio $DN \times Dd$, erit ut $\frac{SL \times SI^2 \times dx}{\overline{LA + x}^2}$

PROPOSITIO LXXXII. THEOREMA XLI.

In ſphærâ centro S *intervallo* S A *deſcriptâ, ſi capiantur* S I, S A, S P *continuè proportionales: dico quod corpuſculi intra ſphæram, in loco quovis* I, *attractio eſt ad attractionem ipſius extra ſphæram, in loco* P, *in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione diſtantiarum à centro* I S, P S, *& ſubduplicatâ ratione virium centripetarum, in locis illis* P *&* I, *ad centrum tendentium.*

Ut, ſi vires centripetæ particularum ſphæræ ſint reciprocè ut diſtantiæ corpuſculi à ſe attracti; vis, quâ corpuſculum ſitum in *I* trahitur à ſphærâ totâ, erit ad vim, quâ trahitur in *P*, in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione diſtantiæ *S I* ad diſtantiam *S P*, & ratione ſubduplicatâ vis centripetæ in loco *I*, à particulâ aliquâ in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco *P* ab eâdem in centro particulâ oriundam, id eſt, ratione ſubduplicatâ diſtantiarum *S I*, *S P* ad invicem reci-

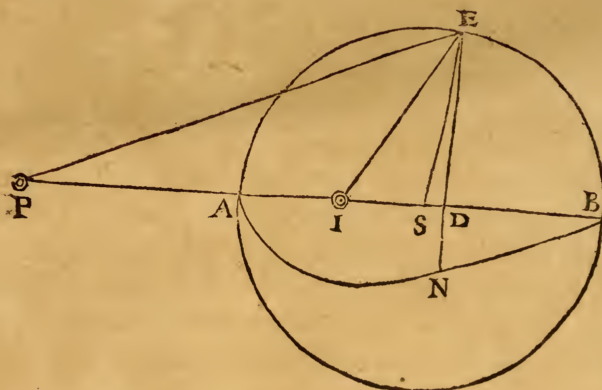
$-\frac{1}{2}\frac{SI^2 \times dx}{LA+x} - \frac{1}{2}\frac{ALB \times SI^2 \times dx}{\overline{LA+x}^3}$, poſitâ $AD = x$.

Quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA+x}^2}$, fluentem ſuprà (526) invenimus eſſe $\frac{1}{LA} - \frac{1}{LB} = \frac{LB-LA}{LA \times LB} = \frac{AB}{LI^2}$ ubi x ſeu $AD = AB$. Quarè primi termini fluens erit $\frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$.

Quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA+x}^3}$ fluens $= \frac{-1}{2\overline{LA+x}^2} + Q$ *conſt.* quæ evaneſcere debet poſitâ x, ſeu $AD = 0$, quarè erit $Q = \frac{1}{2LA^2}$ & fluens accurata, ubi $AD = AB$, erit $\frac{1}{2LA^2} - \frac{1}{2LB^2} = \frac{LB^2 - LA^2}{2LA^2 \times LB^2} = \frac{2SL \times AB}{2LI^4} = \frac{SL \times AB}{LI^4}$; undè tertii termini fluens erit $\frac{1}{2}\frac{ALB \times SI^2 \times SL \times AB}{LI^4} = \frac{1}{2}\frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$, & differentia fluentium primi & tertii termini erit $\frac{1}{2}\frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$. Secundi termini $\frac{1}{2}SI^2 \times \frac{dx}{LA+x}$, *fluens eſt area* hyperbolæ quæ ità deſcribitur. Ad puncta L, A, B, vid. (fig. exempli 2i.) erige perpendicula L l, A a, B b, & aſymptotis L l, LB, deſcribe Hyperbolam æquilateram cujus ſit dignitas $\frac{1}{2}SI^2$, & quoniam eſt (theor. 4. Hyp.) $LD \times DF = \frac{1}{2}SI^2$ ideóque $DF = \frac{1}{2}\frac{SI^2}{LD}$, erit $DF \times Dd = \frac{1}{2}\frac{SI^2 \times dx}{LA+x}$ poſitâ $AD = x$. Quapropter area hyperbolica A a b B, æqualis eſt fluenti ſecundi termini ubi $AD = AB$. Hæc igitur area ſubducta de rectangulo $\frac{1}{2}\frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$ relinquet aream quæſitam ANB.

reciprocè. Hæ duæ rationes ſubduplicatæ componunt rationem æqualitatis, & propterea attractiones in I & P à ſphærâ totâ factæ æquantur. Simili computo, ſi vires particularum ſphæræ ſunt reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiarum, colligetur quod attractio in I ſit ad attractionem in P, ut diſtantia SP ad ſphæræ ſemidiametrum SA: ſi vires illæ ſunt reciprocè

LIBER PRIMUS. PROP. LXXXII. THEOR. XLI.



in triplicatâ ratione diſtantiarum, attractiones in I & P erunt ad invicem ut SP *quad.* ad SA *quad.*: Si in quadruplicatâ, ut SP *cub.* ad SA *cub.* Unde cum attractio in P, in hoc ultimo caſu, inventa fuit reciprocè ut PS *cub.*$\times PI$, attractio in I erit reciprocè ut SA *cub.*$\times PI$, id eſt (ob datum SA *cub.*) reciprocè ut PI. Et (q) ſimilis eſt progreſſus in infinitum. Theorema verò ſic demonſtratur. Stan-

(q) * *Similis eſt progreſſus in infinitum.* Vires centripetæ acceleratrices à particulâ aliquâ in centro poſitâ oriundæ, ſint inter ſe in diſtantiis IS, PS reciprocè ut harum diſtantiarum poteſtates IS^n, PS^n, & vis quâ corpuſculum ſitum in I trahitur à ſphærâ totâ, erit ad vim quâ trahitur in loco P ut $IS^{\frac{1}{2}}$ ad $PS^{\frac{1}{2}}$ & $PS^{\frac{n}{2}}$ ad $IS^{\frac{n}{2}}$ conjunctim, hoc eſt, ut $PS^{\frac{n-1}{2}}$ ad $IS^{\frac{n-2}{2}}$. Quarè cum ſit, (ex Hyp.) $PS:AS=AS:SI$, adeóque $IS=\frac{AS^2}{PS}$, & $IS^{\frac{n-1}{2}}=\frac{AS^{n-1}}{PS^{\frac{n-1}{2}}}$, vires illæ erunt ad invicem ut $PS^{\frac{n-1}{2}}$ ad $\frac{AS^{n-1}}{PS^{\frac{n-1}{2}}}$, ſeu ut PS^{n-1} ad AS^{n-1}. Hinc ſi $n=1$, vires erunt in ratione æqualitatis, ſi $n=2$, erunt ut PS ad AS; Si $n=3$ ut PS^2 ad AS^2, ſi $n=4$ ut PS^3 ad AS^3, & ità porrò in infinitum.

Stantibus jam ante conſtructis, & exiſtente corpuſculo in loco quovis *P*, ordinatim applicata *DN* (r) inventa fuit ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$. Ergo ſi agatur *IE*, ordinata illa pro alio quovis corpuſculi loco *I*, (ſ) mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DEq \times IS}{IE \times V}$. Pone vires centripetas, è ſphæræ puncto quovis *E* manantes, eſſe ad invicem in diſtantiis *IE*, *PE*, ut PE^n ad IE^n (ubi numerus *n* deſignet indicem poteſtatum *PE* & *IE*) & (t) ordinatæ illæ fient ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times PE^n}$ & $\frac{DEq \times IS}{IE \times IE^n}$, quarum ratio ad invicem eſt ut $PS \times IE \times IE^n$ ad $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob continuè proportionales *SI*, *SE*, *SP*, (u) ſimilia ſunt triangula *SPE*, *SEI*, & inde fit *IE* ad *PE* ut *IS* ad *SE* vel *SA*; pro ratione *IE* ad *PE* ſcribe rationem *IS* ad *SA*; & ordinatarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PE^n$. (x) Sed *PS* ad *SA* ſubduplicata eſt ratio diſtantiarum *PS*, *SI*; &

(r) * *Ordinatim applicata DN inventa fuit &c.* (cor. 4. prop. 80.)

(ſ) * *Mutatis mutandis.* Nempè corpore in I ſito, radio IE, deſcribendus arcus circuli, & in formulâ attractionis $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$, loco PS & PE, ſcribe IS, & IE.

(t) * *Et ordinatæ illæ &c.* Si loco V ſcribantur PE^n, & IE^n, quæ ſunt reciprocè ut vires acceleratrices in locis P & I, (per cor. 4. prop. 80.)

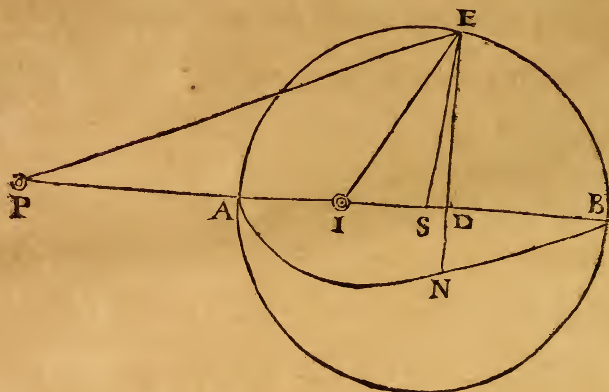
(u) * *Similia ſunt triangula SPE, SEI*, per prop. 6. Lib. 6. Elem.

(x) * *Sed PS ad SA ſubduplicata eſt ratio diſtantiarum PS, SI*, ob continuè proportionales PS, SA, SI. Porrò vires in diſtantiis PS, IS, ſunt ad invicem ut IS^n, ad PS^n (ex Hyp.) & $IS : PS = IS^2 : AS^2 = IE^2 : PE^2$, (ob proportionales $IE : PE = IS : AS$), atque adeò $IS^n : PS^n = IE^{2n} : PE^{2n}$, & $IS^{\frac{n}{2}} PS^{\frac{n}{2}} = IE^n : PE^n$. Quarè IE^n eſt ad PE^n in ratione ſubduplicatâ virium in diſtantiis PS, IS, & ordinatarum ratio $PS \times IE^n$, ad $SA \times PE^n$ æqualis eſt rationi $PS^{\frac{1}{2}} \times IS^{\frac{n}{2}}$, ad $IS^{\frac{1}{2}} \times PS^{\frac{n}{2}}$.

534. Scholium. *Iiſdem poſitis quæ in* prop. 82. ſi centro I radio IA ſphæra ACMD deſcripta ſit, vis quâ corpuſculum in I ſitum à totâ ſphærâ majore AHBK versùs centrum S trahitur, æqualis eſt vi quâ ſubductâ ſphæra minore ACMD traheretur. Nam corpuſculum in centro I ſphæræ ACMD poſitum, æqualiter undiquè ab hujus ſphæræ minoris partibus trahitur.

535. Cor. 1. Si centro S radio SI deſcripta ſit ſphæra Ihbk, & vis centripeta in receſſu corporis attracti decreſcat in triplicatâ ratione diſtantiarum à particulis materiæ trahentibus, corpuſculum in I ſitum ſeu in contactu ſphæræ cavæ AIHBKI, ſubductâ ſphærâ interiore Ihbk, vi infinitâ retrahitur à centro S versùs A. Nam vis quâ corpuſculum

& IE^n ad PE^n (ob proportionales *IE* ad *PE* ut *IS* ad *SA*) ſubduplicata eſt ratio virium in diſtantiis *PS*, *IS*. Ergo ordina- LIBER PRIMUS. PROP. LXXXII. THEOR. XLI.

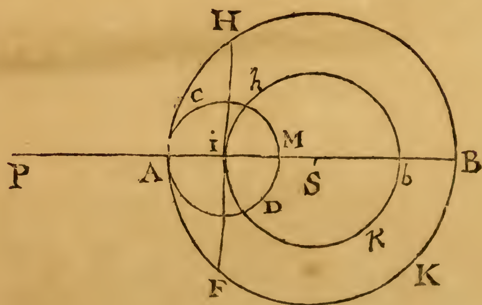


tæ, & propterea areæ quas ordinatæ deſcribunt hiſque proportionales attractiones, ſunt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatis illis rationibus. *Q. E. D.*

PRO-

lum in contactu I à ſphærâ interiore I h b k versùs centrum S trahitur, infinita eſt (520. 527.) reſpectu vis illius quâ extrà contactum traheretur. Sed vis quâ à ſphærâ totâ ſolidâ A H B K S, verſus idem centrum S trahitur finita eſt, ut potè quæ rationem finitam habeat ad vim finitam, quâ corpuſculum in loco P urgeretur (prop. 82.) ergò vis quâ à ſphærâ cavâ AIHBKI, retrahitur à centro versùs A infinita eſt; vis enim quâ in centrum S, à ſphærâ ſolidâ A H B K S in centrum trahitur, æqualis eſt vi ſphæræ interioris I h b k s, demptâ vi contrariâ ſphæræ cavæ A I H B K I.

536. Cor. 2. Ductâ per I rectâ H F ad A B perpendiculari & ſphæræ occurrente in H & F vis quâ ſphæræ ſegmentum A H F corpuſculum in contactu, I ſitum verſus A trahit, eſt etiam infinita in eâdem virium hypotheſi. Nam partes omnes ſegmenti cavi I H b B K F I, corpus in I poſitum ad centrum S trahunt, ideóque à ſolo ſegmento A H F à centro verſus A retrahitur, ſed vi infinitâ à centro retrahitur 535. Ergo &c.

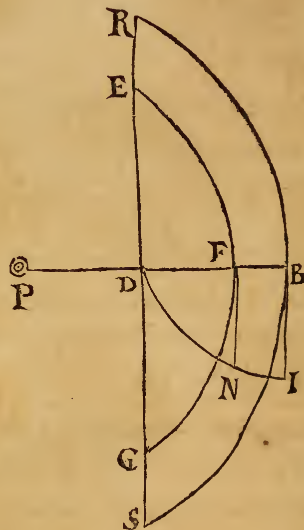


De Motu Corporum.

PROPOSITIO LXXXIII. PROBLEMA XLII.

Invenire vim quâ corpusculum in centro sphæræ locatum ad ejus segmentum quodcunque attrahitur.

Si *P* corpus in centro sphæræ, & *RBSD* segmentum ejus plano *RDS* & superficie sphæricâ *RBS* contentum. Superficie sphæricâ *EFG* centro *P* descriptâ secetur *DB* in *F*, ac distinguatur segmentum in partes *BREFGS*, *FEDG*. Sit autem superficies illa non purè mathematica, sed physica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur ista profunditas O, & erit hæc superficies (per (y) demonstrata *Archimedis*) ut $PF \times DF \times O$. Ponamus præterea vires attractivas particularum sphæræ esse reciprocè ut distantiarum dignitas illa, cujus index est *n*; & vis, quâ superficies *EFG* trahit corpus *P*, erit (per prop. LXXIX.) ut $\frac{DEq \times O}{PF^n}$, id (z) est, ut $\frac{2DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DFq \times O}{PF^n}$.



Huic proportionale sit perpendiculum *FN* ductum in O; & (a) area curvilinea *BDI*, quam ordinatim applicata *FN* in

(y) * *Per demonstrata Archimedis.* Nam (515) elementum superficiei EFG, est ut PF ducta in elementum lineæ DF, adeóque ob datam PF, respectu superficiei totius EFG, superficies illa (165.) erit ut $PF \times DF$, & proindè lamina ex hâc superficie & profunditate O, genita erit ut $PF \times DF \times O$.

(z) * *Id est* &c. Nam (per prop. 13. Lib. 6. Elem.) $DE^2 = \overline{2PF - DF} \times DF = 2PF \times DF - DF^2$. Quarè $\frac{DE^2 \times O}{PF^n} = \frac{2DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DF^2 \times O}{PF^n}$.

(a) 537. * *Et area curvilinea &c.* Si segmentum RBSDR, in laminas innumeras profunditatis evanescentis O divisum intelligatur, & capiatur semper perpendiculum FN, vi singularum laminarum proportionale; manifestum est (per Lem. 4.) summam elementorum $FN \times O$, seu aream curvilineam DNIB, proportionalem fore summæ virium. Sit igitur $PD = a$, $PF = x$,

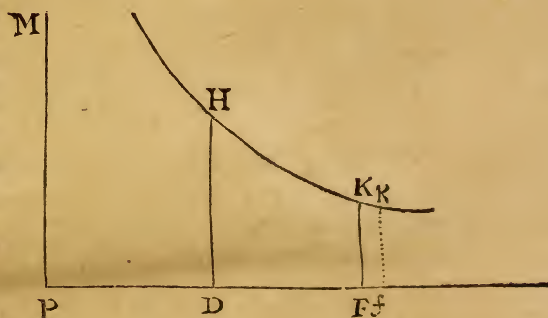
in longitudinem *D B* per motum continuum ducta describit, erit ut vis tota quâ segmentum totum *R B S D* trahit corpus *P*. *Q. E. I.*

LIBER PRIMUS. PROP. LXXXIII. PROBL. XLII.

$= x$, $DF = x - a$, & erit laminæ sphæricæ EFG vis attractiva ut $\frac{2xdx - 2adx}{x^{n-1}} = \frac{xxdx - 2axdx + aadx}{x^n} = \frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{aadx}{x^n} = x^{2-n}dx - aax^{-n}dx$, cujus fluens $= \frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{aax^{1-n}}{1-n} + Q$ *const.* Sed posita $x = a$, segmentum & vis illius evanescunt, ergò erit $Q = -\frac{a^{3-n}}{3-n} + \frac{a^{3-n}}{1-n} = \frac{2a^{3-n}}{\overline{3-n} \times \overline{1-n}}$, & fluens accurata $= \frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{aax^{1-n}}{1-n} + \frac{2a^{2-n}}{\overline{3-n} \times \overline{1-n}}$.

538. Cor. Hinc patet vim quâ corpus in P locatum, à segmento trahitur semper posse algebraicè exponi, duobus casibus exceptis in quibus n est 1 vel 3. tùm autem per logarithmos vel areas hyperbolicas habetur. In 1°. casu areæ DNI, fluxio erit $xdx - \frac{aadx}{x}$. Primi termini fluens est $\frac{1}{2}xx + Q$, quæ evanescere debet positâ $x = a$, quare erit $Q = -\frac{1}{2}aa$, & fluens accurata $= \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}aa$. Ut secundi termini fluens obtineatur, per punctum P agatur PM ad PF normalis, & asymptotis PM, PF, describatur Hyperbola æquilatera cujus sit dignitas PD^2, per puncta D, F, f erigantur perpendicula DH, FK, fk hyperbolæ occurrentia in H, F, f, sintque puncta F, f, infinitè propinqua, & erit area hyperbolica DHKF, æqualis fluenti secundi termini; nam (per theor. 4. de hyperbolá) $PD \times DH = PD^2 = PF \times FK$, & ideò $FK = \frac{PD^2}{PF}$, ac $FK \times Ff = \frac{PD^2 \times dx}{x}$ & area DHKF evanescit, ubi PF seu $x = PD$.

In 2°. casu areæ DNI, fluxio est $\frac{dx}{x} - \frac{aadx}{x^3}$. Secundi termini fluxio est $\frac{aa}{2xx} + Q$, & invenitur $Q = -\frac{1}{2}$, positâ $x = a$, atque adeò fluens accurata, erit $\frac{aa}{2ax} - \frac{1}{2}$. Ponatur $a = 1$, & primi ter-

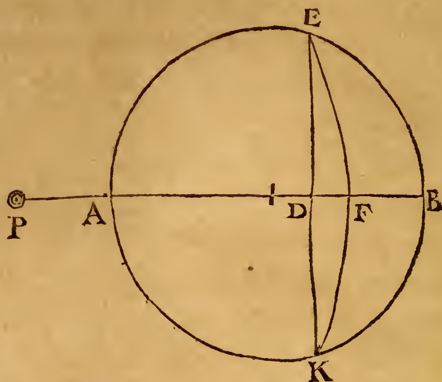


mini $\frac{dx}{x}$, fluens, erit area hyperbolica $DHKF = S.\frac{aadx}{x}$. Quarè area DNI est ut, $DHKF + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}xx$.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO LXXXIV. PROBLEMA XLIII.

Invenire vim, quâ corpusculum, extra centrum sphæræ in axe segmenti cujusvis locatum, attrahitur ab eodem segmento.



A segmento *E B K* trahatur corpus *P* in ejus axe *A D B* locatum. Centro *P* intervallo *P E* describatur superficies sphærica *E F K*, quâ distinguatur segmentum in partes duas *E B K F E* & *E F K D E*. ([b]) Quæratur vis partis prioris per prop. LXXXI. & vis partis posterioris per prop. LXXXIII.; & summa virium erit vis segmenti totius *EBKDE*. *Q. E. I.*

Scholium.

Explicatis attractionibus corporum sphæricorum, jam pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis similiter constantium corporum; sed ista particulatim tractare minus ad institutum spectat. Suffecerit propositiones quasdam generaliores de viribus hujusmodi corporum deque motibus inde oriundis, ob ([c]) earum in rebus philosophicis aliqualem usum, subjungere.

SEC-

(b) * *Quæratur vis partis prioris.* 525. 529.

(c) * *Ob earum in rebus philosophicis aliqualem usum.* Vide quæstiones Lib 4. optices Newtoni. 30 theoremata ad calcem astronomiæ clariss. Keillii, Physicam Clariss. s'Gravesandii, Dissertationem Clariss. De Maupertuis in commentariis Paris. 1732. ubi has Newtoni sectiones clare exponit.

SECTIO XIII.

De corporum non sphæricorum viribus attractivis.

Liber Primus. Prop. LXXXV. Theor. XLII.

PROPOSITIO LXXXV. THEOREMA XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longè fortior sit, quam cum vel minimo intervallo separantur ab invicem: vires particularum trahentis, in recessu corporis attracti, decrescunt in ratione plusquam duplicatâ distantiarum à particulis.

Nam si vires decrescunt in ratione duplicatâ distantiarum à particulis; attractio versus corpus sphæricum, propterea quod (per. prop. LXXIV.) sit reciprocè ut quadratum distantiæ attracti corporis à centro sphæræ, haud sensibiliter augebitur ex contactu; atque adhuc minus augebitur ex contactu, si attractio in recessu corporis attracti decrescat in ratione minore. Patet igitur propositio de sphæris attractivis. Et (d) par est ratio orbium sphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res constat in orbibus corpora interius constituta trahentibus, cum attractiones passim per orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per prop. LXX.) tollantur, ideoque vel in ipso contactu nullæ sunt. Quod si sphæris hisce orbibusque sphæricis partes quælibet à loco contactus remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari possunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel subductæ, cum sint à loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis excessum, qui ex contactu oritur. Constat igitur propositio de corporibus figurarum omnium. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXXVI. THEOREMA XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in recessu corporis attracti decrescunt in triplicatâ vel plusquam triplicatâ ratione distantiarum à particulis, attractio longe fortior erit in contactu, quam cum trahens & attractum intervallo vel minimo separantur ab invicem.

Nam attractionem in accessu attracti corpusculi ad hujus-

(d) * *Et par est ratio orbium sphæricorum concavorum.* (Per prop. 71.). * *Au-*

De Motu Corporum.

modi ſphæram trahentem (e) augeri in infinitum, conſtat per ſolutionem problematis XLI. in exemplo ſecundo ac tertio exhibitam. Idem, per exempla illa & theorema XLI. inter ſe collata, facile (f) colligitur de attractionibus corporum verſus orbes concavo-convexos, ſive corpora attracta collocentur extra orbes, ſive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his ſphæris & orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eò ut corpora attractiva induant figuram quamvis aſſignatam, conſtabit propoſitio de corporibus univerſis. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXXVII. THEOREMA XLIV.

Si corpora duo ſibi invicem ſimilia, & ex materiâ æqualiter attractivâ conſtantia, ſeorſim attrahant corpuſcula ſibi ipſis proportionalia & ad ſe ſimiliter poſita: attractiones acceleratrices corpuſculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpuſculorum in eorum particulas totis proportionales, & in totis ſimiliter poſitas.

Nam ſi corpora diſtinguantur in particulas, quæ ſint totis proportionales, & in totis ſimiliter ſitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correſpondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas ſingulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas ſingulas correſpondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus (g) ad attractionem in totum ſecundum. *Q. E. D.*

Co-

(e) * *Augeri in infinitum conſtat &c.* (521. 527. 531.).

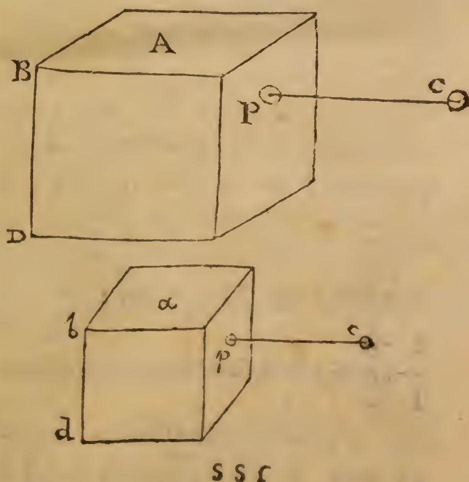
(f) * *Facilè colligitur de attractionibus &c.* 528. 530. 532. 535. 536.

(g) 539. * *Ad attractionem in totum ſecundum.* Corpora ſimilia A, a, ſeorſim attrahant corpuſcula C, c ſibi ipſis proportionalia & ad ſe ſimiliter poſita, ſintque P, p particulæ totis A, a, proportionales & in totis ſimiliter ſitæ & attractio decreſcat in ratione dignitatis diſtantiarum, cujus ſit index n; erit attractio corpuſculi C in particulam P ad attractionem corpuſculi c in particulam p, ut P $\times pc^n$, ad p $\times PC^n$. Undè ſi corpora A & a in particulas innumeras ut P & p diviſâ intelligantur, erit, componendo, attractio corpuſculi C in totum corpus A ad attractionem corpuſculi c in totum corpus a, ut P $\times pc^n$ ad p $\times PC^n$, quod par-

Corol. 1. Ergo ſi vires attractivæ particularum, augendo diſtantias corpuſculorum attractorum, decreſcant in ratione dignitatis cujuſvis diſtantiarum; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directè, & diſtantiarum dignitates illæ inversè. Ut ſi vires particularum decreſcant in ratione duplicatâ diſtantiarum à corpuſculis attractis, corpora autem ſint ut *A cub.* & *B cub.* ideoque tum corporum latera cubica, tum corpuſculorum attractorum diſtantiæ à corporibus, ut *A* & *B*: attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ quad.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ quad.}$, id eſt, ut corporum latera illa cubica *A* & *B*. Si vires particularum decreſcant in ratione triplicatâ diſtantiarum à corpuſculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ cub.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ cub.}$, id eſt, æquales. Si vires decreſcant in ratione quadruplicatâ; attractiones in corpora erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ q\ q.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ q\ q.}$, id eſt, reciprocè ut latera cubica *A* & *B*. Et ſic in cæteris.

Co-

particulæ omnes P, p ſint ubique totis ſimiles & in iis ſimiliter ſitæ, & diſtantiæ earum à corpuſculis C, c ſemper maneant proportionales diſtantiis PC, pc. Cum igitur ſit P ad p ut A ad a, & diſtantiæ pc, PC ſint lateribus homologis bd, BD proportionales (ex Hyp.) erit attractio corpuſculi C, in totum corpus A, ad attractionem corpuſculi c in totum corpus a, ut $A \times pc^n$ ad $a \times PC^n$, atque etiam ut $A \times bd^n$ ad $a \times BD^n$, & ut $BD^3 \times bd^n$, ad $bd^3 \times BD^n$, hoc eſt, ut bd^{n-3} ad BD^{n-3}, ob proportionales $A : a = BD^3 : bd^3$, (per Hyp.) ex quibus patet corollarium 1um, quod ſequitur; Nam ſi $n = 2$, erunt attractiones ut BD ad bd; ſi $n = 3$, erunt æquales; ſi, $n = 4$, erunt ut bd, ad BD, hoc eſt, reciprocè ut latera cubica corporum.

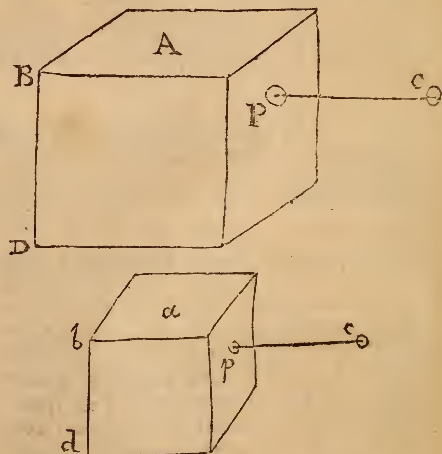


Corol. 2. (h) Unde viciſſim, ex viribus, quibus corpora ſimilia trahunt corpuſcula ad ſe ſimiliter poſita, colligi poteſt ratio decrementi virium particularum attractivarum in receſſu corpuſculi attracti; ſi modo decrementum illud ſit directè vel inversè in ratione aliquâ diſtantiarum.

PROPOSITIO LXXXVIII. THEOREMA XLV.

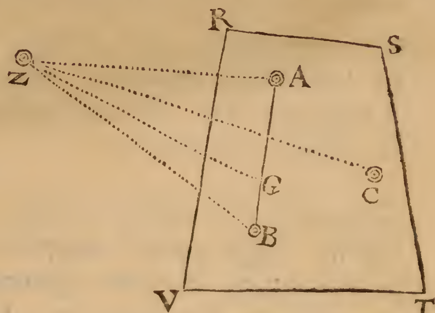
Si particularum æqualium corporis cujuſcunque vires attractivæ ſint ut diſtantiæ locorum à particulis: vis corporis totius tendet ad ipſius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi globi ex materiâ conſimili & æquali conſtantis, & centrum habentis in ejus centro gravitatis.

Corporis *RSTV* particulæ *A*, *B* trahant corpuſculum aliquod *Z* viribus, quæ, ſi particulæ æquantur inter ſe, ſint ut diſtantiæ *AZ*, *BZ*; ſin particulæ ſtatuantur inæquales, ſint ut hæ particulæ & ipſarum diſtantiæ *AZ*, *BZ* conjunctim,



(h) 540. * *Undè viciſſim &c.* Nam ſi experimentis inventum ſit attractionem corpuſculi C in corpus A, eſſe ad attractionem corpuſculi c, in corpus a, ut eſt B D ad b d, vel ut 1 ad 1, vel ut b d ab B D, vires particularum attractivarum decreſcunt in ratione diſtantiarum duplicatâ, vel triplicatâ, vel quadruplicatâ (539). Et generatim, ſi experimentis inventa fuerit attractio corpuſculi C in A ad attractionem corpuſculi c in a, ut numerus N ad numerum n, ponaturque vim particularum attractivarum in receſſu corpuſculi attracti decreſcere in ratione dignitatis diſtantiarum cujus ſit index x erit (539) $n : N = BD^{x-3} : bd^{x-3}$, adeóque (ſi L logarithmum ſignificet quantitatis cui præponitur) erit $L.\frac{n}{N} = L.\frac{BD^{x-3}}{bd^{x-3}} = \overline{x-3} \times L.\frac{BD}{bd}$. Quarè erit $x \times L.\frac{BD}{bd} = L.\frac{n}{N} + 3.L.\frac{BD}{bd}$, & $x = \frac{L.\frac{n}{N}}{L.\frac{BD}{bd}} + 3$. Invenietur itaque dignitatis index x, per tabulas logarithmicas. Exempli causâ. Si $\frac{n}{N} = \frac{bd}{BD}$, erit $L.\frac{bd}{BD} = -L.\frac{BD}{bd}$, & ideò $x = -1 + 3 = 2$. Si $\frac{n}{N} = 1$, erit $L.\frac{n}{N} = 0$, & proindè $x = 3$. Si $\frac{n}{N} = \frac{BD}{bd}$, erit $x = 4$, prorsùs ut ſuprà. Si $\frac{n}{N} = \frac{BD^p}{bd^p}$, erit $L.\frac{n}{N} = p \times L.\frac{BD}{bd}$, & $x = p + 3$. Sed ſi $\frac{n}{N} =$ bd

sive (si ita loquar) ut hæ particulæ in distantias suas AZ, BZ respectivè ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa $A \times AZ$ & $B \times BZ$. Jungatur AB, & secetur ea in G ut sit AG ad BG ut particula B ad particulam A; & erit G commune centrum gravitatis particularum A & B. Vis $A \times AZ$ (per legum corol. 2.) resolvitur in vires $A \times GZ$ & $A \times AG$, & vis $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ & $B \times BG$. Vires autem $A \times AG$ & $B \times BG$, ob proportionales A ad B & BG ad AG, æquantur; ideoque cum dirigantur in partes contrarias, se mutuo destruunt. Restant vires $A \times GZ$ & $B \times GZ$. Tendunt hæ ab Z versus centrum G, & vim $\overline{A+B} \times GZ$ componunt; hoc est, vim eandem ac si particulæ attractivæ A & B consisterent in eorum communi gravitatis centro G, globum ibi componentes.



Eodem argumento, si adjungatur particula tertia C, & componatur hujus vis cum vi $\overline{A+B} \times GZ$ tendente ad centrum G; vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis globi illius in G & particulæ C; hoc est, ad commune centrum gravitatis trium particularum A, B, C; & eadem erit, ac si globus & particula C consisterent in centro illo communi, globum majorem ibi componentes. Et sic pergitur in infinitum. Eadem est igitur vis tota particularum omnium corporis cujuscunque $RSTV$, ac si corpus illud, servato gravitatis centro, (i) figuram globi indueret. *Q. E. D.*

Corol. Hinc motus corporis attracti Z idem erit, ac si corpus attrahens $RSTV$ esset sphæricum: & propterea si corpus il-

$\frac{bdp}{BDp}$, invenietur $x = 3 - p$. Si $\frac{BD}{bd} = 10$, erit $x = \frac{L\frac{n}{N}}{1,0000000} + 3 = L\frac{n}{N} + 3$.

(i) * *Figuram globi indueret.* Per prop. 77.

lud attrahens vel quiescat, vel progrediatur uniformiter in directum; corpus attractum (k) movebitur in ellipsi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

PROPOSITIO LXXXIX. THEOREMA XLVI.

Si corpora sint plura ex particulis æqualibus constantia, quarum vires sunt ut distantiæ locorum à singulis: vis ex omnium viribus composita, quâ corpusculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis; & eadem erit, ac si trahentia illa, servato gravitatis centro communi, coirent & in globum formarentur.

Demonstratur eodem modo, atque propositio superior.

Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit, ac si corpora trahentia, servato communi gravitatis centro, coirent & in globum formarentur. Ideoque si corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quiescit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; corpus attractum movebitur in ellipsi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

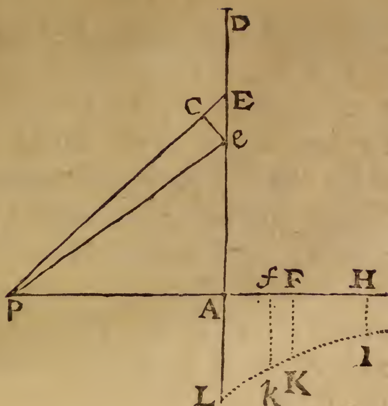
PROPOSITIO XC. PROBLEMA XLIV.

Si ad singula circuli cujuscunque puncta tendant vires æquales centripetæ, crescentes vel decrescentes in quâcunque distantiarum ratione: invenire vim, quâ corpusculum attrahitur ubivis positum in rectâ, quæ plano circuli ad centrum ejus perpendiculariter insistit.

Centro A intervallo quovis AD, in plano, cui recta AP perpendicularis est, describi intelligatur circulus; & invenienda sit vis, quâ corpusculum quodvis P in eundem attrahitur. A circuli puncto quovis E ad corpusculum attractum P agatur recta PE. In rectâ PA capiatur PF ipsi PE æqualis, &

(k) * *Movebitur in ellipsi &c.* Per cor. prop. 78. & per cor. 1. prop. 10.

& erigatur normalis FK, quæ ſit ut vis quâ punctum E trahit corpuſculum P. Sitque IKL curva linea quam punctum K perpetuò tangit. Occurrat eadem circuli plano in L. In PA capiatur PH æqualis PD, & erigatur perpendiculum HI curvæ prædictæ occurrens in I; & erit corpuſculi P attractio in circulum ut area $AHIL$ ducta in altitudinem AP. *Q. E. I.*

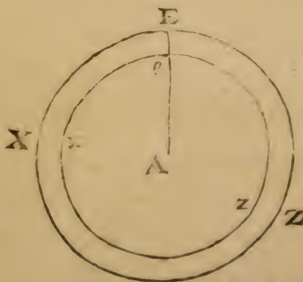


Etenim in AE capiatur linea quam minima Ee. Jungatur Pe & in PE, PA capiantur PC, Pf ipſi Pe æquales. Et quoniam vis, quâ annuli centro A intervallo AE in plano prædicto deſcripti punctum quodvis E trahit ad ſe corpus P, ponitur eſſe ut FK, & inde vis quâ punctum illud trahit corpus P verſus A, (l) eſt ut $\frac{AP \times FK}{PE}$, & vis, quâ annulus totus trahit corpus P verſus A, ut annulus & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; (m) annulus autem iſte eſt ut rectangulum ſub radio AE & latitudine Ee, & hoc (n) rectangulum (ob proportionales PE & AE, Ee & CE) æquatur rectangulo $PE \times CE$ ſeu $PE \times Ff$; erit vis, quâ annulus iſte trahit corpus P verſus A, ut $PE \times Ff$ & AP

(l) * *Eſt ut* $\frac{AP \times FK}{PE.}$, per leg. cor. 2.

(m) * *Annulus autem iſte &c.* Nam annulus E Z X e, æqualis eſt differentiæ circulorum A E Z X, A e z x, hoc eſt, $\frac{AE \times EZXE - Ae \times ezxe}{2}$, & quoniam evaneſcente E e, fit E Z X E = e z x e, erit annulus evaneſcens ut $\overline{AE - Ae} \times EZXE$, hoc eſt, ut E e × E Z X E ſive quia radius AE eſt ut peripheria EZXE, ut E e × A E'.

(n) * *Et hoc rectangulum &c.* Anguli enim ad C & A recti æquantur, &



De Motu Corporum.

$\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim, id eſt, ut contentum $Ff \times FK \times AP$, ſive ut area $FKkf$ ducta in AP. Et (o) propterea ſumma virium, quibus annuli omnes in circulo, qui centro A & intervallo AD deſcribitur, trahunt corpus P verſus A, eſt ut area tota $AHIKL$ ducta in AP. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi vires punctorum decreſcunt in duplicatâ diſtantiarum ratione, hoc eſt, ſi ſit FK ut $\frac{1}{PF\ quad.}$, (p) atque ideo area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; erit attractio corpuſculi P in circulum ut $1 - \frac{PA}{PH}$, id eſt, ut $\frac{AH}{PH}$.

Corol. 2. Et univerſaliter, ſi vires punctorum ad diſtantias D ſint reciprocè ut diſtantiarum dignitas quælibet D^n, hoc eſt, ſi ſit FK ut $\frac{1}{D^n}$, (q) ideoque area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA^{n-1}}$

angulus PEA utrique triangulo CEc, AEP communis eſt, adeóque triangula hæc ſimilia ſunt, & latera habent proportionalia. (Per prop. 4. lib. 6. Elem.)

(o) * *Et propterea ſumma virium &c.* Per cor. lem. 4.

(p) * *Atque ideò area &c.* Sit enim $PF = x$, $Ff = dx$, & erit $FK \times Ff$, ut $\frac{dx}{xx}$ (ex hyp.) cujus fluens eſt $-\frac{1}{x} + Q$ *conſt.* (165); Et quoniam area ALKF evaneſcere debet, ubi $PF = PA$, erit $Q = \frac{1}{PA}$ & area ALKF ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PF} = \frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$ ubi $PF = PH$. Cùm igitur attractio corpuſculi P, in circulum ſit ut $AHIKL \times PA$, erit quoque ut $1 - \frac{PA}{PH} = \frac{PH - PA}{PH} = \frac{AH}{PH}$.

(q) * *Ideóque area &c.* Si enim D dicatur x, erit $PK \times Ff$ ut $\frac{dx}{x^n}$, (ex hyp.) & (165.) area AFKL, ut $\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + Q$ *conſt.* poſitâ x ſeu $PF = PA$, invenitur $Q = \frac{1}{(n-1)PA^{n-1}}$, ideóque area AFKL, ut $\frac{1}{(n-1)PA^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ hoc

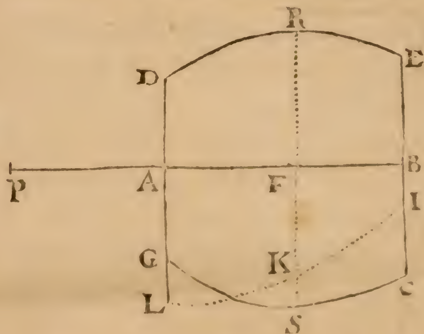
$-\frac{1}{PH^{n-1}}$; erit attractio corpusculi P in circulum ut $\frac{1}{PA^{n-2}}$ $-\frac{PA}{PH^{n-1}}$.

Corol. 3. Et si diameter circuli augeatur in infinitum, & numerus n sit unitate major; attractio corpusculi P in planum totum infinitum erit reciprocè ut PA^{n-2}, propterea quod (r) terminus alter $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ evanescet.

PROPOSITIO XCI. PROBLEMA XLV.

Invenire attractionem corpusculi siti in axe solidi rotundi, ad cujus puncta singula tendunt vires æquales centripetæ in quâcunque distantiarum ratione decrescentes.

In solidum (f) $DECG$ trahatur corpusculum P, situm in ejus axe AB. Circulo quolibet RFS ad hunc axem perpendiculari secetur hoc solidum, & in ejus semidiametro FS, in plano aliquo $PALKB$ per axem transeunte, capiatur (per prop. xc.) longitudo FK vi, quâ corpusculum P in circulum illum attrahitur, proportionalis. Tangat autem punctum K curvam lineam LKI, planis extimorum circulorum AL & BI occurrentem in L & I; & erit attractio corpusculi P in solidum ut (t) area $LABI$. *Q. E. I.*



Co-

hoc est, ob datam quantitatem n − 1, ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$ ubi $PF = PH$.

(r) * *Terminus alter evanescet.* Ob PH, infinitam.

(f) * *In solidum DECG &c.* Convolutione superficiei ADREB circà axem AB genitum.

(t) * *Ut area LABI.* Patet per cor. lem. 4. Nam area illa est ut summa virium singulorum circulorum, qui per omnia puncta lineæ AB describi possint.

541. Scholium. Sit abscissa $PF = x$, ejus fluxio dx, ordinatim applicata $FR = y$, $PR = \sqrt{yy + xx}$, & vis reciproce

ut

De Motu Corporum.

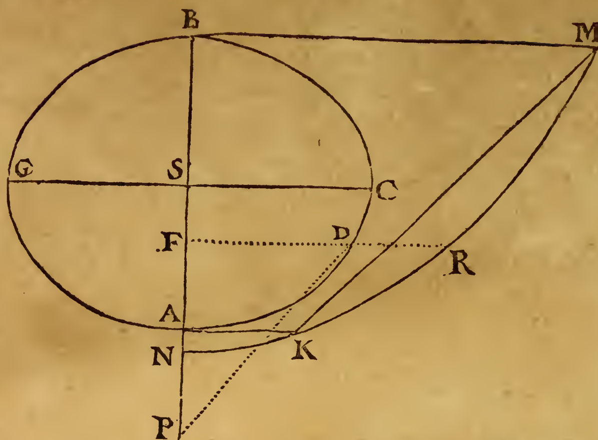
Corol. 1. Unde ſi ſolidum cylindrus ſit, parallelogrammo $ADEB$ circa axem AB revoluto deſcriptus, & vires centripetæ in ſingula ejus puncta tendentes ſint reciprocè ut quadrata diſtantiarum à punctis: (u) erit attractio corpuſculi P in hunc cylindrum ut $AB - PE + PD$. Nam ordinatim applicata FK (per corol. 1. prop. xc.) erit ut $1 - \frac{PF}{PR}$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem AB, deſcribit aream $1 \times AB$: & pars altera $\frac{PF}{PR}$ ducta in longitudinem PB, deſcribit aream 1 in $\overline{PE - AD}$, id quod ex curvæ LKI quadratura facilè oſtendi poteſt; & ſimiliter pars eadem ducta in longitudinem PA deſcribit aream 1 in $\overline{PD - AD}$, ductaque in ipſarum PB, PA differentiam AB deſcribit arearum differentiam 1 in $\overline{PE - PD}$. De contento primo $1 \times AB$ auferatur contentum poſtremum 1 in $\overline{PE - PD}$, & reſtabit area $LABI$ æqualis 1 in $\overline{AB - PE + PD}$. Ergo vis, huic areæ proportionalis, eſt ut $AB - PE + PD$.

Co-

ut diſtantiæ dignitas cujus index n, erit FK ut $\frac{1}{PF^{n-2}} - \frac{PF}{PR^{n-1}} = \frac{1}{x^{n-2}} - \frac{x}{(yy+xx)^{\frac{n-1}{2}}}$ (per cor. 2. prop. 90.) Quarè areæ AFKL fluxio erit ut $\frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{-xdx}{(yy+xx)^{\frac{n-1}{2}}}$, & hujus fluens ut vis quâ corpuſculum P in ſolidum DRSG trahitur. Datâ verò curvæ DRE naturâ, inveniendus eſt valor ordinatæ y per abſciſſam x, & indè fluens determinanda.

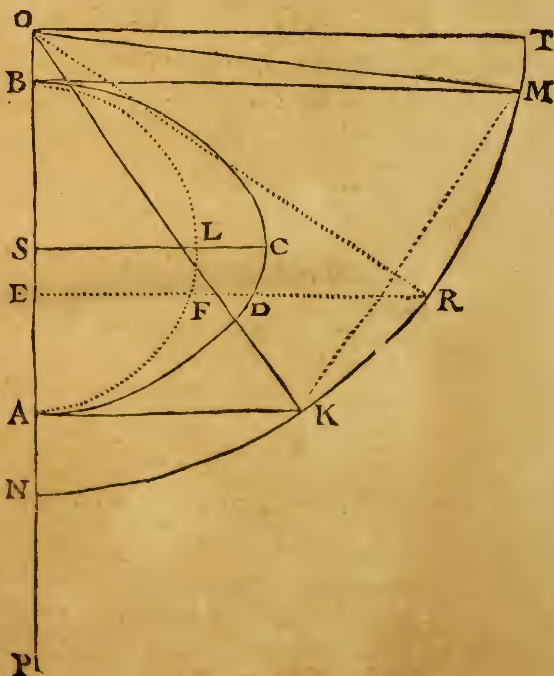
(u) * *Erit attractio corpuſculi* P *&c.* Si ordinatim applicata FR, dicatur b, patet (429) areæ AFKL, elementum fore ut $dx - \frac{xdx}{(bb+xx)^{\frac{1}{2}}}$. Fiat $bb + xx = zz$, & erit $xdx = zdz$, & proindè elementum prædictum ut $dx - dz$. Quarè AFKL erit ut $x - z + Q$, & quoniam hæc area evaneſcit, ubi PF, ſeu $x =$ PA, & PR ſeu $z =$ PD, erit $Q =$ PD $-$ PA, & area AFKL, ſeu attractio corpuſculi P, in cylindrum DRSG, ut PF $-$ PR $+$ PD $-$ PA $=$ AF $-$ PR $+$ PD $=$ AB $-$ PE $+$ PD, ubi fit PF $=$ PB, & PR $=$ PE.

Corol. 2. Hinc etiam vis innotescit, quâ sphærois *AGBC* attrahit corpus quodvis *P*, exterius in axe suo *AB* situm. (x) Sit *NKRM* sectio conica cujus ordinatim applicata *ER*, ipsi *PE* perpendicularis, æquetur semper longitudini *PD*, quæ ducitur ad punctum illud *D*, in quo applicata ista sphæroidem secat.



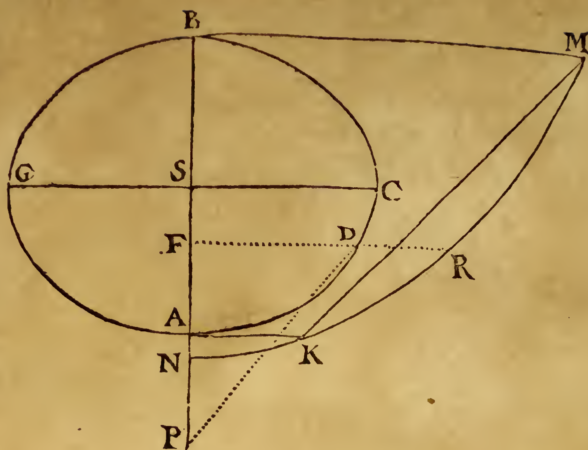
(x) 542. *Sit NKRM sectio conica cujus ordinatim applicata ER æquetur semper longitudini PD &c.* Sit AP $=a$, curvæ datæ ACB cujus convolutione generatur sphærois sit semiaxis AS $=b$, alter semiaxis SC $=c$, AE $=x$, erit PE $=a+x$, & (ex naturâ Ellipseos) erit $ED^2=\frac{cc}{bb}\times\overline{2bx-xx}$; unde quadratum ER ordinatæ ad curvam NKRM sive $PD^2=PE^2+ED^2=a^2+2ax+xx+\frac{cc}{bb}\times 2bx-\frac{cc}{bb}xx$; cum ergo hæc Æquatio ad curvam NKRM, ultrà secundum gradum non assurgat constat eam curvam esse ex Sectionibus Conicis: erit autem Ellipsis si quantitas $xx-\frac{cc}{bb}xx$ sit negativa, quod evenit ubi SC (sive c) major est quàm AS (sive b); Erit verò Parabola si ea quantitas evanescat, ideoque si $c=b$ quod evenit ubi curva ACB est circulus; Denique erit Hyperbola si ea quantitas sit positiva, hoc est, si AS sit longior axis.

543. Sit ACB Ellipsis cujus axis CS sit major axi AS, quo casu curva NKRM erit Ellipsis, hac ratione ejus curvæ NKRM determinabuntur Axes & Vertex. Dicatur ejus Ellipseos NKRM semiaxis ON $=s$, alter semiaxis OT dicatur t, distantia verticis N à vertice A curvæ ACB, dicatur



De Motu Corporum.

ſecat. A ſphæroidis verticibus A, B ad ejus axem AB erigantur perpendicula AK, BM ipſis AP, BP æqualia reſpectivè, & propterea ſectioni conicæ occurrentia in K & M; & jungatur KM auferens ab eâdem ſegmentum $KMRK$. Sit autem



ſphæ-

p, abſciſſa NE erit $= p + x$, & ordinatæ ER quadratum erit ex Ellipſeos natura $\frac{tt}{ss} \times \overline{2sp + 2sx - pp - 2px - xx}$, quod ex conſtructionis Hypotheſi fuit repertum (542) $= a^2 + 2ax + xx + \frac{cc}{bb} 2bx - \frac{cc}{bb} xx$. Conferantur horum valorum termini homogenei, ſcilicet conſtantes cum conſtantibus, eos qui unam variabilem includunt cum ſimilibus &c. fient tres iſtæ Æquationes (variabilibus deletis) $a^2 = \frac{tt}{ss} \times \overline{2sp - pp}$; $a + \frac{cc}{b} = \frac{tt}{ss} \times \overline{s - p}$; $1 - \frac{cc}{bb} = - \frac{tt}{ss}$. Ex hac tertiâ Æquatione, mutatis ſignis utrinque, reducto primo membro ad communem denominatorem, & inverſis terminis fit $\frac{ss}{tt} = \frac{bb}{cc - bb}$ & $ss = \frac{bbt^2}{cc - bb}$. Tum ſecundæ Æquationis $a + \frac{cc}{b} = \frac{tt}{ss} \times \overline{s - p}$ multiplicatis terminis per $\frac{ss}{tt}$, reductione factâ primi membri ad eumdem denominatorem, & ſubſtitutione factâ valoris $\frac{ss}{tt}$ ſupra inventi fit $s - p = \frac{b}{cc - bb} \times \overline{ba + cc}$.

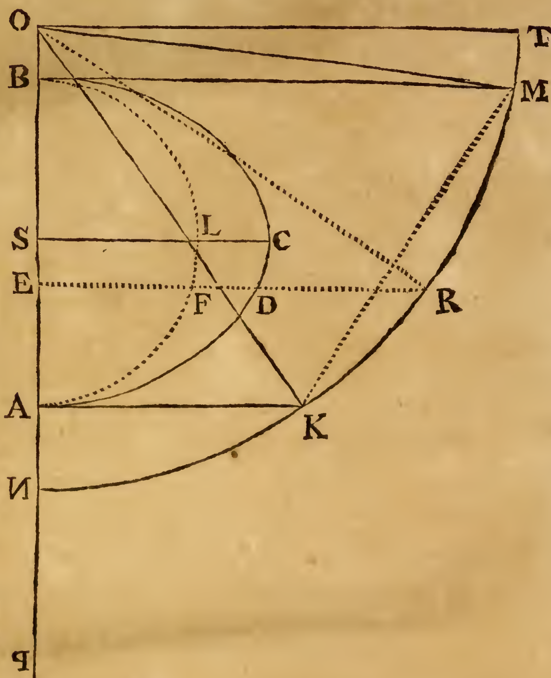
Denique, primæ Æquationis $a^2 = \frac{tt}{ss} \times \overline{2sp - pp}$ multiplicatis membris per $\frac{ss}{tt}$, ſubſtituto ejus valore, utrinque mutatis ſignis & addito ss, fit tandem $ss - \frac{b^2}{c^2 - b^2} a^2 = ss - 2sp + pp$, in quâ novâ Æquatione cum ſecundum membrum ſit ipſum quadratum quantitatis $s - p$, ſubſtituto ejus valore prius reperto, & loco ss in primo membro ſubſtituto etiam ejus valore, fit $\frac{bb}{c^2 - b^2} \times \overline{c^2 - a^2} = \frac{bb}{c^2 - b^2} \times \overline{ba + cc}^2$ & diviſo utroque membro per $\frac{b^2}{c^2 - b^2}$ tranſponendo a^2, & reducendo ſecundum membrum ad communem denominatorem, deletiſque terminis ſeſe deſtruentibus eſt $t^2 = \frac{c^2}{c^2 - b^2} \times \overline{a^2 + 2ab + c^2}$, ſive quia PS $= a + b$ eſt PS$^2 - b^2 = a^2 + 2ab$, ideoque eſt $t^2 = \frac{c^2}{c^2 - b^2} \times \overline{PS^2 - b^2 + c^2}$ nempe $OT^2 = \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times \overline{PS^2 - AS^2 + CS^2}$ qui termini ſunt omnes dati, hoc ergo invento cætera ad Ellipſim pertinentia commodè invenientur.

In gratiam notæ ſequentis, ex his valorem

sphæroidis centrum S & semidiameter maxima SC: & vis, quâ sphæ-

lorem quantitatis $\frac{t^2+s^2-PO^2}{t^2}$ determinabimus, quam esse æqualem quantitati $\frac{CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$, ita ex valoribus supra inventis statuitur; Est $ss=\frac{bbt^2}{c^2-b^2}$ ex tertiâ Æquatione, unde erit $s^2+t^2=\frac{b^2t^2+c^2t^2-b^2t^2}{c^2-b^2}=\frac{c^2t^2}{c^2-b^2}$, ideoque $\frac{s^2+t^2}{t^2}=\frac{c^2}{c^2-b^2}=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}$. Est verò $AO=s-p$, & $PO=PA+AO$ $=a+s-p$, & cum sit $s-p=\frac{b}{cc-bb}\times\overline{ba+cc}$ (ex secundâ Æquatione) est PO $=a+\frac{b}{cc-bb}\times\overline{ba+cc}$, quo valore reducto ad communem denominatorem, deletisque terminis sese destruentibus est $PO=\frac{cc}{c^2-b^2}\times\overline{a+b}$ sive $=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}\times PS$, cumque sit $t^2=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}\times\overline{PS^2-AS^2+CS^2}$ est $\frac{PO}{t^2}=\frac{PS}{PS^2-AS^2+CS^2}$ & $\frac{PO^2}{t^2}=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}\times\frac{PS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$. Unde tandem est $\frac{s^2+t^2-PO^2}{t^2}=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}$ $-\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}\times\frac{PS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$ sive $=\frac{CS^2}{CS^2-AS}\times\overline{1-\frac{PS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}}$ reducendoque ad eumdem denominatorem, deletisque terminis sese destruentibus $=\frac{CS^2}{CS^2-AS^2}\times\frac{-AS^2+CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}=$ $\frac{CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$ diviso numeratore & denominatore per CS^2-AS^2. Est ergo $\frac{s^2+t^2-PO^2}{t^2}=\frac{CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$ Q. E. D.

544. Sit autem curvâ data ACB circulus, ita ut sphærois ejus convolutione genita, sit accurata sphæra, erit curva $NKRM$ Parabola, stantibus enim quæ in n°. 542. dicta sunt, erit ut prius $PE=a+x$, & ex naturâ Circuli $EF^2=2bx-xx$, unde erit PF^2 quadratum $=PE^2+EF^2=$ $a^2+2ax+xx+2bx-xx=a^2+2ax+2bx$; cum ergo ordinata ER ad curvam $NKRM$



sumatur æqualis PF, ejus ordinatæ quadratum erit æquale abscissæ ipsi per quantitates constantes ductæ, sed ultra primum gradum non assurgenti, quæ est Parabolæ proprietas. Dicatur ergo ejus Parabolæ latus rectum l, distantiâ verticis N à vertice A curvæ ACB dicatur p, abscissa NE erit $p+x$ & ex Parabolæ natura erit ordinatæ ER quadratum $=lp+lx$ conferatur hic valor cum valore ejusdem ER^2 supra invento $a^2+2ax+2bx$, termini constantes cum constantibus & qui variabilem includunt cum similibus, fient duæ Æquationes $lp=a^2$, & $l=2a+2b=2PS$, ideo-

sphærois (†) trahit corpus P, erit ad vim, quâ sphæra diametro AB descripta trahit idem corpus, ut $\frac{AS \times CSq - PS \times KMRK}{PSq + CSq - ASq}$

ad $\frac{AS\ cub.}{3\ PS\ quad.}$. Et eodem computandi fundamento invenire licet vires segmentorum sphæroidis.

ideoque $p = \frac{a^2}{2a + 2b} = \frac{PA^2}{2PS}$; & cum ex natura Parabolæ, sit $ER^2 = l \times p + x$ erit $p + x = NE = \frac{ER^2}{2PS}$; Cumque area Parabolica inter abscissam, ordinatam, & curvam intercepta sit æqualis duobus tertiis Rectanguli abscissæ per ordinatam, erit area Parabolica $NER = \frac{\frac{2}{3}ER^3}{2PS} = \frac{ER^3}{3PS}$, & quoniam, ex constructione, ordinatæ in A & B erectæ sunt æquales PA & PB, erit area Parabolica $PAK = \frac{PA^3}{3PS}$ & area Parabolica $PBM = \frac{PB^3}{3PS} = \frac{\overline{PA + 2AS}^3}{3PS}$ & differentia harum arearum AKRMB respondens axi Sphæræ AB, erit $\frac{6PA^2 \times AS + 12PA \times AS^2 + 8AS^3}{3PS}$, & denique dempto trapezio AKMB, segmentum Parabolicum residuum KRM erit æquale $\frac{2AS^3}{3PS}$, trapezium enim AKMB est æquale $\frac{1}{2} AB \times \overline{AK + BM}$ sive (quia $\frac{1}{2} AB = AS$, $AK = PA$ & $BM = PB = PA + 2AS$) est æquale $2AS \times PA + 2AS^2$, & reducendo ad denominatorem 3PS sive 3PA + 3AS est æquale $\frac{6AS \times PA^2 + 12AS^2 \times PA + 6AS^3}{3PS}$ quod deductum ex area $AKRMB = \frac{6PA^2 \times AS + 12PA \times AS^2 + 8AS^3}{3PS}$ remanet $\frac{2AS^3}{3PS}$. Q. E. D.

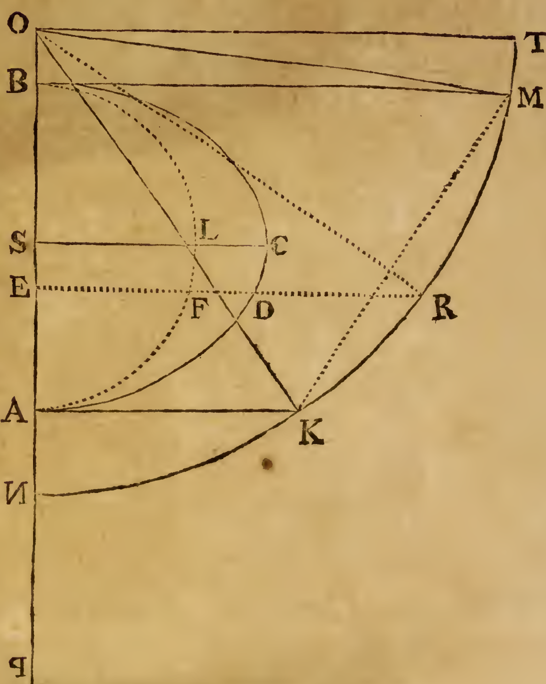
(†) 545. *Vis quâ sphærois trahit corpus P est ad vim quâ sphæra Diametro AB descripta trahit idem corpus ut* $\frac{AS \times CS^2 - PS \times KMRK}{PS^2 + CS^2 - AS^2}$ ad $\frac{AS^3}{3PS^2}$.

Supponatur juxta solutionem hujusce Problematis, curvam describi secundum AB, cujus

jus ordinatæ singulo puncto E applicatæ sint æquales vi quâ corpus P à circulo cujus radius est ED trahitur; ea vis est per Cor. 1. Prop. XC. ut $1-\frac{PE}{PD}$, sit OE hujus curvæ abscissa sumpta à puncto O (centro curvæ NKRM juxta notam 543. determinatæ) dicaturque z, ejus fluxio erit dz, fluxio itaque areæ curvæ quæ exhibet vim sphæroidis erit $dz-\frac{PE}{PD}dz$, cumque sit $PE=PO-OE=PO-z$ & $PD=ER$ ordinatæ curvæ NKRM, per constructionem, sitque ER (ut facile deducitur ex n°. 543) $=\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}$, fluxio ejus areæ erit $dz-\frac{POdz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}}+\frac{zdz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}}$.

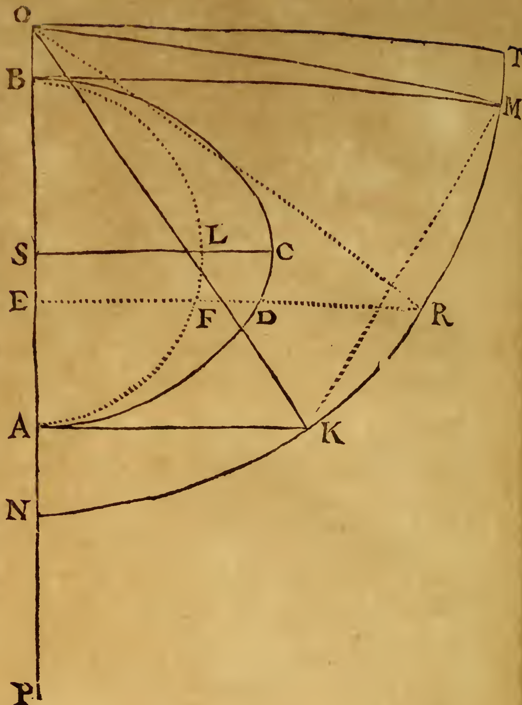
Terminorum positivorum $dz+\frac{zdz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}}$ fluens est $z-\frac{s}{t}\sqrt{ss-zz}$ (165) sed ut $z=OE$ & $\frac{s}{t}\sqrt{ss-zz}=\frac{ss}{tt}\times\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}=\frac{ss}{tt}ER$ fluxio terminis positivis respondens est $OE-\frac{ss}{tt}ER$, & area toti lineæ OA respondens est $OA-\frac{s^2}{t^2}AK$, ex quâ demenda area parti OB respondens secundum quam curva quæ vim sphæroidis exprimit non ducitur quæque est $OB-\frac{s^2}{t^2}BM$, utque per constructionem $AK=AP$, & $BM=PB=BA+AP$ erit vera fluens $OA-OB-\frac{s^2}{t^2}\times\overline{AP-BA-AP}=AB+\frac{s^2}{t^2}AB=AB\times\frac{s^2+t^2}{t^2}$.

Tertii termini $\frac{POdz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}}$ fluens sic invenitur, Sectoris Elliptici TOK fluxio est (424) $\frac{\frac{1}{2}stdz}{\sqrt{ss-zz}}$ multiplicetur per $\frac{2PO}{t^2}$ nascetur terminus propositus $\frac{POdz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}}$ unde fluens termini propositi erit Sector ille Ellipticus TOK per $\frac{2PO}{t^2}$ multiplicatus, sed quoniam area quæsita non respondet toti OA, sed tantum ejus parti AB, vera fluens areæ quæsitæ ex tertio termino inveniendo est sector $TOK\times\frac{2PO}{t^2}$ dempto sectore $TOM\times\frac{2PO}{t^2}$ sive sector $MOK\times\frac{2PO}{t^2}$; Dividitur autem sector MOK in figuram rectilineam MOK & mixtilineam MRK; Triangulum MOK valet $\frac{1}{2}PC\times AB$, nam producatur recta MK pertinget ad P, propter $PA=AK$ & $PB=BM$, totum vero Triangulum $OMP=\frac{1}{2}OP\times BM=\frac{1}{2}OP\times PB$, & Triangulum $OKP=\frac{1}{2}OP\times AK=\frac{1}{2}OP\times AP$, unde sublato Triang. OKP ex Triang. OMP, remanet Triang. OMK =



DE MOTU CORPORUM.

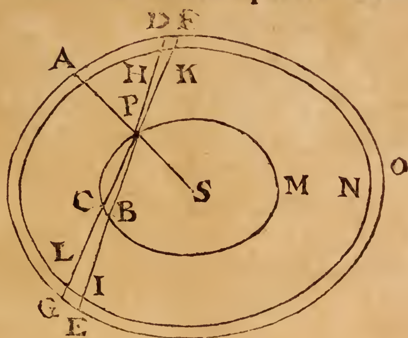
$=\frac{1}{2}OP\times PB-AP=\frac{1}{2}OP\times AB$. Unde tandem fluens quæsita hujus tertii termini est $\frac{2PO}{t^2}\times\frac{1}{2}OP\times AB+\frac{2PO}{t^2}\times MRK=\frac{PO^2}{t^2}\times AB+\frac{2PO}{t^2}\times MRK$, quæ detracta ex fluente terminorum positivorum $AB\times\frac{s^2+t^2}{t^2}$ fit $AB\times\frac{s^2+t^2-PO^2}{t^2}-\frac{2PO}{t^2}\times MRK$, cum ergo sit $\frac{s^2+t^2-PO^2}{t^2}=\frac{CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$ & $\frac{PO}{t^2}=\frac{PS}{PS^2-AS^2+CS^2}$ (543) est fluens quæsita (quia $AB=2AS$) $\frac{2AS\times CS^2-2PS\times MRK}{PS^2-AS^2+CS^2}$.



Si autem curva ACB sit circulus, sphærois in sphæram veram mutatur, fit $CS=AS$ & segmentum MRK fit $\frac{2AS^3}{3PS}$ (544) ideoque mutatur hæc formula in istam $\frac{2AS\times AS^2-\frac{2PS\times 2AS^3}{3PS}}{PS^2-AS^2+AS^2}$. $=\frac{2AS^3-\frac{4}{3}AS^3}{PS^2}=\frac{2AS^3}{3PS^2}$ quæ exprimet vim sphæræ; itaque divisa expressione vis sphæroidis & vis sphæræ per communem multiplicatorem 2; Erit *vis sphæroidis ad vim sphæræ ut* $\frac{AS\times CS^2-PS\times MRK}{PS^2-AS^2+CS^2}$ *ad* $\frac{AS^3}{3PS^2}$. Q. E. D.

Potest etiam determinari vis sphæræ, hoc calculo, sit ut prius $PA=a$, $AB=2b$, abscissa $AE=x$, $PF=v$, erit $PE^2=a^2+2ax+xx$, & $EF^2=2bx-xx$ (ex naturâ circuli) ideoque $PF^2\,(vv)=a^2+2ax+2bx$, unde invenitur $x=\frac{vv-a^2}{2\times\overline{a+b}}$ & $dx=\frac{2vdv}{2\times\overline{a+b}}=\frac{vdv}{a+b}$ & $PE=a+x=\frac{a^2+2ab+vv}{2\times\overline{a+b}}$ & $\frac{dx}{PF}=\frac{dv}{a+b}$. Itaque, cum fluxio areæ quæ exprimit vim sphæræ sit per Cor. 1. Prop. XC. ut $dx-\frac{PE\,dx}{PF}$, erit ea fluxio ut $dx-\frac{a^2+2ab+vv}{2\times\overline{a+b}^2}dv$ cujus fluens est $x-\frac{a^2v+2abv+\frac{1}{3}v^3}{2\times\overline{a+b}^2}+Q$ *const.*, quæ evanescere debet ubi $x=0$ & $v=a$ ideoque est $-\frac{a^3+2a^2b+\frac{1}{3}a^3}{2\times\overline{a+b}^2}+Q=0$, & $Q=\frac{\frac{4}{3}a^3+2a^2b}{2\times\overline{a+b}^2}$: Vis autem totius Sphæræ obtinetur si fiat $x=AB\,(2b)$ & $v=PB\,(a+2b)$, estque ideo $2b+\frac{\frac{4}{3}a^3+2a^2b-a^3-4a^2b-4ab^2-\frac{1}{3}a^3-2a^2b-4ab^2-\frac{8}{3}b^3}{2\times\overline{a+b}^2}$ $=2b-\frac{4a^2b+8ab^2+\frac{8}{3}b^3}{2\times\overline{a+b}^2}=2b\times 1-\frac{2a^2+4ab+\frac{4}{3}b^2}{2\times\overline{a+b}^2}$, & reducendo ad eumdem denominatorem $=2b\times\frac{2a^2+4ab+2b^2-2a^2-4ab-\frac{4}{3}b^2}{2\times\overline{a+b}^2}$ $=2b\times\frac{\frac{2}{3}b^2}{2\times\overline{a+b}^2}$ sive ponendo AS pro b, & PS pro $a+b$ dividendoque numeratorem & denominatorem per 2, vis tota Sphæræ est $\frac{2AS^3}{3PS^2}$. Q. E. I.

Corol. 3. Quod si corpusculum intra sphæroidem in axe collocetur, attractio erit ut ipsius distantia à centro. Id quod facilius hoc argumento colligitur, sive particula in axe sit, sive in aliâ quâvis diametro datâ. Sit *AGOF* sphærois attrahens, *S* centrum ejus, & *P* corpus attractum. Per corpus illud *P* agantur tum semidiameter *SPA*, tum rectæ duæ quævis *DE*, *FG* sphæroidi hinc inde occurrentes in *D* & *E*, *F* & *G*; sintque *PCM*, *HLN* superficies sphæroidum duarum interiorum, exteriori similium & concentricarum, quarum prior transeat per corpus *P*, & secet rectas *DE* & *FG* in *B* & *C*, posterior secet easdem rectas in *H*, *I* & *K*, *L*. Habeant autem sphæroides omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc inde interceptæ *DP* & *BE*, *FP* & *CG*, *DH* & *IE*, *FK* & *LG* sibi mutuò æquales; (y) propterea quod rectæ *DE*, *PB* & *HI* bisecantur in eodem puncto, ut & rectæ *FG*, *PC* & *KL*. Concipe jam *DPF*, *EPG* designare conos oppositos, angulis verticalibus *DPF*, *EPG* infinitè parvis descriptos, & lineas etiam *DH*, *EI* infinitè parvas esse; & conorum particulæ sphæroidum superficiebus abscissæ *DHKF*, *GLIE*, ob æqualitatem linearum *DH*, *EI*, (z) erunt ad invicem ut quadrata distantiarum suarum à corpusculo



(y) * *Propterea quod rectæ* DE, PB, *&c.* Cum enim tres ellipses AGO, HLN, PCM similes sint, idemque centrum & axes communes ac proinde communes etiam diametros homologas habeant, patet lineas DE, HI, PB esse in tribus illis ellipsibus ad communem diametrum ordinatas, idemque dicendum esse de tribus lineis FG, KL, PC. Nam si per punctum A, in ellipsi AGO homologum puncto P in ellipsi PCM ducta intelligatur recta ipsi PB, seu DE parallela, hæc linea ordinata erit ad eandem ellipseos AGO diametrum ad quam in ellipsi PCM ordinata est linea PB, atque adeò rectæ DE, PB sunt ad eandem diametrum ordinatæ, idemque eodem modo de cæteris lineis ostendi potest. Quare ab illâ communi diametro rectæ DE, PB, & HI, bisecantur in eodem puncto, ut & rectæ FG, PC, & KL a suâ communi diametro.

(z) * *Erunt ad invicem &c.* Si ex punctis D & E in lineam FG demissa intelligantur perpendicula infinite parva p, & P, hæc, ob angulos DPF, FPG, æqua-

De Motu Corporum.

culo P, & propterea corpusculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, si superficiebus sphæroidum innumerarum similium concentricarum & axem communem habentium dividantur spatia DPF, $EGCB$ in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus P in partes contrarias. Æquales igitur sunt vires coni DPF & segmenti conici $EGCB$, & per contrarietatem se mutuo destruunt. Et par est ratio virium materiæ omnis extra sphæroidem intimam $PCBM$. Trahitur igitur corpus P à sola sphæroide intimâ $PCBM$, & propterea (per corol. 3. prop. LXXII.) attractio ejus est ad vim, quâ corpus A trahitur à sphæroide totâ $AGOD$, ut distantia PS ad distantiam AS. *Q. E. D.*



PROPOSITIO XCII. PROBLEMA XLVI.

Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.

E corpore dato formanda est sphæra vel cylindrus aliave figura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per prop. LXXX. LXXXI. & XCI.) (a) inveniri potest. Dein factis experimentis invenienda est vis attractionis in diversis

æquales, erunt ut distantiæ DP, EP. Sed quoniam evanescentibus angulis DPF, EPG, lineæ DH, FK & GL, EI, fiunt parallelæ, erit superficies DHKF, ad superficiem GLIE, ut rectangulum $p \times \frac{DH+FK}{2}$, ad rectangulum $P \times \frac{GL+EI}{2}$, hoc est, (ob $DH+FK=LG+EI$) ut p ad P, seu ut DP ad EP. Quare si DPF, EPG conos vel pyramides in sphæroide AGO designent, solida DHKF, GLIE erunt ut superficies prædictæ in perpendicula perpendiculis p, P, similia ductæ, hoc est, ut quadrata distantiarum DP, EP. Quoniam igitur vis quâ particula solida DHFK trahit corpusculum P est ad vim quâ illud trahitur à particulâ solidâ GLIE, ut solidum $\frac{DHKF}{DP^2}$, ad solidum $\frac{GLIE}{EP^2}$, hoc est, ut $\frac{DP^2}{DP^2}$, ad $\frac{EP^2}{EP^2}$, manifestum est corpusculum P utrinque æqualiter attrahi.

(a) * *Inveniri potest.* Hoc est per propositiones citatas inveniri potest generalis expressio seu formula attractionis corpuscu-

fis distantiis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium singularum, quam invenire oportuit.

PRO-

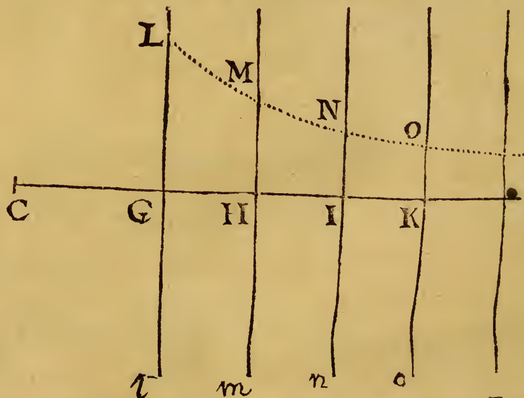
pusculi in sphæram vel cylindrum aliamve figuram regularem, & lex attractionis corpusculi in eandem figuram experimentis inventa conferri debet cum generali illâ formulâ, & indè habebitur æquatio cujus ope determinari poterit formulæ generalis exponens indeterminata, quæ exhibebit attractionem in singulas particulas materiæ.

Exemplum. In cylindrum ADEKG trahatur corpusculum P, situm in ejus axe AB, ut in prop. XCI; supponaturque vis in singulas cylindri particulas tendens reciprocè ut distantiæ dignitas cujus index n, & dicatur $PA=a$, $PD=b$, $PB=c$, $PE=e$, $RF=g$, $PF=x$, $PR=y$, eritque $yy=xx+gg$, ideoque $ydy=xdx$. Quare fluxio vis quâ corpusculum P in cylindrum ADRSG trahitur, erit (541) ut $\frac{dx}{x^{n-2}}-\frac{xdx}{y^{n-1}}=\frac{dx}{x^{n-2}}-\frac{ydy}{y^{n-1}}=x^{2-n}dx-y^{2-n}dy$; cujus fluens $=\frac{x^{3-n}-y^{3-n}+Q\ const.}{3-n}$; hæc autem evanescit, ubi $x=a$, & $y=b$; Quare erit $Q=b^{3-n}-a^{3-n}$, & fluens accurata $=\frac{b^{3-n}-a^{3-n}+c^{3-n}-e^{3-n}}{3-n}$, ubi $x=c$, & $y=e$. Jam verò vis quâ corpusculum P in totum cylindrum ADEKG trahitur, experimentis inventa sit ut $b-a+c-e$, & habebitur æquatio $b-a+c-e=\frac{b^{3-n}-a^{3-n}+c^{3-n}-e^{3-n}}{3-n}$, ex quâ determinandus est valor indicis generalis n. Porro posito $n=2$, æqualia fiunt æquationis membra ergo vis in singulas cylindri particulas tendens erit reciprocè ut quadratum distantiæ à particulâ, quemadmodum in cor. I. prop. XCI. positum est. Verum si hâc ratione, varios tentando numeros, non potest indicis generalis n valor inveniri, ponatur $3-n=z$, & vis corpusculi in cylindrum experimentis reperta sit ut quantitas q; & erit $qz=b^z-a^z+c^z-e^z$. Fiat $a^z=p$, $b^z=v$, $c^z=r$, $e^z=s$, & erit (L significante Logarithmum quantitatis cui præfigitur) $L.\,a^z=L.\,p$, $L.\,b^z=L.\,v$, $L.\,c^z=L.\,r$, $L.\,e^z=L.\,s$, adeoque $zL.\,a=L.\,p$, & $z=\frac{L.\,p}{L.\,a}=\frac{L.\,v}{L.\,b}=\frac{L.\,r}{L.\,c}=\frac{L.\,s}{L.\,e}$. Unde $\frac{L.\,a\times L.\,v}{L.\,b}=L.\,p$, atque adeo $L.\,v^{\frac{L.\,a}{L.\,b}}=L.\,p$, proindeque $v^{\frac{L.\,a}{L.\,b}}=p$, & simili modo invenietur $v^{\frac{L.\,c}{L.\,b}}=r$, & $v^{\frac{L.\,e}{L.\,b}}=s$. Quare æquatio erit $\frac{q.\,L.\,v}{L.\,b}=v-v^{\frac{L.\,a}{L.\,b}}+v^{\frac{L.\,c}{L.\,b}}-v^{\frac{L.\,e}{L.\,b}}$, quæ ab exponente indeterminata libera est. Ut autem tollatur etiam $L.\,v$, ponatur $v=t+1$, & (383) erit $L.\,v=L.\,t+1=t-\frac{1}{2}tt+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{5}t^5-$ &c. in infinit. Si itaque in æquatione modo inventa loco v scribatur $t+1$, & loco $L.\,v$ series $t-\frac{1}{1}t^2+\frac{1}{3}t^3-$ &c., obtinebitur æquatio ab exponentibus & logarithmis indeterminatis libera, ex quâ per reversionem serierum invenietur valor quantitatis t, & inde reperietur $L.\,v$, atque per $L.\,v$ habebitur valor

PROPOSITIO XCIII. THEOREMA XLVII.

Si ſolidum ex unâ parte planum ex reliquis autem partibus infinitum, conſtet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in receſſu à ſolido decreſcunt in ratione poteſtatis cujuſvis diſtantiarum pluſquam quadraticæ, & vi ſolidi totius corpuſculum ad utramvis plani partem conſtitutum trahatur: dico quod ſolidi vis illa attractiva, in receſſu ab ejus ſuperficie planâ, decreſcet in ratione poteſtatis, cujus latus eſt diſtantia corpuſculi à plano, & index ternario minor quam index poteſtatis diſtantiarum.

Caſ. 1. Sit LGl planum quo ſolidum terminatur. Jaceat ſolidum autem ex parte plani hujus verſus I, inque plana innumera mHM, nIN, oKO, &c. ipſi GL parallela reſolvatur. Et primo collocetur corpus attractum C extra ſolidum. Agatur autem $CGHI$ planis illis innumeris perpendicularis, & decreſcant vires attractivæ punctorum ſolidi in ratione poteſtatis diſtantiarum, cujus index ſit numerus n ternario non minor. Ergo



(per

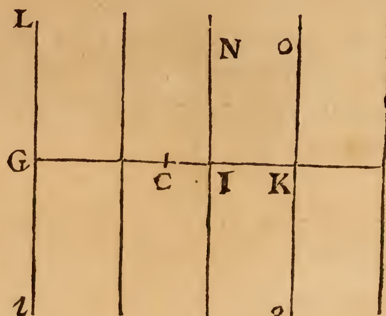
lor indicis z, & inde valor ipſius n. Nam cum ſit $z = \frac{L.v}{L.a}$, & $L.v = L.t + 1$, erit $z = \frac{L.t+1}{L.a}$, & $n = 3 - z = 3 - \frac{L.t+1}{L.a}$.

Si in æquatione vel quantitate exponentiali propoſita, indeterminata z in ſolis quantitatum datarum exponentibus reperiretur, hæc æquatio vel quantitas ſuperiori methodo poſſet ad aliam reduci numero terminorum finitam, in quâ nulla eſſet amplius exponens vel logarithmus indeterminata. Nam ſi $q = fa^{z} + gb^{2z} + hc^{4z} +$ &c., ſitque $v = a^{z}$ erit $q = fv +$

zL.

(per corol 3. prop. xc.) vis, quâ planum quodvis mHM trahit punctum C, (b) est reciprocè ut CH^{n-2}. In plano mHM capiatur longitudo HM ipsi CH^{n-2} reciproce proportionalis, & erit vis illa ut HM. Similiter in planis singulis lGL, nIN, oKO, &c. capiantur longitudines GL, IN, KO, &c. ipsis CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2}, &c. reciprocè proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, ideoque summa virium ut summa longitudinum, hoc est, vis solidi totius ut area $GLOK$ in infinitum versus OK producta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) est reciprocè ut CG^{n-3}, & propterea vis solidi totius est reciprocè ut CG^{n-3}. *Q. E. D.*

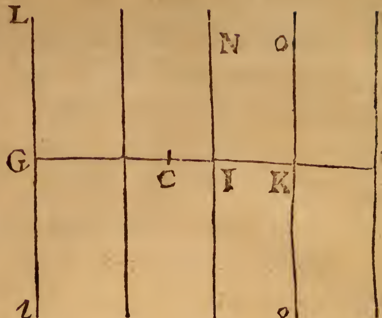
Cas. 2. Collocetur jam corpusculum C ex parte plani lGL intra solidum, & capiatur distantia CK æqualis distantiæ CG. Et solidi pars $LGloKO$, planis parallelis lGL, oKO terminata, corpusculum C in medio situm nullam in partem trahet, contrariis oppositorum punctorum actionibus se mutuò per æqualitatem tollentibus. Proinde corpusculum C solâ vi solidi ultra planum



$g v^{\frac{2L.b}{L.a}} + h v^{\frac{4L.c}{L.a}} +$ &c. erit enim $z = \frac{L.v}{L.a}$ & $b^{2z} = b^{2\frac{L.v}{L.a}}$ & $L b^{2z} = \frac{2L.v}{L.a} L.b = \frac{2L.b}{L.a} L.v$, unde est $b^{2z} = v^{\frac{2L.b}{L.a}}$ & sic de cæteris.

(b) * *Est reciprocè &c.* Sit CH $= x$, erit M H ut $\frac{1}{x^{n-2}}$, (Hyp.) & areæ GLMH, elementum ut $\frac{dx}{x^{n-2}}$, adóque (165) area ipsa ut Q *const.* $- \frac{1}{(n-3)x^{n-3}}$, quæ evanescit ubi $x =$ CG, Quare $Q = \frac{1}{(n-3)CG^{n-3}}$, & area GLMH, ut $\frac{1}{(n-3)CG^{n-3}} - \frac{1}{(n-3)CH^{n-3}}$. At cum CH infinita evadit, terminus $\frac{1}{(n-3)CH^{n-3}}$ evanescit fitque area infinita GLOK, ut $\frac{1}{(n-3)CG^{n-3}}$, seu ob datam $n-3$, ut CG^{n-3}, reciprocè.

num OK ſiti trahitur. Hæc autem vis (per caſum primum) eſt reciprocè ut CK^{n-3}, hoc eſt (ob æquales CG, CK) reciprocè ut CG^{n-3}. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc ſi ſolidum $LGIN$ planis duobus infinitis parallelis LG, IN utrinque terminetur; (c) innoteſcit ejus vis attractiva, ſubducendo de vi attractivâ ſolidi totius infiniti $LGKO$ vim attractivam partis ulterioris $NIKO$, in infinitum verſus KO productæ.

Corol. 2. Si ſolidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pene eſt momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris augendo diſtantiam (d) decreſcet quam proximè in ratione poteſtatis CG^{n-3}.

Corol. 3. Et hinc ſi corpus quodvis finitum & ex unâ parte planum trahat corpuſculum è regione medii illius plani, & diſtantia inter corpuſculum & planum collata cum dimenſionibus corporis attrahentis perexigua ſit, conſtet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis cujuſvis pluſquam quadruplicatæ diſtantiarum; vis attractiva corporis totius decreſcet quamproximè in ra-

(c) * *Innoteſcit ejus vis &c.* Ex demonſtratis attractio ſolidi totius LGKO, in infinitum verſus O producti, eſt ut $\frac{1}{CG^{n-3}}$ ſolidi verò infiniti NICO, ut $\frac{1}{CI^{n-3}}$. Quarè attractio ſolidi L G I N, eſt ut $\frac{1}{CG^{n-3}} - \frac{1}{CI^{n-3}}$.

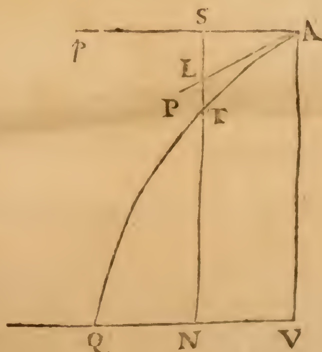
(d) * *Decreſcet quam proximè &c.* Vis enim attractiva, ſi corpus infinitum ſit, eſt ut $\frac{1}{CG^{n-3}} - \frac{1}{CI^{n-3}}$; ſed ſi perexigua ſit diſtantia CG reſpectu CI, terminus $\frac{1}{CI^{n-3}}$, minimus erit reſpectu termini $\frac{1}{CG^{n-3}}$ & negligi poterit, ideóque attractio erit quam proximè ut CG^{n-3} reciprocè. Quod tamen verum eſſe non poteſt, ſi fuerit $n=3$; Nam in hoc caſu $\frac{1}{CH^{n-2}} = \frac{1}{CH}$, ideoque MH erit ut $\frac{1}{CH}$ & rectangulum $MH \times CH$ datum, proindeque curva LMO hyperbola, cujus aſymptotus CK, & area illius finita LMNIG vim exponit ſolidi LGIN; area verò infinita NOKI, vim ſolidi infiniti NIKO.

ratione poteſtatis, cujus latus ſit diſtantia illa perexigua, & index ternario minor quam index poteſtatis prioris. De corpore ex particulis conſtante, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis triplicatæ diſtantiarum, aſſertio non valet; propterea quod, in hoc caſu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in corollario ſecundo, ſemper eſt infinitè major quam attractio partis citerioris.

Scholium.

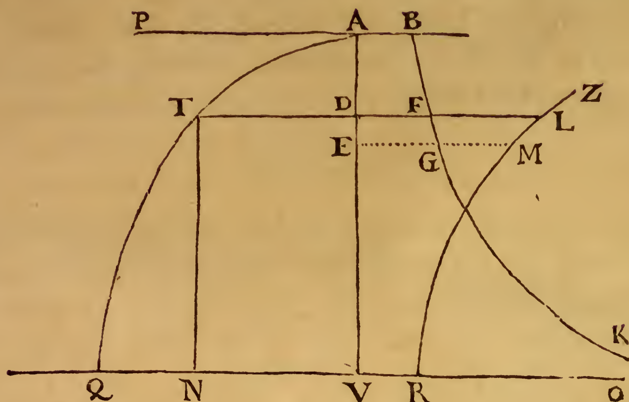
Si corpus aliquod perpendiculariter verſus planum datum trahatur, & ex datâ lege attractionis quæratur motus corporis: ſolvetur problema quærendo (per prop. XXXIX.) motum corporis rectà deſcendentis ad hoc planum, & (per legum corol. 2.) componendo motum iſtum cum uniformi motu, ([a]) ſecundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contra, ſi quæratur lex attractionis in planum ſecundum lineas perpendiculares factæ, eâ conditione ut corpus attractum in datâ quâcunque curvá lineâ mo-

(a) 546. *Secundum lineas eidem plano parallelas &c.* Corpus A quod ad planum VQ perpendiculariter & ſecundum lineas lineæ AV parallelas trahitur, exeat de loco A juxtà directionem quamlibet AP. 1°. Si projectionis directio AP plano VQ parallela fuerit, dabitur tempus quo corpus, datâ velocitate uniformi projectionis, percurreret lineam AS, & per prop. 39. invenietur in lineâ SN lineæ AV parallelâ ſpatium ST quod corpus vi attractrice eodem tempore deſcribit, & hinc habebitur punctum T in trajectoriâ ATQ, quam corpus utroque motu, impreſſo nimirum & ex vi attractrice genito deſcribit. 2°. Si directio projectionis AP plano trahenti VQ parallela non eſt, ductâ AS plano VQ & SL rectæ AV parallelis, motus projectionis AL reſolvatur in motus AS & SL, & datis velocitatibus uniformibus AS & SL, dabuntur tum tempus quo percurritur AS, tum ſpatium ST quod corpus hoc eodem tempore deſcribit ex vi attractrice & motu impreſſo SL ſimul (per cor. 3. prop. 39.) unde habebitur punctum T trajectoriæ ATQ cujus omnia puncta eodem modo poſſunt inveniri.



moveatur, (b) ſolvetur problema operando ad exemplum problematis tertii.

Ope-



Exemplum. Exeat corpus de loco A ſecundum directionem A P plano trahenti V Q parallelam, & ductâ DT eidem plano parallelâ, ſit vis trahens in totâ lineâ DT, ut D V cubus reciprocè. De loco D, erigatur ſemper DF perpendicularis ad A V & vi trahenti in lineâ D T proportionalis, ſitque BFG linea curva quam punctum G perpetuò tangit. In DF capiatur DL lateri quadrato areæ ABFD reciprocè proportionalis, & punctum L ſit ſemper in lineâ curvâ Z L R, prorsùs ut in prop. 39. Jam dicatur $AV=a$, $DV=x$, $TD=y$, erit area ABFD ut $\frac{aa-xx}{xx}$ (430) & proindè D L, ut $\frac{x}{\sqrt{aa-xx}}$ adeóque elementum DLME, ut $\frac{xdx}{\sqrt{aa-xx}}$, & area VDLR, ut hujus elementi fluens $Q-\sqrt{aa-xx}$ (165 166), evaneſcit autem area VDLR ubi $x=o$. Quarè $Q=a$, & area VDLR, ut $a-\sqrt{aa-xx}$. Hinc poſitâ $x=a$, erit area VABZR, ut a, & area DABZL, ut $\sqrt{aa-xx}$. Porrò ſi punctum T eſt in trajectoriâ ATQ erit DT ſeu y proportionalis tempori quo uniformiter deſcribitur D T, & quo motu accelerato percurritur A D ſeu (per prop. 39.) erit y, ut $\sqrt{aa-xx}$, adeóque yy ut $aa-xx$. Undè patet trajectoriam ATQ eſſe ellipſim cujus centrum V, ſemiaxis unus V A, alter conjugatus V Q. Iiſdem poſitis & vi ad planum V Q trahente in vim repellentem mutatâ corpus deſcribet hyperbolam cujus centrum V ſemiaxis VA vertex A.

(b) 547. *Solvetur problema &c.* Moveatur corpus P in *curvâ* PQF *vi* perpendiculariter tendente ad planum F K, ſint P & Q puncta infinitè propinqua, P Z tangens in P, P C radius circuli curvam PQF oſculantis in P; PH, QG perpendicula ex punctis P, Q in planum F K demiſſa, C A recta lineæ F K parallela & ſecans perpendicula P H, Q G producta in M & N; producatur G Q, ut tangenti P Z occurrat in R, & per Q agatur recta ZQT plano F K parallela, ac tangenti occurrens in Z rectæ verò P H in T. Jam ob ſimilia triangula CPM, PZT & RZQ, eſt $CP^2 : PM^2 = PR^2 : QT^2$, & ex naturâ circuli oſculatoris $PR^2 = QR \times RN + QN$ (per prop. 36. lib. 3. Elem.) ſivè coeuntibus punctis P & Q, $PR^2 = QR \times 2PM$.

Er-

Operationes autem contrahi ſolent reſolvendo ordinatim applicatas in ſeries convergentes. Ut ſi ad baſem A in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B, quæ ſit ut baſis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$; & quæratur vis quâ corpus, ſecundum poſitionem ordinatim applicatæ, vel in baſem attractum vel à baſi fugatum, moveri poſſit in curvâ lineâ, quam ordinatim applicata termino ſuo ſuperiore ſemper attingit: Suppono baſem augeri parte quam minima O, & ordinatim applicatam A +

Ergò CP^2, $PM^2 = QR \times 2PM : QT^2$, ideóque $\frac{QT^2}{QR} = \frac{2PM^3}{CP^2}$, conſideretur vis centripeta ut tendens ad centrum S infinite diſtans, & erit SP quantitas conſtans, ac $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} = \frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$. Eſt igitur (per cor. 1. & 5. prop. 6.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$, hoc eſt, ob conſtantem quantitatem $2SP^2$, reciprocè ut $\frac{PM^3}{CP^2}$, ſeu in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione radii oſculatoris CP directè & triplicatâ perpendiculi PM inversè. Porrò datâ curvâ PQF inveniefur in ſingulis locis radius oſculi CP (214) & punctum K ubi plano occurrit ac proindè invenietur PM, per proportionem: $PK : PH = PC : PM$, vel etiam per proportionem PR vel $PQ : QT = PC : PM$. Quare dabitur lex vis centripetæ.

$\overline{A+O}|^{\frac{m}{n}}$ reſolvo (†) in ſeriem infinitam $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} O A^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm - mm}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$ &c. atque hujus termino in quo O

(†) 548. *Reſolvo in ſeriem infinitam &c.* Ut hæc liqueant ſequentia de dignitatum formulis ſunt memoriæ revocanda.

Lemma. Binomii $a+b$, dignitas $\overline{a+b}^n$ cujus index n, eſt $a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n \times n-1}{1 \times 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \times n-1 \times n-2}{1, \times 2 \times 3} a^{n-3} b^3 + \frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} a^{n-4} b^4$ + &c. Satis patet ex potentiarum formatione. Si enim binomium $a+b$, ad 2^{am}. 3^{am}. 4^{am}. &c. dignitates evehatur, in ſingulis dignitatis cujuſque terminis, index litteræ a unitate perpetuò decreſcit, dum contrà index litteræ b unitate creſcit, & coefficientes ſeu unciæ ſingulorum terminorum progrediuntur ut numeri $\frac{n}{1}$, $\frac{n \times n-1}{1 \times 2}$, $\frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3}$, $\frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ &c.

549. Cor. 1. Si ponatur $a = P$, & $Q = \frac{b}{a}$, adeóque $a^n = P^n$, $\frac{b^2}{a^2} = Q^2$, $\frac{b^3}{a^3} = Q^3$, $\frac{b^4}{a^4} = Q^4$, his valoribus in lemmatis formulâ ſubſtitutis erit $\overline{a+b}^n = P^n + \frac{n}{1} P^n Q + \frac{n \times n-1}{1 \times 2} P^n Q^2 + \frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3} P^n Q^3$ + &c. & ſi rursùs ponatur $P^n = A$; $\frac{n}{1} P^n Q = B$; $\frac{n \times n-1}{1 \times 2} P^n Q^2 = C$; $\frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3} P^n Q^3 = D$, & ità porrò, erit $\overline{a+b}^n = \overline{P+PQ}^n = P^n + \frac{n}{1} AQ + \frac{n-1}{2} BQ + \frac{n-2}{3} CQ + \frac{n-3}{4} DQ +$ &c.

550. Cor. 2. Iiſdem formulis uti poſſumus pro polynomio quovis ad datam dignitatem evehendo, ſi pars una polynomii litteræ a binomii ponatur æqualis, cæteræ verò partes omnes ſupponantur æquales litteræ b. Exempli causâ. Sit trinomium $d+e+f$ ad tertiam dignitatem elevandum, pone $n=3$, $d=a$, $e+f=b$, & formula $a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n \times n-1}{1 \times 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3} b^3$, mutabitur in ſeriem $d^3 + 3d^2(e+f) + 3d(e+f)^2 + (e+f)^3$; cum enim perventum eſt ad coefficientem in quâ eſt $n-3$, abrumpitur ſeries ob $n-3=0$. Porrò per eandem formulam generalem $(e+f)^2 = ee + 2ef + ff$, & $(e+f)^3 = e^3 + 3e^2 f + 3ef^2 + f^3$. Quare tandem $(d+e+f)^3 = d^3 + 3d^2 e + 3d^2 f + 3de^2 + bdef + 3dff + e^3 + 3e^2 f + 3ef^2 + f^3$.

Ita etiam formulam pro dignitate infinitinomii poſſumus obtinere, ſit enim ſeries $A + BZ + CZ^2 + DZ^3 + EZ^4$ &c. ad dignitatem p evehenda ſub ducto calculo invenietur.

$$A^p + pA^{p-1}BZ + pA^{p-1}CZ^2 + pA^{p-1}DZ^3 + p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2}B^2Z^2 + p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2} \times 2BC \ldots + p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} A^{p-} \ldots$$

551. Cor. 3. Si ex binomio $a+b$, extrahenda ſit radix cujus index $\frac{m}{p}$, loco n, in formulâ generali ſcribatur $\frac{m}{p}$, & erit $\overline{a+b}^{\frac{m}{p}} = a^{\frac{m}{p}} + \frac{m}{p} a^{\frac{m-p}{p}} b^1 + \frac{m \times m-p}{1 \times 2 \times p^2} a^{\frac{m-2p}{p}} b^2 + \frac{m \times m-p \times m-2p}{1 \times 2 \times 3p^3} a^{\frac{m-3p}{p}} b^3 + \frac{m \times m-p \times m-2p \times m-3p}{1 \times 2 \times 3 \times 4p^4} a^{\frac{m-4p}{p}} b^4$ + &c. vel etiam erit $\overline{a+b}^{\frac{m}{p}} = P$,

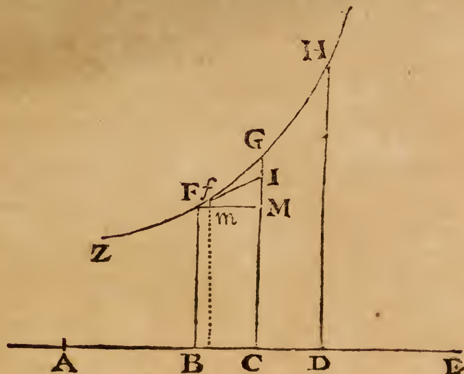
O duarum est dimensionum, id est, termino $\frac{mm - mm}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$

$= \overline{P + PQ}^{\frac{m}{p}} = P^{\frac{m}{p}} + \frac{m}{p} AQ + \frac{m-p}{2p} BQ + \frac{m-2p}{3p} CQ + \frac{m-3p}{4p} DQ$ + &c.

Nam sit Radix quæsita $\overline{a+b}^{\frac{m}{p}}$ æqualis seriei infinitæ $A + BZ + CZ^2 + DZ^3$ &c. erit $\overline{a+b}^m$ æqualis huic seriei ad dignitatem p evectæ, sumatur ergo series potentiæ $\overline{a+b}^m$ quæ erit $a^m + m a^{m-1} b + m \times \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} a^{m-3} b^3$ & conferantur cum terminis dignitatis infinitinomii $A + BZ + CZ^2 + DZ^3$ &c. ad dignitatem p evecti, (n°. 550) invenieturque $A^p = a^m$; $pA^{p-1} BZ = ma^{m-1} b$; $pA^{p-1} CZ^2 + p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2} B^2 Z^2 = m \times \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2$; $pA^{p-1} DZ^3 + p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2} \times 2BCZ^3 + p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} A^{p-3} B^3 Z^3 = m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} a^{m-3} b^3$ &c.

Unde invenietur $A = a^{\frac{m}{p}}$, $BZ = \frac{m}{p} \times \frac{a^{m-1}}{a^{m-\frac{m}{p}}} b = \frac{m}{p} a^{\frac{m-p}{p}} b$; $CZ^2 = \frac{m \times m-p}{1 \times 2 \times p^2} a^{\frac{m-2p}{p}} b^2$ &c.

552. Lemma. Si in rectâ AE positione datâ, ad quam curva ZFH refertur, capiatur abscissa quævis AB, sitque ordinata correspondens FB æqualis dignitati abscissæ AB^q, in datam quantitatem 1 ductæ, & deindè capiantur intervalla æqualia BC, CD, & agantur ordinatæ CG, DH, ac per punctum F ducatur tangens FI ordinatæ CG occurrens in I, & recta FM parallela lineæ AE, eidem ordinatæ occurrens in M, ac tandem ordinata CG, seu $\overline{AB + BC}^q$, elevetur ad dignitatem cujus est index q atque ità in seriem infinitam convergentem resolvatur, hujus seriei primus terminus erit semper



æqualis ordinatæ FB, insistenti ad initium quantitatis constantis BC; secundus terminus æqualis erit differentiæ inter FB & CI, id est, lineæ MI, & tertius terminus unà cum sequentibus in infinitum æquabitur lineæ CI quæ jacet inter tangentem & curvam .... Dem. sit $AB = x$, $FB = y$, data $BC = O$, ducta intelligatur ordinata fb, alteri FB infinitè propinqua quæ lineam FM secet in m, & punctis F, f, coeuntibus erit $Fm = dx$, $fm = dy$, ac triangula Fmf, FMI similia, ideoquè $dx : dy = O : MI$, sed quoniam $y = x^q$ (ex hyp.) & proindè $dy = qx^{q-1} dx$, est $dx : dy = 1 : qx^{q-1}$, ergò $MI = qx^{q-1} \times O$ & $CI = FB + MI = x^q + qx^{q-1} \times O$. Prætereà (ex hyp.) est $GC = \overline{x + O}^q = x^q + qx^{q-1} O + \frac{q \times q-1}{1 \times 2} x^{q-2} O^2 + \frac{q \times q-1 \times q-2}{1 \times 2 \times 3} x^{q-3} O^3$ + &c. in infinitum (548). Quarè erit $GI = GC - CI = \frac{q \times q-1}{1 \times 2} x^{q-2} O^2 + \frac{q \times q-1 \times q-2}{1 \times 2 \times 3}$

De Motu Corporum.

$x^{q-3}O^3$ + &c. in infinitum. Ergò seriei in quam resolvitur $\overline{x+O}^q$, terminus primus x^q, æqualis est ordinatæ FB, secundus terminus $qx^{q-1}O$, æqualis differentiæ inter FB & CI, & tertius terminus unà cum sequentibus in infinitum æqualis lineæ GI. Eadem est demonstratio, si curva ZFH concavitatem lineæ AE obvertat. Q. E. D.

553. Cor. 1. Si quantitas O, seu BC, in infinitum minuatur ut fiat $=dx$, termini omnes in seriæ subsequentes sunt infinitè minores quovis termino antecedente, quod quantitatis O index in singulis terminis unitate crescat, ideóque termini illi subsequentes negligi possunt, & proindè in hac hypothesi MI $= dy =$ MG, GI $= \frac{q\times\overline{q-1}}{1\times 2}x^{q-2}O^2 = \frac{q\times\overline{q-1}}{1\times 2}x^{q-2}dx^2 = \frac{1}{2}ddy$. Nam cum sit $dy = qx^{q-1}dx$ & dx, constans, erit sumptis fluxionibus, $ddy = q\times\overline{q-1}\,x^{q-2}dx^2$.

554. Cor. 2. In eâdem Hypothesi erit $dddy$ ut quartus seriei terminus, $ddddy$, ut quintus, & ità porro in infinitum. Nam quia est $ddy = q\times\overline{q-1}\,x^{q-2}dx^2$, erit $dddy = q\times\overline{q-1}\times\overline{q-2}\,x^{q-3}dx^3$, & $ddddy = q\times\overline{q-1}\times\overline{q-2}\times\overline{q-3}\,x^{q-4}dx^4$, & ità deinceps. Quartus autem seriei terminus positâ $O = dx$, est $\frac{q\times\overline{q-1}\times\overline{q-2}}{1\times 2\times 3}x^{q-3}dx^3$. Quintus $\frac{q\times\overline{q-1}\times\overline{q-2}\times\overline{q-3}}{1\times 2\times 3\times 4}x^{q-}dx^4$; Ergò ob datos numeros $1\times 2\times 3$ & $1\times 2\times 3\times 4$. &c. patet corollarium.

555. Cor. 3. Eadem omnia vera sunt, si fuerit ordinata BF seu y æqualis seriei cuivis potentiarum quarumlibet abscissæ AB in datas quantitates ductarum, hoc est $y = ex^h \mp fx^m \mp gx^p +$ &c. Eadem enim demonstratio. Observandum tamen est in hoc casu primum seriei terminum dici in quo quantitas O, seu BC, non extat, secundum terminum in quo quantitas illa est unius dimensionis, tertium in quo extat duarum dimensionum & sic in infinitum, licet in singulis terminis ità definitis plures contineantur quantitates signis + vel − conjunctæ. Exempli causâ. Positâ $y = ex^n + fx^m =$ BF, erit GC $= e(x+O)^n + f(x+O)^m = ex^n + fx^m + \frac{m}{1}ex^{n-1}O + \frac{n}{1}ex^{m-1}O +$ &c. in infinitum. Primus seriei terminus est $ex^n + fx^m$, secundus $\frac{n}{1}ex^{n-1}\times O + \frac{m}{1}ex^{m-1}\times O$ & ità de cæteris.

556. Cor. 4. Hinc sequitur eadem omnia valere, si fuerit ordinata BF seu y æqualis cuilibet functioni ipsius abscissæ AB, seu x, hoc est $y = Q$, & Q quantitas ex abscissâ x, ipsiusque potentiis ac aliis quantitatibus datis quomodolibet compositâ. Nam quantitas illa Q poterit semper vel (per Lemma 548.) ejusque corollaria vel per divisionem in seriem aliquam resolvi, cujus singuli termini erunt vel ipsius abscissæ x potentiæ in quantitates datas ductæ, vel quantitates omnino datæ, omnis verò quantitas data $c = cx^0$. Quarè æquatio $y = Q$, semper reduci poterit in formam æquationis cor. 3. (555.) $y = ex^n \mp fx^m \mp gx^p \mp$ &c. Exempli causâ: Sit $y = g + \frac{ee}{b+x} + (ff+xx)^{\frac{1}{2}}$.

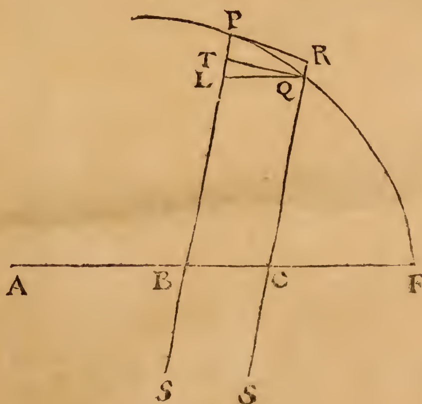
Peractâ divisione in infinitum, erit $\frac{ee}{b+x} = \frac{ee}{b} - \frac{eex}{b^2} + \frac{eex^2}{b^3} - \frac{eex^3}{b^4} + \frac{eex^4}{b^5}$ &c. in infinitum; & $\overline{ff+xx}^{\frac{1}{2}} = f + \frac{x^2}{2f} - \frac{x^4}{8f^3} + \frac{x^6}{16f^5}$ &c. in infinitum. Nam in hoc casu erit in formulâ $P^{\frac{m}{p}} + \frac{m}{p}AQ + \frac{m-p}{2p}BQ$ &c. (551.)

m.

vim proportionalem esse suppono. (c) Est igitur vis quæsita ut $\frac{mm-nn}{nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$, vel quod perinde est, ut $\frac{mm-nn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut si ordinatim applicata parabolam attingat, existente $m=2$, & $n=1$: fiet vis ut data $2B^{0}$, ideoque dabitur. Datâ igitur vi corpus movebitur in parabolâ, quemadmodum

$m=1$, $p=2$, $P=ff$, $Q=\frac{x^2}{ff}$ $A=P^{\frac{m}{p}}=ff^{\frac{1}{2}}=f$. $B=\frac{m}{p}\times AQ=\frac{x^2}{2f}$, & sic deinceps, ergò erit $y=g+\frac{ee}{b}+f-\frac{eex}{b}+\left(\frac{ee}{b^3}+\frac{1}{2}f\right)x^2-\frac{eex^3}{b^4}+\left(\frac{ee}{b^5}-\frac{1}{8f^3}\right)x^4$, &c. in infinitum.

(c) 557. * *Est igitur vis quæsita &c.* Moveatur corpus in curvâ PQF, vi tendente ad planum seu basim AF, secundum lineas PB, QC cum basi AF angulum datum constituentes. Producatur ordinata CQ ut tangenti per P ductæ occurrat in R, & ex puncto curvæ Q ad ordinatam PB agantur QL parallela AF, & QT ad PB perpendicularis. Jam si vis centripeta fingatur ad punctum S infinitè distans tendere, coeuntibus punctis P & Q vis illa in puncto P erit (per cor. 1. prop. 6.) directè ut $\frac{QR}{SP^2\times QT}$, hoc est, ob constantem SP, ut $\frac{QR}{QT}$. Porrò ob angulum QLT datum, & angulum QTL rectum, datur specie triangulum LQT, & ideò datâ QL, datur etiam QT, ergò datâ BC seu QL, vis erit ut QR. Sed si abscissa AB dicatur $=A$, ordinata $BP=B$, & $BC=O$; cum sit (ex Hyp.) B, ut $A^{\frac{m}{n}}$, erit ordinata CQ, ut $\overline{A+O}^{\frac{m}{n}}$ & (553), QR, ut tertius terminus seriei in quam resolvitur $\overline{A+O}^{\frac{m}{n}}$, hoc est, (550) ut $\frac{m\times m-n}{1\times 2\times n^2} A^{\frac{m-2n}{n}}\times OO=\frac{mm-mn}{2n^2} A^{\frac{m-2n}{n}}\times OO$, seu ut $\frac{mm-mn}{n^2}\times A^{\frac{m-2n}{n}}$, ob datam quantitatem $\frac{OO}{2}$.

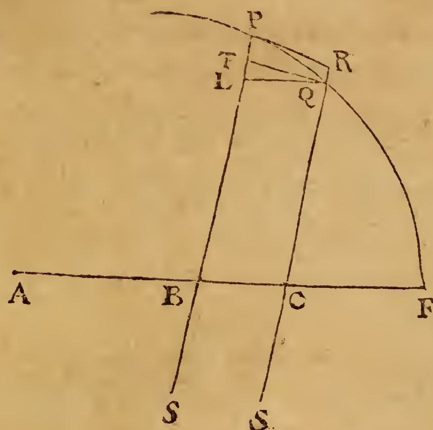


Est igitur vis quæsita ut $\frac{mm-mn}{1\times 2\times n^2}\times A^{\frac{m-2n}{n}}$ vel ut $\frac{mm-mn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$; quia cum sit B, ut $A^{\frac{m}{n}}$, erit $B^{\frac{n}{m}}$ ut A, & B

De Motu Corporum.

modum *Galilæus* demonstravit. Quod si ordinatim applicata hyperbolam attingat, existente $m=0-1$, & $n=1$; fiet vis ut $2A^{-3}$ seu $2B^{3}$: ideoque vi, quæ sit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in hyperbolâ. Sed missis hujusmodi propositionibus, pergo ad alias quasdam de motu, quas nondum attigi.

SEC.



$B^{\frac{n}{m}\times\frac{m-2n}{n}}$, seu $B^{\frac{m-2n}{m}}$, ut $A^{\frac{m-2n}{n}}$. Itaque si ponatur $m=2$, $n=1$, erit B, ut A^2, & curva PF parabola, & $\frac{mm-mn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}} = 2B^0$, adeóque vis ut data $2B^0=2$. Quod si ponatur $m=-1$, & $n=1$, erit B, ut $\frac{1}{A}$ hoc est $B\times A$ rectangulum datum, & proindè curva PF hyperbola cujus asymptotus AF, & centrum A; & $\frac{mm-mn}{nn} A^{\frac{m-2n}{n}} = 2A^{-3} = \frac{2}{A^3} = 2B^3$, & ideò vis ut cubus ordinatæ B. Sed quoniam hyperbola convexitatem obvertit asymptoto AF, vi illâ corpus à basi AF repelletur.

Si curva PQF, est ellipsis cujus centrum A, semidiameter AF = C, erit PB^2 seu B^2, ut rectangulum $\overline{AF+AB}\times BF = \overline{C+A}\times\overline{C-A} = CC-AA$, & ponenendo $BC=O$, erit QC^2, ut $CC-AA-2AO-OO$, fiat $CC-AA=DD$, erit QC^2, ut $DD-2AO-OO$, & radice per formulam generalem extractâ (550 551) erit QC, ut $D-\frac{AO}{D}-\frac{OO}{2D}-\frac{AAOO}{2D^3}-\frac{AO^3}{2D^3}-\frac{A^3O^3}{2D^5}$, &c. tertius seriei terminus est $\frac{OO}{2D}+\frac{AAOO}{2D^3} = \frac{\overline{DD+AA}\times OO}{2D^3} = \frac{CCOO}{2D^3}$, erit igitur QR (552. 556) seu vis ut $\frac{CC}{2D^3}$, hoc est, ob datam quantitatem $\frac{CC}{2}$, ut $\frac{1}{D^3}$, ac proindè quoniam BB est ut $CC-AA$ seu DD, vis erit ut $\frac{1}{B^3}$, hoc est, ut cubus ordinatim applicatæ reciprocè, quod convenit cum solutione Problematis III. Eodem modo demonstratur vim à plano AF repellentem decrescere in ratione triplicatâ ordinatim applicatæ PB si corpus moveatur in hyperbolâ, cujus diameter una sit in plano AF, altera conjugata in lineâ parallelâ ordinatis PB, QC, & convexitas plano AF obversa.

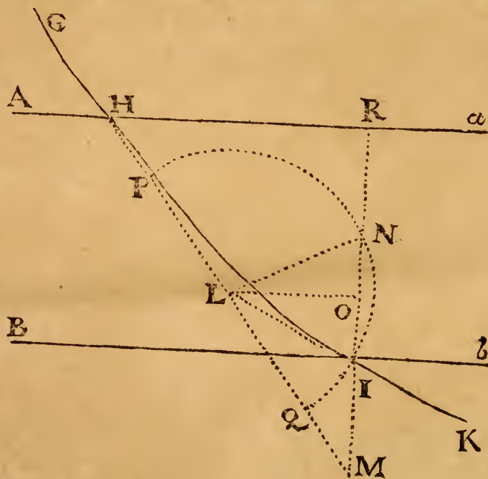
SECTIO XIV.

De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

PROPOSITIO XCIV. THEOREMA XLVIII.

Si media duo similaria, spatio planis parallelis utrinque terminato, distinguantur ab invicem, & corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus medium alterutrum, neque ullâ aliâ vi agitetur vel impediatur; sit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano distantiis ad eandem ipsius partem captis, ubique eadem: dico quod sinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad sinum emergentiæ ex plano altero in ratione datâ.

Cas. 1. Sunto Aa, Bb plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius Aa (d) secundum lineam GH, ac toto suo per spatium intermedium transitu attrahatur vel impellatur versus medium incidentiæ, eâque actione describat lineam curvam HI, & emergat (e) secundum lineam IK. Ad planum emergentiæ Bb erigatur perpendiculum IM, occurrens tum lineæ incidentiæ GH productæ in M, tum plano incidentiæ Aa in R; & linea emergentiæ KI producta occurrat HM in



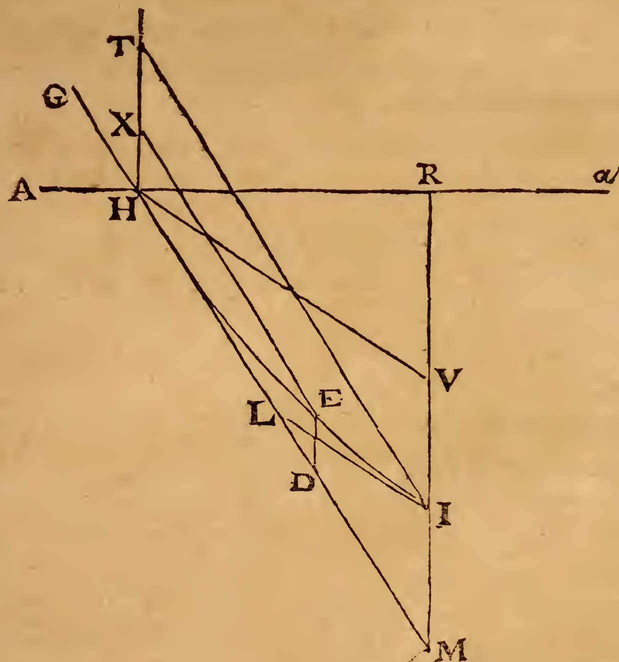
L.

(d) 558. * *Secundum lineam GH.* Angulus incidentiæ hic dicitur complementum anguli GHA ad rectum, seu angulus quem linea GH constituit cum rectâ ad planum incidentiæ Aa perpendiculariter erectâ in H. Angulus emergentiæ est etiam angulus KIM, quem linea directionis corporis emergentis, efficit cum rectâ IM ad planum emergentiæ Bb, perpendiculari in I.

(e) * *Et emergat secundum lineam.* Patet rectas GH, IK seu corporis in H & I directiones, curvam HI in punctis H, I contingere.

De Motu Corporum.

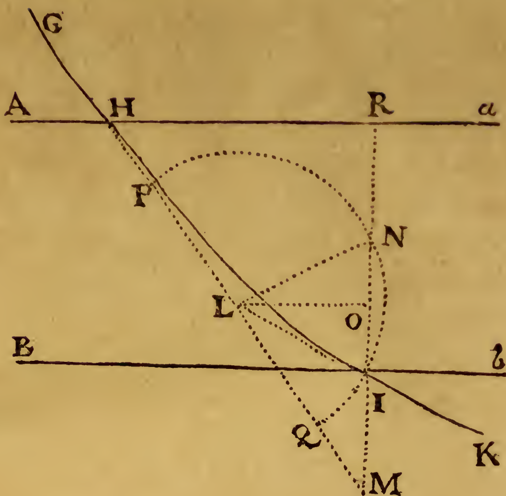
L. Centro *L* intervallo *LI* deſcribatur circulus, ſecans tam *HM* in *P* & *Q*, quam *MI* productam in *N*; & primò ſi attractio vel impulſus ponatur uniformis, erit (ex demonſtratis *Galilæi*) (f) curva *HI* parabola (g) cujus hæc eſt proprietas, ut rectangulum ſub dato latere recto & lineâ *IM* æquale ſit *HM* quadrato; ſed & linea *HM* biſecabitur in *L*. Unde ſi ad



(f) * *Curva HI parabola*, cujus diameter I R, patet (per not. 40.).

(g) * *Cujus hæc eſt proprietas &c.* Ductis per punctum H diametro H T, & rectâ H V ad alteram diametrum I R ordinatim applicata, atque ex puncto I ad diametrum HT ordinatâ IT, erit ob parallelas MI, HT (per th. 1. de parabolâ) & parallelas MH, IT (per lem. 4. de conic.) MI = HT & I T = M H (per 34. 1. Elem.); ſed (per theor. 1. de parabolâ) quadratum ordinatæ TI æquale eſt rectangulo ſub dato latere recto diametri HT & abſciſsâ HT, ergò rectangulum ſub dato latere recto & lineâ M I æquale eſt H M quadrato; Et quoniam HM parabolam tangit in H eſtque proindè (per cor. 1. lem. 5. de conic.) I M = V I, & H V parallela L I, erit quoque H L = L M. Q. E. D.

559. Ut latus rectum diametri HT in variis angulis incidentiæ datum ſit, oportet corporis parabolam deſcribentis velocitatem in puncto H, & plani incidentiæ A a vim attractricem eſſe datas. His autem datis, datum eſſe hoc latus rectum ità demonſtratur. Per punctum X in diametro



ad *MI* demittatur perpendiculum *LO*, (h) æquales erunt *MO*, *OR*; & additis (i) æqualibus *ON*, *OI*, fient totæ æquales *MN*, *IR*. Proinde cum *IR* detur, datur etiam *MN*; estque rectangulum *NMI* ad rectangulum sub latere recto & *IM*, hoc est, ad *HMq*, in datâ ratione. (k) *Sed rectangulum NMI* æquale est rectangulo *PMQ*, id est, differentiæ quadratorum *MLq*, & *PLq* seu *LIq*; & *HMq* datam rationem habet ad sui ipsius quartam partem *MLq*: ergo datur ratio *MLq*−*LIq* ad *MLq*, (l) & convertendo ratio *LIq* ad *MLq*, & ratio dimidiata *LI* ad *ML*. Sed in omni triangulo *LMI*, sinus angulorum sunt proportionales lateribus oppositis. Ergo datur ratio sinus anguli incidentiæ *LMR* ad sinum anguli emergentiæ *LIR*. *Q. E. D.*

Cas. 2. Transeat jam corpus successivè per spatia plura paral-

tro HT datum, agatur *ordinatim* applicata XE parabolæ occurrens in E, & per E ducatur ED parallela XH & tangenti HM occurrens in D, ac proindè æqualis datæ XH. Jam verò HX seu DE, est spatium quod corpus vi attractrice describit eodem tempore dato quo motu uniformi projectionis percurrit HD, ideóque datis vi attractrice & velocitate projectionis, data quoque erit linea HD in quovis incidentiæ angulo GHT. Est autem latus rectum diametri HT tertia proportionalis ad abscissam HX, & ordinatam XE seu HD. Ergò datis vi attractrice & velocitate projectionis, datum seu constans est latus rectum diametri HT. Q. E. D.

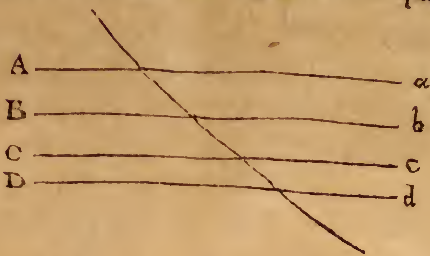
(h) * *Æquales erunt MO, OR* (per prop. 2. lib. 6. Elem.)

(i) * *Æqualibus ON, OI.* Per prop. 3. lib. 3. Elem.

(k) * *Sed rectangulum NMI æquale est rectangulo PMQ*, (per cor. 1. prop. 36. lib. 3. Elem.) *id est, differentiæ quadratorum* ML^2 *&* PL^2, est enim PM = ML + PL, & QM = ML − LQ = ML − PL; Quare PM × QM = $ML^2 - PL^2$. (Per Corol. 6. 2i. Elem.)

(l) * *Et convertendo.* Sint enim *A* & *B*, quantitates datæ, & $ML^2 - LI^2 : ML^2 = A^2 : B^2$, erit $ML^2 : LI^2 = B^2 : B^2 - A^2$, quæ est ratio data.

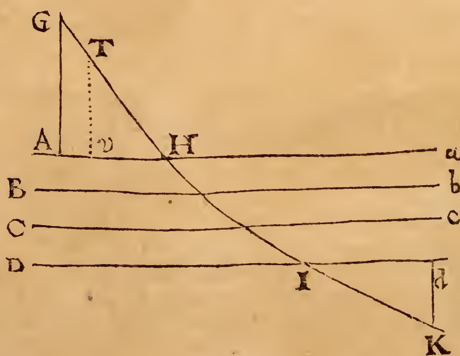
rallelis planis terminata, *A a b B*, *B b c C*, &c. & agitetur vi quæ ſit in ſingulis ſeparatim uniformis, at in diverſis diverſa; & per jam demonſtrata, ſinus incidentiæ in planum primum *A a* erit ad ſinum emergentiæ ex plano ſecundo *B b*, in datâ ratione; & hic ſinus, qui eſt ſinus incidentiæ in planum ſecundum *B b*, erit ad ſinum emergentiæ ex plano tertio *C c*, in datâ ratione; & hic ſinus ad ſinum emergentiæ ex plano quarto *D d*, in datâ ratione; & ſic in infinitum: & (m) ex æquo, ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo in datâ ratione. Minuantur jam planorum intervalla & augeatur numerus in infinitum, eò ut attractionis vel impulſus actio, ſecundum legem quamcunque aſſignatam, continua reddatur; & ratio ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo, ſemper data exiſtens, etiamnum dabitur. *Q. E. D.*



PROPOSITIO XCV. THEOREMA XLIX.

Iiſdem poſitis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam eſt ad ejus velocitatem poſt emergentiam, ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ.

Capiantur *A H*, *I d* æquales, & erigantur perpendicula *A G*, *d K* occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ *G H*, *I K*, in *G* & *K*. In *G H* capiatur *T H* æqualis *I K*, & ad planum *A a* demittatur normaliter *T v*. Et (per legum corol 2.) diſtinguatur motus corporis in duos,



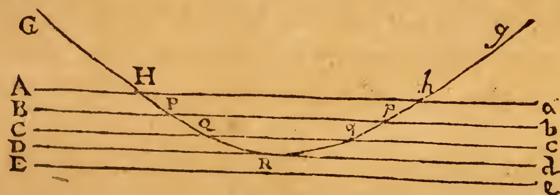
(m) * *Et ex æquo.* Sint quantitates datæ A, B, C, D, &c. Sinus incidentiæ in planum primum S, ſinus emergentiæ ex ſecundo plano, idem qui ſinus incidentiæ in ſecundum planum T, & ità porrò ſinus ſint S, T, V, X, &c. ponaturque S : T = A : B, T : V = B : C, V : X = C : D, & erit, ex æquo, S : X = A : D.

unum planis *Aa*, *Bb*, *Cc*, &c. perpendicularem, alterum iisdem parallelum. Vis attractionis vel impulsus, agendo secundum lineas perpendiculares, nil mutat motum secundum parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa secundum parallelas intervalla, quæ sunt inter lineam *AG* & punctum *H*, interque punctum *I* & lineam *dK*; (n) hoc est, æqualibus temporibus describet lineas *GH*, *IK*. Proinde velocitas ante incidentiam est ad velocitatem post emergentiam, ut *GH* ad *IK* vel *TH*, id (o) est, ut *AH* vel *Id* ad *vH*, hoc est (*respectu* radii *TH* vel *IK*) (p) sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XCVI. THEOREMA L.

Iisdem positis, & (q) quod motus ante incidentiam velocior sit quam postea, dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

Nam concipe corpus inter parallela plana *A a*, *Bb*, *C c*, &c. describere arcus parabolicos, ut supra; sintque arcus illi *HP*, *PQ*, *QR*, &c.



Et sit ea lineæ incidentiæ *GH* obliquitas ad planum primum *Aa*, ut sinus incidentiæ sit ad radium circuli, cujus est sinus, in eâ ratione quam habet idem sinus

(n) * *Hoc est, æqualibus temporibus.* Quoniam motu composito corpus fertur per lineas G H & I K, eodem tempore describit G H quo A H, & I K quo I D, sed (ex Dem.) tempora quibus conficiuntur intervalla parallela & æqualia A H, I D æquantur, ergò corpus æqualibus temporibus describit lineas G H & I K.

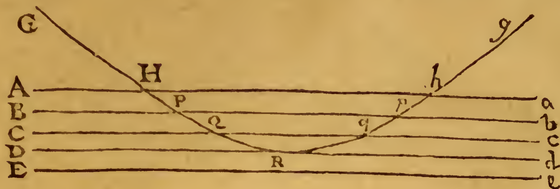
(o) * *Id est ut AH vel Id ad vH.* Per prop. 2. lib. 6. Elem.

(p) * *Ut sinus emergentiæ.* Est enim angulus v T H anguli T H v, & angulus I K d anguli K I d, complementum ad rectum, & proinde (558) prior est æqualis angulo incidentiæ, posterior est æqualis angulo emergentiæ.

(q) * *Et quod motus antè incidentiam &c.* Ut angulus emergentiæ semper crescat (prop. 95.) & ipsius proinde complementum ad rectum semper decrescat in transitu corporis per diversa media;

DE MOTU CORPORUM.

ſinus incidentiæ ad ſinum emergentiæ ex plano *Dd*, in ſpatium *DdeE*: & ob ſinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, ideoque linea emergentiæ coincidet cum plano *Dd*. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto *R*; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perſpicuum eſt quod corpus non poteſt ultra pergere verſus planum *Ee*.



Sed nec poteſt idem pergere in lineâ emergentiæ *Rd*, propterea quod perpetuò attrahitur vel impellitur (r) verſus medium incidentiæ. Revertetur itaque inter plana *Cc*, *Dd*, deſcribendo arcum parabolæ *QRq*, (ſ) cujus vertex principalis (juxta demonſtrata *Galilæi*) eſt in *R*; ſecabit planum *Cc* in eodem angulo in *q*, ac prius in *Q*; dein pergendo in arcubus parabolicis *qp*, *ph*, &c. arcubus prioribus *QP*, *PH* ſimilibus & æqualibus, ſecabit reliqua plana in iiſdem angulis in *p*, *h*, &c. ac prius in *P*, *H*, &c. emergetque tandem eâdem obliquitate in *h*, quâ incidit in *H*. Concipe jam planorum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulſus ſecundum legem quamcunque aſſignatam continua reddatur; & angulus emergentiæ ſemper angulo incidentiæ æqualis exiſtens, eidem etiamnum manebit æqualis. *Q. E. D.*

Scho-

(r) * *Verſus medium incidentiæ* v. gr. C c.

(ſ) * *Cujus vertex principalis.* Quoniam enim (ut patet ex not. 40.) omnes diametri parabolæ Q R q ſunt ad baſim Q q perpendiculares, erit Q q ad axem ordinatim applicata, cumque recta D R d ipſi Q q parallela parabolam tangat in R, (40) erit R vertex principalis (per lem. 4. de conic.) & propterea velocitates corporis in locis Q & q à vertice R æquè remotis æquales erunt, & directiones illius ad lineam Q q æque inclinatæ: Inſuper velocitas perpendicularis quâ corpus ex ſolâ vi attractrice ad planum P p urgetur, iiſdem gradibus creſcit per totum ſpatium q p, quibus antè decreverat per ſpatium æquale P Q. Quarè corpus *pergendo in arcubus parabolicis* &c.

Scholium.

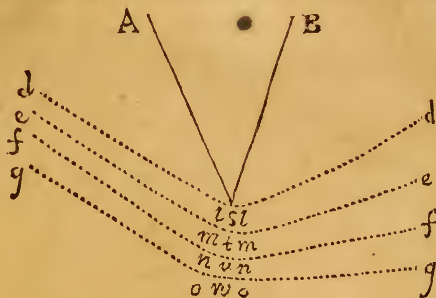
Harum attractionum haud multum dissimiles sunt lucis reflexiones & refractiones, factæ secundum datam secantium rationem, ut invenit *Snellius*, (t) & per consequens secundum datam sinuum rationem, ut exposuit *Cartesius*. Namque lucem successivè propagari & spatio quasi septem vel octo minutorum primorum à sole ad terram venire, (u) jam constat per phænomena satellitum *Jovis*, observationibus diversorum astronomorum confirmata. Radii autem in aëre existentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebrosum cubiculum admissâ, invenit, & ipse quoque expertus sum) in transitu suo prope corpo-

G B A C H E D F K

(t) * *Et per consequens.* Lucis radius G H incidat in planum refringens AD, sitque radius refractus H K. Centro H & radio quovis H A, circulus describatur planum secans in A & D radiosque lucis in B & F. Erigantur ad planum perpendicula A G, C B, E F, D K. Villebrordus Snellius, referente Isaaco Vossio in suâ dissertatione de lucis naturâ & proprietate, invenerat secantes G H, H K angulorum G H A, K H D, esse in datâ ratione. Verùm indè sequitur quod Cartesius posteà vulgavit, datam quoque esse rationem linearum CH, HE quæ sunt sinus angulorum incidentiæ CBH, & emergentiæ HFE (55S). Nam BH : GH = CH : AH (seu BH) & KH : FH (seu BH) = HD (seu BH) : HE, & ex æquo, KH : GH = CH : HE. Quarè datâ ratione GH ad KH, datur quoque ratio HE ad CH.

(u) * *Jam constat per phænomena.* Jupiter cum suis quatuor satellitibus circà solem ceù centrum revolvitur in trajectoriâ quæ tellurem ambitu suo complectitur, undè fit ut perpetuò mutetur Jovis à tellure distantia, quæ, cæteris paribus, minima est, tellure solem inter & Jovem positâ, maxima verò, sole inter Jovem & tellurem locato, atque harum distantiarum differentia orbis magni diametro, seu duplæ distantiæ solis à terrâ æqualis est. Si igitur lucis propagatio instantanea non est, sed successiva, & per orbis magni diametrum sensibili aliquo tempore diffundatur, necesse est ut satellitis Ecclipsis, quæ contingit dum Jovis umbram subit, tardiùs à nobis videatur in majori illâ Jovis distantiâ, citiùs in minori, atque ità rem se habere Roemerus aliique deinde plures astronomi observarunt. Cæterum alii causæ præter successivam lucis propagationem inæqualitatem illam satellitum tribuendam esse contendit Clariss. Maraldus in comm. Paris. 1707. quod etiam jam antea Magno Cassino visum fuerat. Sed Clarissimus Granjean ejus argumentis respondet in comm. Paris. 1732. horum dissertationes videsis.

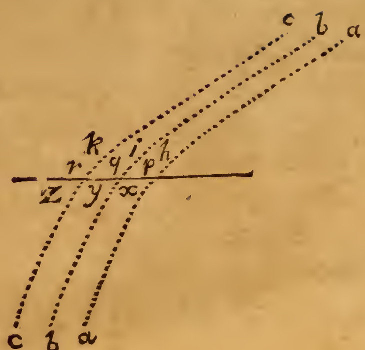
porum vel opacorum vel perſpicuorum angulos (quales ſunt nummorum ex auro, argento & ære cuſorum termini rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quaſi attracti in eadem; & ex his radiis, qui in tranſitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, (x) quaſi magis attracti, ut ipſe etiam diligenter obſervavi. Et qui tranſeunt ad majores diſtantias minus incurvantur; & ad diſtantias adhuc majores incurvantur aliquantulum ad partes contrarias, & tres colorum faſcias efformant. In figura deſignat *s* aciem cultri vel cunei cujuſvis *AsB*; & *gowog*, *fnunf*, *emtme*, *dlsld* ſunt radii, arcubus *owo*, *mtm*, *lsl* verſus cultrum incurvati; idque magis vel minus pro diſtantia eorum à cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum, debebunt etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par eſt ratio incidentium in vitrum. (z) Fit igitur refractio, non in puncto incidentiæ, ſed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam



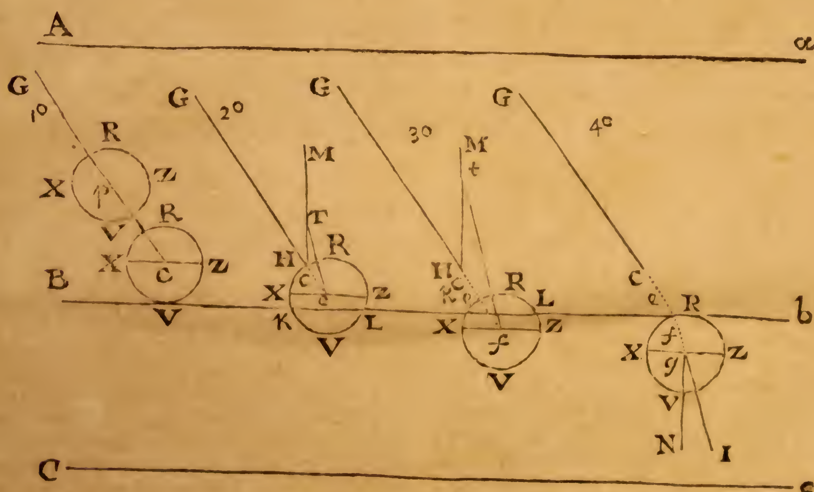
(x) * *Quaſi magis attracti.* Alia egregia experimenta vide in Newtoni opticâ initio lib. 3. & quæſt. 29.

(z) * *Fit igitur refractio & reflexio.* Vide Prop. 8. & 9. Partis 3æ. Lib. optices Newtoni. Sed ut res clariùs intelligatur, ſint media duo contigua, A a b B, B b c C, planis parallelis terminata, & quorum talis ſit attractionis lex ut ultrà diſtantiam p R à medio alterutro evaneſcat ejus medii attractio. Itaque centro p & radio pR (fig. 1.) deſcribatur circulus vel potiùs ſphæra RZVX quæ planum B b non attingat, corpus p verſus omnia hujus ſphæræ puncta æqualiter attractum, nullam in partem inflectetur, ſed manebit in lineâ rectâ G C, ſecundum quam moveri ſupponitur. Si in eâdem rectâ G C, capiatur punctum C, à plano B b remotum diſtantiâ C V = P R, ſitque vis attractiva versùs medium B b c C, major vi attractivâ medii A a b B, in eo ipſo loco c corpus a rectâ viâ G c deflectere curvamque lineam deſcribere incipiet. Perveniat (2°.) corpus ex C in e, per curvam c e, & ductâ H M ad plana A a, B b perpendiculari, ac per punctum e, rectâ e T, quæ curvam c e tangat in e, & perpendiculo H M occurrat in T, erit angulus e T c minor angulo incidentiæ G H M; nam cum ſegmentum K V L, in hemiſphærio XVZ magis trahat versùs planum B b, quam ſegmentum ipſi æquale in hemiſphærio XRZ, (ex hyp.) versùs planum A a, manifeſtum eſt curvam deorſum inflecti, ideóque tangentem e T à radio inciden-

factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, postquam illud ingressi sunt: uti in radiis *ckzc*, *biyb*, *ahxa* incidentibus ad *r*, *q*, *p*, & inter *k* & *z*, *i* & *y*, *h* & *x*, incurvatis, delineatum est. Igitur ob analogiam quæ est inter propagationem radiorum lucis & progressum corporum, visum est propositiones sequentes in usus opticos subjungere; interea de naturâ radiorum (utrum sint corpora necne) nihil omnino disputans, sed trajectorias corporum trajectoriis radiorum persimiles solummodo determinans.



PRO-



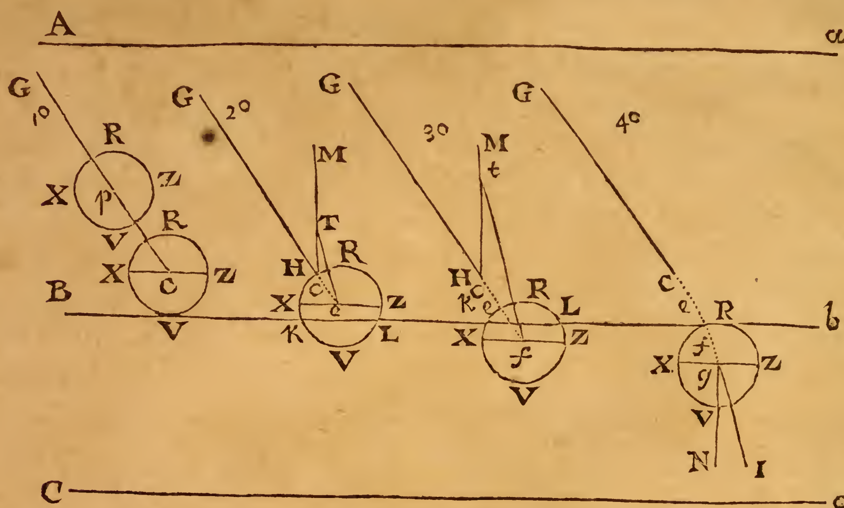
te GC, versùs superiora M recedere. Similiter ubi corpusculum C est in f (3°.) intrà medium BbcC, magis trahitur versùs planum Cc, ab hemisphærio XVZ, quam retrahitur versùs planum Bb, ab altero hemisphærio XRZ, cujus segmentum kRl, minus trahit, quam æquale segmentum in hemisphærio XVZ; quare angulus Htf, quem tangens ft cum perpendiculo HM efficit, adhuc minor est quam angulus HTe (2°). Sed cum tandem corpusculum c pervenit in g (4°), locum à plano Bb remotum distantiâ maximâ gR = pR, tum corpus p, æqualiter undique attractum (ex hypothesi) semitam non ampliùs mutat, sed rectâ movetur per

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XCVII. PROBLEMA XLVII.

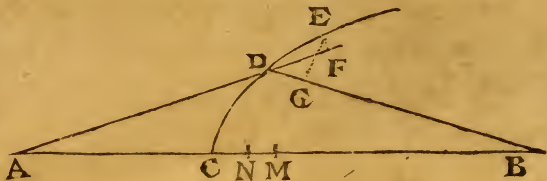
Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinum emergentiæ in datâ ratione; quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerari possit: determinare superficiem, quæ corpuscula omnia de loco dato successivè manantia convergere faciat ad alium locum datum.

Sit *A* locus à quo corpuscula divergunt; *B* locus in quem convergere debent; *C D E* curva linea quæ circa axem *A B*



g I, quæ curvam c e f g tangit in g, estque angulus N g I, quem g I cum g N ad B b perpendiculari constituit, seu angulus emergentiæ minor adhuc angulo H t f (3°). Oppositum eveniet, si medium B b c C, minùs trahat quam medium A a b B, & refractio in reflexionem mutari poterit. Fit igitur refractio & reflexio non in puncto incidentiæ R (4°). Sed paulatim per continuam incurvationem radiorum, ut Newtonus docet. Quod si itaque certissimis experimentis constet radios lucis à corporibus quasi attrahi in minimis distantiis, Newtonus veram hic demonstravit causam illarum lucis affectionum, quibus contingit ut radii incidentes in superficiem corporis resiliant in plano ad eam verticali, sub angulis reflexionis æqualibus angulis incidentiæ, atque ut ex uno medio in aliud diversæ densitatis aut diversæ vis trahentis, obliquè penetrantes refrangantur in plano ad superficiem, quæ duo media dirimit itidem recto, ità ut sinus incidentiæ & emergentiæ datam servent rationem. Satis enim liquet plana linearum GHI & GHRh, in superioribus propositionibus, perpendicularia esse ad plana A a, B b, ut planum parabolæ quam gravia in hypothesi Galilæi describunt perpendiculare est ad horizontem. Quænam verò causa sit attractionis aut tendentiæ vel impulsûs radiorum lucis in corpora: alia quæstio est quam hic agitare minimè necesse est, quâque sepositâ, interim ex certis experimentis mathematicâ demonstratione, ostensa est reflexionis & refractionis lex & causa; quem-

revoluta describat superficiem quæsitam; *D*, *E* curvæ illius puncta duo quævis; & *EF*, *EG* perpendicula in corporis vias *AD*, *DB* demissa. Accedat punctum *D* ad punctum *E*; & lineæ *DF*, quâ *AD* augetur, ad lineam *DG*, quâ *DB* diminuitur, (y) ratio ultima erit eadem, quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ. Datur ergo ratio incrementi lineæ *AD* ad decrementum lineæ *DB*; & propterea si in axe *AB* sumatur ubivis punctum *C*, per quod curva *CDE* transire debet, & capiatur ipsius *AC* incrementum *CM* ad ipsius *BC* decrementum *CN* in datâ illâ ratione, centrisque *A*, *B*, & intervallis *AM*, *BN* describantur circuli duo se mutuo secantes in *D*; (a) punctum illud *D* tanget curvam quæsitam *CDE*, eandemque ubivis tangendo determinabit. *Q. E. I.*



Corol. 1 Faciendo autem ut punctum *A* vel *B*, nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti *C*,

quemadmodum semel cognitis (per experientiam) gravitate atque elaterio aëris, recte quis ascensus & descensus liquorum in tubis vacuis causam atque legem demonstrasse censetur, dum ex iis aeris proprietatibus quarum causas ignorat, hæc phænomena accurate deduxit. Nam juxtà rectam philosophandi rationem, in naturæ phænomena primum debemus diligenter inquirere, ut posteà motus corporum eorumque leges & causas accuratius investigare & cognoscere possimus. Cæterum in phænomena reflexionis ac refractionis lucis eorumque causas inquisierunt philosophi ac Mathematici celeberrimi, Cartesius cap. 2°. dioptrices per leges generales resolutionemque motuum, & supponendo lumini minorem resistentiam in densioribus quam in rarioribus mediis objici; Leibnitzius in Actis eruditorum Lipsiensibus an. 1682. pag. 185. hâc factâ hypothesi, quod lumen à puncto radiante ad punctum illustrandum viâ omnium facillimâ perveniat, quâ etiam usus erat anteà Fermatius; Hugenius in tractatu de lumine per naturam undulationis luminis rem totam explicat, & Joannes Bernoullius in Actis Lips. an. 1701. ex æquilibrii fundamento eam ingeniosissime deduxit.

(y) * *Ratio ultima erit eadem.* Nam lineolâ DE pro radio seu sinu toto usurpatâ, lineolæ DF, DG sunt sinus angulorum DEF, DEG; sed angulus DEF est complementum ad rectum anguli EDF, seu ADC, ideoque æqualis est angulo incidentiæ, & angulus DEG est complementum ad rectum anguli EDG, ideoque æqualis est angulo emergentiæ (558). Ergò lineæ DF ad lineam DG ratio ultima erit eadem quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ, ideóque data. Et hinc (per cor. Lem. 4.) datur ratio incrementi totius finiti lineæ AD, ad decrementum totum finitum lineæ DB.

(a) * *Punctum illud D.* Atque eodem modo, assumendo varia incrementa CM, & decrementa CN, puncta diversa lineæ CDE determinabuntur. Si verò centro B & radio quovis describatur circulus, curvam CE secans in E, & lineam AB in

DE MOTU CORPORUM.

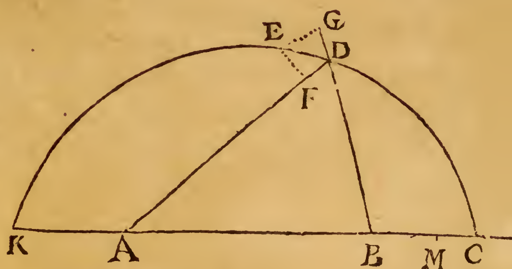
(b) habebuntur figuræ illæ omnes, quas *Cartesius* in optica & geometria ad refractiones exposuit. Quarum inventionem cum *Cartesius* celaverit, visum fuit hâc propositione exponere.

Corol. 2. Si corpus in superficiem quamvis *CD*, secundum lineam rectam *AD*, lege quâvis ductam incidens, emergat secundum aliam quamvis rectam *DK*, & à puncto *C* duci intel-

in N, & indè convolutione superficiei CEN, circà axem CN solidum corpus conficiatur, corpusculum ex D, per lineam DB ad centrum B circuli descripti tendens, non refrangetur, dum ex superficie circulari concavâ EN egreditur, quod corpusculi directio DB, sit ad illam superficiem perpendicularis, atque ita corpusculum semper perveniet ad punctum B.

(b) * *Habebuntur figuræ illæ omnes.* Quas enim lineas Cartesius Geometriæ lib. 2°. Pag. 50. & seq. dicit A 5, A 6, vel A 7., A 8, eas Newtonus hic vocat CM, CN, & de cætero eadem est utriusque authoris constructio. Undè manifestum est, si punctum C, inter puncta A & B, & punctum N inter C & M, sita sint, primam Cartesii ovalem Newtonianâ constructione describi; si manentibus punctis A, C, B, M. punctum N, inter C & A locetur, 2am. ovalem Cartesianam obtineri; si vero punctum B ad ad alteras partes puncti C migret ultrà A, & punctum C sit inter A & N, atque M, 3am. Cartesii ovalem haberi, iisdemque positis, si punctum N sit inter C, & A, 4tm. ovalem Cartesii delineari. Porrò, si punctum A vel B in infinitum abeat ut radii incidant vel refringantur paralleli, tum per punctum M vel N erigendum erit perpendiculum, quod circulus centro B vel A, & radio BN, vel AM, descriptus secabit in puncto quæsito D, curvæ CDE, quæ erit ellipsis vel hyperbola, ut calculo inito facilè patet, atque hæ sunt figuræ quibus Cartesius cap. 8°. dioptrices usus est.

Eadem est demonstratio, si superficies CDE incidentes radios reflectit, quo casu fit CN = CM, ob angulum incidentiæ æqualem angulo emernentiæ (per prop. 96.)



& curva CDE erit sectio conica, videlicet hyperbola, si punctum C inter A & B situm; ellipsis, si extrà positum sit; Parabola, si ellipseos focus B in infinitum abeat, & circulus, si puncta A & B coeant. Nam si punctum C inter A & B situm sit, & N inter A & C, cum sit AD = AM, & BD = BN (per constr.) rectarum AD, BD differentia data erit, ut potè æqualis AM − BN = AC + CM − BC − CN = AC − BC, ob CM = CN, ideòque curva CDE erit hyperbola cujus foci A & B, (per theor. 3. de hyperbolâ). Si punctum C inter puncta A & B positum non est, ut in hâc figurâ, rectarum AD, BD summa data erit, in hoc enim casu punctum C, est inter N, & M, atque AD + BD = AC − CM + BC + CN = AC + BC. Est igitur CDE ellipsis cujus foci A & B, (Theor. 3. de Ellipsi) quæque foco alterutro in infinitum abeunte mutatur in parabolam & focis coeuntibus mutatur in circulum.

telligantur lineæ curvæ *CP*, *CQ* ipsis *AD*, *DK* semper perpendiculares: (c) erunt incrementa linearum *PD*, *QD*, atque ideo lineæ ipsæ *PD*, *QD*, incrementis istis genitæ, ut sinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contra.

PRO-

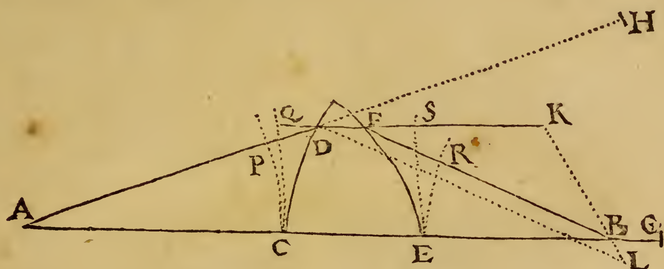
(c) 561. * *Erunt incrementa &c.* Nam si capiatur arcus quam minimus DE, atque ex puncto E in curvas CP, CQ, & in rectas PD, QK, demittantur perpendicula Ep, Eq & EF, EG, coeuntibus punctis E & D, erunt EF, Pp & EG, Qq sibi mutuò parallelæ, & proindè PF, pE & QG, qE, æquales, ideóque DF & DG erunt rectarum PD, QD incrementa nascentia. Sed, (ex demonstratis suprà) DF est ad DG, ut sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ, quare incrementa linearum PD, QD, atque adeò (cor. Lem. 4.) lineæ ipsæ PD, QD, (quæ simul nascuntur in puncto C) incrementis istis genitæ, erunt ut sinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem, & contrà, si lineæ PD, QD curvis CP, CQ perpendiculares sint ut sinus incidentiæ & emergentiæ, erunt earum incrementa nascentia in eâdem semper ratione, ac proinde si corpus in superficiem CD secundum lineam PD incidat, emerget secundum lineam QD seu DK.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XCVIII. PROBLEMA XLVIII.

Iisdem positis, & circa axem AB *descriptâ superficie quâcunque attractivâ* CD, *regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato* A *exeuntia transire debent: invenire superficiem secundam attractivam* EF, *quæ corpora illa ad locum datum* B *convergere faciat.*

Juncta *AB* secet superficiem primam in *C* & secundam in *E*, puncto *D* utcunque assumpto. Et posito sinu incidentiæ in superficiem primam ad sinum emergentiæ ex eâdem, & (d) sinu emergentiæ è superficie secundâ ad sinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N: pro-



duc tum *AB* ad *G*, ut sit *BG* ad *CE* ut M−N ad N; tum *AD* ad *H*, ut sit *AH* æqualis *AG*; tum etiam *DF* ad *K*, ut sit *DK* ad *DH* ut N ad M. Junge *KB*, & centro *D* intervallo *DH* describe circulum occurrentem *KB* productæ in *L*, ipsique *DL* parallelam age *BF*: & punctum *F* tanget lineam *EF*, quæ circa axem *AB* revoluta describet superficiem quæsitam. *Q. E. F.*

Nam

(d) * *Et sinu emergentiæ è superficie secunda &c.* Est enim sinus emergentiæ è superficie secundâ EF, ad sinum incidentiæ in eamdem, ut sinus incidentiæ in superficiem primam CD, ad sinum emergentiæ ex eâdem. Nam si radius incidens AD refrangitur per DF, ob eandem rationem radius FD, incidens in D refrangetur per DA, & qui sinus erat incidentiæ in primo casu, fit sinus emergentiæ in secundo.

Nam concipe Lineas CP, CQ ipſis AD, DF reſpectivè, & Lineas ER, ES ipſis FB, FD ubique perpendiculares eſſe, (e) ideoque QS ipſi CE ſemper æqualem; & erit (per Corol. 2. Prop. xcvii.) PD ad QD ut M ad N, (f) ideoque ut DL ad DK vel (g) FB ad FK; & (h) diviſim ut $DL - FB$ ſeu $PH - PD - FB$ ad FD ſeu $FQ - QD$; & compoſitè ut $PH - FB$ ad FQ, id eſt (ob (i) æquales PH & CG, QS & CE) $CE + BG - FR$ ad $CE - FS$. Verum (ob proportionales BG ad CE & M − N ad N) eſt etiam $CE + BG$ ad CE ut M ad N: (k) ideoque diviſim FR ad FS ut M ad N, & propterea per Corol. 2. Prop. xcvii, ſuperficies EF cogit corpus, in ipſam ſecundum lineam DF incidens, pergere in linea FR ad locum B. *Q. E. D.*

Liber Primus. Prop. xcviii. Prob. xlviii.

Scholium. Eâdem methodo pergere liceret ad ſuperficies tres vel plures. Ad uſus autem Opticos maxime accommodatæ ſunt figuræ Sphæricæ. Si Perſpicillorum vitra Objectiva ex vitris duobus Sphæricè figuratis & Aquam inter ſe claudentibus conflentur; fieri poteſt ut à refractionibus Aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum ſuperficiebus extremis, ſatis accuratè corrigantur. Talia autem vitra Objectiva vitris Ellipticis & Hyperbolicis præferenda ſunt, non ſolum quod facilius & accuratius formari poſſint, ſed etiam quod Penicillos radiorum extra axem vitri ſitos accuratius refringant. Verùm tamen diver-

(e) * *Ideòque QS ipſi CE ſemper æqualem.* Cum enim linea QS, ſit ſemper perpendicularis utrique lineæ CQ, ES (ex Hyp.) ea nec creſcit, nec decreſcit, ob partes curvarum in Q & S ſemper parallelas, ut patet.

(f) * *Ideoque ut DL ad DK.* Eſt enim (per conſtr.) DK ad DH, ut N ad M, & $DL = DH$, per conſt.

(g) * *Vel FB ad FK.* Ob parallelas DL, FB (per conſtr.)

(h) * *Et diviſim.* Cum ſit $PD : QD = DH : DK = FB : FK$, erit diviſim $DH : DK$, ſeu $PD : QD = DH - FB : DK - FK = PH - PD - FB : DF$, ſeu $QF - QD$, & compoſitè $PD : QD = PH - PD + PD - FB$, ſeu $PH - FB : QF - QD + QD$, ſeu $QF = M : N$.

(i) * *Ob æquales PH & CG.* Nam (per conſtr.) $AH = AG$, & quoniam punctum A datum eſt, eſtque AP ſemper perpendicularis ad curvam CP, liquet eam curvam eſſe circulum cujus centrum A, undè $AP = AC$, & hinc $PH = CG$; & ſimili modo patet eſſe $BR = BE$, ob datum punctum B.

(k) * *Ideoque diviſim &c.* Nam cum ſit (ex demonſtratis) $M : N = CE + BG - FR : CE - FS = CE + BG : CE$, erit diviſim $M : N = FR : FS$.

diversa diversorum radiorum Refrangibilitas impedimento est, quò minus Optica per figuras vel Sphæricas vel alias quascunque perfici possit. Nisi corrigi possint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis ([1]) imperitè collocabitur.

(1) * *Imperitè collocabitur.* Vide primam partem Lib. 1. Optices Newtonianæ ubi egregiis experimentis auctor demonstravit radios diversi coloris esse etiam diversè refrangibiles; unde fit ut focus Lentis objectivæ Telescopiorum (in quo fit objectorum imago quæ trans vitrum oculare spectatur) non sit unicus, sed focus radiorum violaceorum remotissimus sit ab oculari, focus radiorum rubrorum sit proximus, radii ergo ex illis variis imaginibus procedentes inæqualiter colliguntur à vitro oculari, nisi ejus focus adeo remotus sit ut intervallum inter diversas illas imagines ejus respectu evanescat, sed manente Lente objectivâ, aucto foco Lentis ocularis diminuitur in eâdem ratione amplificatio objecti; sic ergo quantumvis accuratè colligerentur radii per objectivæ Lentis figuram, hæc focorum multiplicitas neutiquam corrigetur nisi dispendio amplificationis objecti: Hæc Theoria Newtonum ad inventionem Telescopiorum Catoptricorum deduxit, quæ Prop. 7. & 8. Lib. 1. Optices ab ipso explicantur, & quæ cum levi mutatione in usum communissimum venere.

FINIS TOMI PRIMI.





